когда u — множество и $u \in y$ *). Более общо, каждое утверждение следующего вида полагается аксиомой: $u \in \{x: \ldots x \ldots\}$ тогда и только тогда, когда u — множество и $\ldots u \ldots$ Здесь предполагается, что «$\ldots x \ldots$» — некоторая формула, и «$\ldots u \ldots$» — формула, получающаяся из последней, если в ней всюду «x» заменить на «u». Таким образом, $u \in \{x: x \in y$ и $z \in x\}$ тогда и только тогда, когда u — множество, $u \in y$ и $z \in u$.

Эта схема аксиом точно отражает обычный интуитивно ясный способ построения классов, за исключением требования: «u есть множество». Совершенно очевидно, что это — очень неестественное и интуитивно абсолютно нежелательное требование. Однако если от него отказаться, то можно построить противоречие, отправляясь от одной аксиомы объемности (см. теорему 39 и предшествующее ей обсуждение). Это усложнение, ведущее в свою очередь к большой технической работе, касающейся существования множеств, — плата за избежание очевидных несуразностей. Очень возможно, что менее очевидные несуразности при этом остаются.

КЛАССИФИКАЦИОННАЯ СХЕМА АКСИОМ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Для точной формулировки классификационной схемы аксиом следует условиться, что такое формула. Принято считать, что **):

---

*) Эта и следующая фраза могут внести некоторую путаницу: в первой условие «u есть множество» можно отбросить, ибо в силу определения 1 оно вытекает из второго условия «$u \in y$». Однако этого нельзя сказать про второе утверждение, ибо из «$\ldots u \ldots$» еще не следует, вообще говоря, что u — множество. Именно ко второй фразе следует отнести все комментарии автора. (*Прим. перев.*)

**) Этот напоминающий круг способ выражаться, к сожалению, неизбежен. Согласимся имена писать в кавычках: например, «Бостон» — название Бостона. Тогда если $\mathfrak{A}$ — формула и $\mathfrak{B}$ — формула, то «$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$» — не формула. Например, если $\mathfrak{A}$ есть «$x=y$» и $\mathfrak{B}$ есть «$y=z$», то «„$x=y$" $\rightarrow$ „$y=z$"» не есть формула. Формула (например, «$x=y$») не должна содержать внутри себя кавычек. Вместо «$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$» мы желаем рассматривать результат замены «α» на $\mathfrak{A}$ и «β» на $\mathfrak{B}$ в «$\alpha \rightarrow \beta$». Всех этих околичностей можно было бы избежать, воспользовавшись соглашением об употреблении «уголков» Куайна.

(а) Результат замены «α» и «β» переменными в любом из следующих соотношений есть формула

$$\alpha=\beta, \quad \alpha\in\beta.$$

(б) Результат замены «α» и «β» переменными, а «A» и «B» — формулами в любом из следующих соотношений есть формула:

если A, то B $\quad A \longleftrightarrow B \quad$ не верно, что A

A и B $\qquad$ A или B

для каждого α, A $\qquad$ при некотором α, A

$$\beta\in\{\alpha : A\} \qquad \{\alpha : A\}\in\beta \qquad \{\alpha : A\}\in\{\beta : B\}.$$

Формулы строятся рекурсивно, начиная с первоначальных формул (а) путем применения конструкций, разрешенных (б).

II. Классификационная схема аксиом. *Мы получаем аксиому, если в выписанной в конце формулировке заменить «α» и «β» переменными, «A» — некоторой формулой $\mathfrak{A}$ и «B» — формулой, возникающей из $\mathfrak{A}$, если заменить каждую переменную, подставленную вместо α, переменной, подставленной вместо β:*

Для каждого β $\beta\in\{\alpha : A\}$ в том и только в том случае, когда β — множество и имеет место B.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АЛГЕБРА КЛАССОВ

Сформулированные до сих пор аксиомы позволяют вывести ряд теорем прямо из логических результатов.

2. Определение. $x\cup y=\{z : z\in x$ *или* $z\in x\}$.

3. Определение. $x\cap y=\{z : z\in x$ *и* $z\in y\}$.

Класс $x\cup y$ называется *объединением классов* x и y, а $x\cap y$ называется *пересечением* x и y.

4. Теорема. *$z\in x\cup y$ в том и только в том случае, когда $z\in x$ или $z\in y$, и $z\in x\cap y$ в том и только в том случае, когда $z\in x$ и $z\in y$.*

Доказательство. В силу классификационной аксиомы $z\in x\cup y$ тогда и только тогда, когда $z\in x$ или $z\in y$ и z — множество. Но в силу определения множества