(а) Результат замены «$\alpha$» и «$\beta$» переменными в любом из следующих соотношений есть формула

$$\alpha=\beta, \qquad \alpha\in\beta.$$

(б) Результат замены «$\alpha$» и «$\beta$» переменными, а «$A$» и «$B$» — формулами в любом из следующих соотношений есть формула:

если $A$, то $B$ $\quad A\longleftrightarrow B$ $\quad$ не верно, что $A$

$A$ и $B$ $\quad$ $A$ или $B$

для каждого $\alpha$, $A$ $\quad$ при некотором $\alpha$, $A$

$$\beta\in\{\alpha:A\} \qquad \{\alpha:A\}\in\beta \qquad \{\alpha:A\}\in\{\beta:B\}.$$

Формулы строятся рекурсивно, начиная с первоначальных формул (а) путем применения конструкций, разрешенных (б).

**II.** Классификационная схема аксиом. *Мы получаем аксиому, если в выписанной в конце формулировке заменить «$\alpha$» и «$\beta$» переменными, «$A$» — некоторой формулой $\mathfrak{A}$ и «$B$» — формулой, возникающей из $\mathfrak{A}$, если заменить каждую переменную, подставленную вместо $\alpha$, переменной, подставленной вместо $\beta$:*

*Для каждого $\beta$ $\quad\beta\in\{\alpha:A\}$ в том и только в том случае, когда $\beta$ — множество и имеет место $B$.*

## ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АЛГЕБРА КЛАССОВ

Сформулированные до сих пор аксиомы позволяют вывести ряд теорем прямо из логических результатов.

**2.** Определение. $x\cup y=\{z:z\in x$ *или* $z\in x\}$.

**3.** Определение. $x\cap y=\{z:z\in x$ *и* $z\in y\}$.

Класс $x\cup y$ называется *объединением классов* $x$ и $y$, а $x\cap y$ называется *пересечением* $x$ и $y$.

**4.** Теорема. *$z\in x\cup y$ в том и только в том случае, когда $z\in x$ или $z\in y$, и $z\in x\cap y$ в том и только в том случае, когда $z\in x$ и $z\in y$.*

Доказательство. В силу классификационной аксиомы $z\in x\cup y$ тогда и только тогда, когда $z\in x$ или $z\in y$ и $z$ — множество. Но в силу определения множества (определение 1) $z \in x$ или $z \in y$ и $z$ — множество тогда и только тогда, когда $z \in x$ или $z \in y$. Аналогично доказывается утверждение о пересечениях.

**5.** Теорема. $x \cup x = x$ *и* $x \cap x = x$.

**6.** Теорема. $x \cup y = y \cup x$ *и* $x \cap y = y \cap x$.

**7.** Теорема*). $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$ *и* $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$.

Этими теоремами утверждается, что операции объединения и пересечения коммутативны и ассоциативны в обычном смысле. Законы дистрибутивности выписаны ниже.

**8.** Теорема. $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$ *и* $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$.

**9.** Определение. *$x \notin y$ в том и только в том случае, когда не верно, что $x \in y$.*

**10.** Определение. $\setminus x = \{y : y \notin x\}$.

Класс $\setminus x$ называется *дополнением* (класса) $x$.

**11.** Теорема. $\setminus(\setminus x) = x$.

**12.** Теорема (де Морган). $\setminus(x \cup y) = (\setminus x) \cap (\setminus y)$ *и* $\setminus(x \cap y) = (\setminus x) \cup (\setminus y)$.

Доказательство. Будет доказано только первое из этих двух утверждений. Для каждого $z$ $z \in \setminus(x \cup y)$ тогда и только тогда, когда $z$ — множество и не верно, что $z \in x \cup y$, в силу классификационной аксиомы и определения 10. В силу теоремы 4 формула $z \in x \cup y$ эквивалентна формуле: $z \in x$ или $z \in y$. Следовательно, $z \in \setminus(x \cup y)$ в том и лишь в том случае, когда $z$ — множество, $z \notin x$ и $z \notin y$, т. е. когда $z \in \setminus x$ и $z \in \setminus y$. Снова применив теорему 4, заключаем, что $z \in \setminus(x \cup y)$ эквивалентно $z \in (\setminus x) \cap (\setminus y)$. Значит, $\setminus(x \cup y) = (\setminus x) \cap (\setminus y)$ в силу аксиомы объемности.

**13.** Определение. $x \setminus y = x \cap (\setminus y)$.

Класс $x \setminus y$ называется *разностью* (классов) $x$ *и* $y$, или *дополнением* $y$ *относительно* $x$.

---

*) Скобок не понадобилось бы, если бы в определении 2 константа «$\cup$» стояла на первом месте, т. е. вместо «$x \cup y$» было бы написано «$\cup xy$». В этом случае первая часть теоремы выглядела бы так: $\cup \cup xyz = \cup x \cup yz$. [Эта идея лежит в основе так называемой бесскобочной системы обозначений, предложенной польским логиком Лукасевичем. (*Прим. ред.*)]

**14.** Теорема. $x \cap (y \setminus z) = (x \cap y) \setminus z$.

Предложение «$x \cup (y \setminus z) = (x \cup y) \setminus z$» кажется подозрительным, но на данной стадии противоречащего примера построить нельзя. Точнее, с помощью принятых до сих пор аксиом отрицание этого предложения невозможно доказать: существует модель, в которой выполняется эта начальная группа аксиом и такая, что $x \notin y$ при любых $x$ и $y$ (нет множеств). Доказать отрицание нашего предложения можно будет после аксиом, которые мы вскоре сформулируем.

**15.** Определение. $0 = \{x : x \neq x\}$.

Класс 0 называется *пустым классом*, или *нулем.*

**16.** Теорема. $x \notin 0$.

**17.** Теорема. $0 \cup x = x$ *и* $0 \cap x = 0$.

**18.** Определение. $\mathfrak{U} = \{x : x = x\}$.

Класс $\mathfrak{U}$ называется *универсумом.*

**19.** Теорема. $x \in \mathfrak{U}$ *в том и только в том случае, когда* $x$ *— множество.*

**20.** Теорема. $x \cup \mathfrak{U} = \mathfrak{U}$ *и* $x \cap \mathfrak{U} = x$.

**21.** Теорема. $\setminus 0 = \mathfrak{U}$ *и* $\setminus \mathfrak{U} = 0$.

**22.** Определение*). $\cap x = \{z$: *для каждого* $y$, *если* $y \in x$, то $z \in y\}$.

**23.** Определение. $\cup x = \{z$: *для некоторого* $y$ $z \in y$ *и* $y \in x\}$.

Класс $\cap x$ называется *пересечением* элементов класса $x$. Заметим, что элементами класса $\cap x$ служат элементы элементов класса $x$; они могут как принадлежать, так и не принадлежать классу $x$. Класс $\cup x$ называется *объединением* элементов класса $x$. Заметим, что множество $z$ принадлежит $\cap x$ (или $\cup x$) тогда и только тогда, когда $z$ принадлежит каждому (соответственно некоторому) элементу класса $x$.

**24.** Теорема. $\cap 0 = \mathfrak{U}$ *и* $\cup 0 = 0$.

Доказательство. $z \in \cap 0$ эквивалентно тому, что $z$ — множество, и $z$ принадлежит каждому элементу класса 0. Так как (теорема 16) элементов класса 0 не

---

*) Обозначение для пересечения элементов семейства в терминах связанной переменной в этом Добавлении не нужно. Здесь принято более простое обозначение, чем то, которым мы пользовались в остальной части книги.

существует, $z \in \bigcap 0$ эквивалентно тому, что $z$ — множество. Отсюда в силу теоремы 19 и аксиомы объемности следует, что $\bigcap 0 = \mathfrak{U}$. Второе утверждение тоже доказывается легко.

**25.** Определение. *$x \subset y$ тогда и только тогда, когда для каждого $z$, если $z \in x$, то $z \in y$.*

Класс $x$ является *подклассом класса* $y$, или *содержится в классе* $y$, в том и лишь в том случае, когда $x \subset y$. Чрезвычайно существенно не путать «$\subset$» с «$\in$». Например, $0 \subset 0$, однако не верно, что $0 \in 0$.

**26.** Теорема. *$0 \subset x$ и $x \subset \mathfrak{U}$.*

**27.** Теорема. *$(x = y)$ эквивалентно $(x \subset y$ и $y \subset x)$.*

**28.** Теорема. *Если $x \subset y$ и $y \subset z$, то $x \subset z$.*

**29.** Теорема. *$(x \subset y)$ эквивалентно $(x \cup y = y)$.*

**30.** Теорема. *$(x \subset y)$ эквивалентно $(x \cap y = x)$.*

**31.** Теорема. *Если $x \subset y$, то $\bigcup x \subset \bigcup y$ и $\bigcap y \subset \bigcap x$.*

**32.** Теорема. *Если $x \in y$, то $x \subset \bigcup y$ и $\bigcap y \subset x$.*

Предшествующие определения и теоремы применяются очень часто, — нередко без точного на то указания.

## СУЩЕСТВОВАНИЕ МНОЖЕСТВ

Этот параграф посвящен вопросам существования множеств и первым шагом в построении отображений и других первоначальных отношений теории множеств.

**III.** Аксиома подмножеств. *Если $x$ — множество, то существует такое множество $y$, что при каждом $z$, если $z \subset x$, то $z \in y$.*

**33.** Теорема *Если $x$ — множество и $z \subset x$, то $z$ — множество.*

Доказательство. В соответствии с аксиомой подмножеств для любого множества $x$ существует такое $y$, что если $z \subset x$, то $z \in y$. Значит, в силу определения 1 $z$ является множеством. (Заметим, что в этом доказательстве аксиома подмножеств используется не в полную силу — нам не понадобился тот факт, что $y$ — множество.)

**34.** Теорема. *$0 = \bigcap \mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U} = \bigcup \mathfrak{U}$.*

Доказательство. Если $x \in \bigcap \mathfrak{U}$, то $x$ является множеством, и так как $0 \subset x$, то в силу теоремы 33 0 будет множеством. Значит, $0 \in \mathfrak{U}$, и каждый элемент клас-