Добавление

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Это добавление посвящено элементарной теории множеств. Здесь строятся порядковые и кардинальные числа и доказываются наиболее часто применяемые теоремы. Затем определяются неотрицательные целые числа и как теоремы доказываются постулаты Пеано.

Предполагается, что читатель обладает практическим знанием элементарной логики, но знакомство с формальной логикой для нас несущественно. Однако понимание природы математических систем (в техническом смысле) будет способствовать прояснению и мотивировке всего обсуждения. В замечательной книге Т а р с к о г о [1] такие системы описываются очень прозрачно; книга Тарского особенно рекомендуется в качестве общей основы.

Изложение теории множеств ведется таким образом, чтобы его можно было без труда перевести на полностью формализованный язык *). Чтобы облегчить как формальное, так и неформальное восприятие, вводный материал разбит на два параграфа, второй из них представляет собой, по существу, точную переработку части первого. Его можно опустить, не разорвав изложения.

Принятая система аксиом является разновидностью системы аксиом Сколема и А. Морса; многое в ней исходит от системы аксиом Гильберта — Бернайса — фон

---

*) То есть чтобы теоремы можно было записать в терминах логических констант, логических переменных и констант системы, а их доказательства получить в терминах правил вывода из аксиом. Конечно, для подобного изложения понадобилась бы некоторая база в формальной логике. Когда мне привелось осуществлять такого рода редакцию данного ниже материала для курса лекций, я пользовался (в основном) метааксиомами логики в изложении **К у а й н а** [1].

Неймана в формулировке Гёделя. Выбор формального подхода, данного ниже, определялся желанием быстро и естественно построить фундамент математики, свободной от наиболее очевидных парадоксов. По этой причине в основу положена не конечная система аксиом, а восемь аксиом и одна схема аксиом *) (последнее означает, что все утверждения некоторого определенного типа принимаются за аксиомы).

Оказалось удобным назвать теоремами многие утверждения предварительного характера. Это привело к переполнению списка теорем, но позволило в то же время опустить многие доказательства и сократить другие. Используемые соглашения в большинстве своем более или менее ясны из вида определений и теорем.

КЛАССИФИКАЦИОННАЯ СХЕМА АКСИОМ

Равенство всегда понимается как логическое тождество: «$1+1=2$» следует воспринимать как утверждение о том, что «$1+1$» и «2» — названия одного и того же объекта. Кроме обычных аксиом равенства, предполагается выполненным без каких-либо ограничений правило подстановки; в частности, заменяя в теореме объект равным ему, мы снова получаем теорему.

Кроме «$=$» и других логических констант, есть две первоначальные (неопределяемые) константы. Первая из них — это «$\in$». Ее следует читать, как «является элементом (чего-то)» или «принадлежит (чему-то)». Вторая константа обозначается довольно странно: «$\{\ldots:\ldots\}$» и читается как «класс всех ... таких, что ...». Это *классификатор*. Замечание об употреблении термина «класс» может прояснить дело. Этот термин не встречается ни в одной аксиоме, ни в одном определении и ни в одной

*) В действительности без точной формулировки принимается также некоторая схема аксиом для определения. Именно, утверждения определенного вида, включающие одну новую константу и являющиеся либо эквивалентностью, либо тождеством, принимаются в качестве определений; с ними затем обращаются как с теоремами. Эта схема аксиом для определения удачна, ибо допускает проверку: определения, согласующиеся с предписанными правилами, не могут привести ни к новым противоречиям, ни к по-настоящему новым результатам, как показано Лесневским.

теореме. Он возникает при основной интерпретации *) наших положений как утверждений о классах (совокупностях, семействах). Таким образом, назначением термина «класс» в предстоящем обсуждении является подсказывать эту интерпретацию.

Маленькие латинские буквы обозначают (логические) переменные. Разница между константой и переменной целиком заключена в правилах подстановки. Например, результат замены переменной в теореме другой переменной, в этой теореме не встречающейся, снова будет теоремой. Для констант это далеко не так.

I. Аксиома объемности **). *Для каждых x и y $x=y$ в том и только в том случае, когда для каждого z $z\in x$ тогда и только тогда, когда $z\in y$.*

Таким образом, два класса совпадают тогда и только тогда, когда каждый элемент любого из них является элементом другого. Часто в формулировках теорем и определений мы будем опускать выражения «для каждого x» или «для каждого y». Если, например, переменной «x» в формулировке не предшествуют выражения «для каждого» или «для некоторого», надо читать это место теоремы или определения как «для каждого x».

Следующим определением дается специальное наименование тем классам, которые сами являются элементами классов. Причины, которыми вызвано это разделение классов на два сорта, объясняются немного позже.

1. Определение. *x является множеством в том и только в том случае, когда для некоторого y будет $x\in y$.*

Следующая задача — описать, как пользоваться классификатором. Первый пропуск в классификаторе надлежит заполнить переменной, а второй — формулой; например, так: $\{x : x\in y\}$. Мы принимаем за аксиому утверждение: $u\in\{x : x\in y\}$ в том и лишь в том случае,

*) Допускается, что возможны и другие интерпретации.

**) Можно было бы принять это за определение, покончив тем самым с одной аксиомой и всеми логическими предложениями о равенстве. Это было бы совершенно законно. Однако, поскольку не было бы никакого неограниченного правила подстановки для равенства, мы должны были бы принять такую аксиому: если $x\in z$ и $y=x$, то $y\in z$.

когда u — множество и $u \in y$ *). Более общо, каждое утверждение следующего вида полагается аксиомой: $u \in \{x : \ldots x \ldots\}$ тогда и только тогда, когда u — множество и $\ldots u \ldots$ Здесь предполагается, что «$\ldots x \ldots$» — некоторая формула, и «$\ldots u \ldots$» — формула, получающаяся из последней, если в ней всюду «x» заменить на «u». Таким образом, $u \in \{x : x \in y$ и $z \in x\}$ тогда и только тогда, когда u — множество, $u \in y$ и $z \in u$.

Эта схема аксиом точно отражает обычный интуитивно ясный способ построения классов, за исключением требования: «u есть множество». Совершенно очевидно, что это — очень неестественное и интуитивно абсолютно нежелательное требование. Однако если от него отказаться, то можно построить противоречие, отправляясь от одной аксиомы объемности (см. теорему 39 и предшествующее ей обсуждение). Это усложнение, ведущее в свою очередь к большой технической работе, касающейся существования множеств, — плата за избежание очевидных несуразностей. Очень возможно, что менее очевидные несуразности при этом остаются.

КЛАССИФИКАЦИОННАЯ СХЕМА АКСИОМ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Для точной формулировки классификационной схемы аксиом следует условиться, что такое формула. Принято считать, что **):

---

*) Эта и следующая фраза могут внести некоторую путаницу: в первой условие «u есть множество» можно отбросить, ибо в силу определения 1 оно вытекает из второго условия «$u \in y$». Однако этого нельзя сказать про второе утверждение, ибо из «... u ...» еще не следует, вообще говоря, что u — множество. Именно ко второй фразе следует отнести все комментарии автора. (*Прим. перев.*)

**) Этот напоминающий круг способ выражаться, к сожалению, неизбежен. Согласимся имена писать в кавычках: например, «Бостон» — название Бостона. Тогда если $\mathfrak{A}$ — формула и $\mathfrak{B}$ — формула, то «$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$» — не формула. Например, если $\mathfrak{A}$ есть «$x=y$» и $\mathfrak{B}$ есть «$y=z$», то «„$x=y$“ $\to$ „$y=z$“» не есть формула. Формула (например, «$x=y$») не должна содержать внутри себя кавычек. Вместо «$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$» мы желаем рассматривать результат замены «α» на $\mathfrak{A}$ и «β» на $\mathfrak{B}$ в «$\alpha \to \beta$». Всех этих околичностей можно было бы избежать, воспользовавшись соглашением об употреблении «уголков» Куайна.