существует, $z \in \bigcap 0$ эквивалентно тому, что z — множество. Отсюда в силу теоремы 19 и аксиомы объемности следует, что $\bigcap 0 = \mathcal{U}$. Второе утверждение тоже доказывается легко.

25. Определение. *$x \subset y$ тогда и только тогда, когда для каждого z, если $z \in x$, то $z \in y$.*

Класс x является *подклассом класса* y, или *содержится в классе* y, в том и лишь в том случае, когда $x \subset y$. Чрезвычайно существенно не путать «$\subset$» с «$\in$». Например, $0 \subset 0$, однако не верно, что $0 \in 0$.

26. Теорема. *$0 \subset x$ и $x \subset \mathcal{U}$.*

27. Теорема. *$(x = y)$ эквивалентно $(x \subset y$ и $y \subset x)$.*

28. Теорема. *Если $x \subset y$ и $y \subset z$, то $x \subset z$.*

29. Теорема. *$(x \subset y)$ эквивалентно $(x \cup y = y)$.*

30. Теорема. *$(x \subset y)$ эквивалентно $(x \cap y = x)$.*

31. Теорема. *Если $x \subset y$, то $\bigcup x \subset \bigcup y$ и $\bigcap y \subset \bigcap x$.*

32. Теорема. *Если $x \in y$, то $x \subset \bigcup y$ и $\bigcap y \subset x$.*

Предшествующие определения и теоремы применяются очень часто, — нередко без точного на то указания.

СУЩЕСТВОВАНИЕ МНОЖЕСТВ

Этот параграф посвящен вопросам существования множеств и первым шагом в построении отображений и других первоначальных отношений теории множеств.

III. Аксиома подмножеств. *Если x — множество, то существует такое множество y, что при каждом z, если $z \subset x$, то $z \in y$.*

33. Теорема *Если x — множество и $z \subset x$, то z — множество.*

Доказательство. В соответствии с аксиомой подмножеств для любого множества x существует такое y, что если $z \subset x$, то $z \in y$. Значит, в силу определения 1 z является множеством. (Заметим, что в этом доказательстве аксиома подмножеств используется не в полную силу — нам не понадобился тот факт, что y — множество.)

34. Теорема. $0 = \bigcap \mathcal{U}$ *и* $\mathcal{U} = \bigcup \mathcal{U}$.

Доказательство. Если $x \in \bigcap \mathcal{U}$, то x является множеством, и так как $0 \subset x$, то в силу теоремы 33 0 будет множеством. Значит, $0 \in \mathcal{U}$, и каждый элемент класса $\bigcap \mathfrak{U}$ принадлежит классу 0. Следовательно, в $\bigcap \mathfrak{U}$ нет элементов. Ясно (если иметь в виду теорему 26), что $\bigcup \mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}$. Если $x \in \mathfrak{U}$, то x — множество и в силу аксиомы подмножеств существует такое множество y, что если $z \subset x$, то $z \in y$. В частности, $x \in y$, и, так как $y \in \mathfrak{U}$, получаем, что $x \in \bigcup \mathfrak{U}$. Следовательно, $\mathfrak{U} \subset \bigcup \mathfrak{U}$; отсюда следует искомое равенство.

35. Теорема. *Если* $x \neq 0$, *то* $\bigcap x$ *является множеством.*

Доказательство. Если $x \neq 0$, то для некоторого y $y \in x$. Но y — множество, и так как в силу теоремы 32 $\bigcap x \subset y$, то из теоремы 33 вытекает, что $\bigcap x$ будет множеством.

36. Определение. $2^x = \{y : y \subset x\}$

37. Теорема. $\mathfrak{U} = 2^{\mathfrak{U}}$.

Доказательство. Каждый элемент класса $2^{\mathfrak{U}}$ является множеством и, следовательно, принадлежит $\mathfrak{U}$. Каждый элемент класса $\mathfrak{U}$ является множеством и содержится (теорема 26) в $\mathfrak{U}$, а значит, принадлежит классу $2^{\mathfrak{U}}$.

38. Теорема. *Если* x — *множество, то* 2^x — *множество и для каждого* y $y \subset x$ *эквивалентно* $y \in 2^x$.

Интересно отметить, что на базе до сих пор провозглашенных аксиом еще нельзя доказать существования множеств, но уже можно доказать, что существует класс, не являющийся множеством. Положим $R = \{x : x \notin x\}$. В силу классификационной аксиомы, $R \in R$ тогда и только тогда, когда $R \notin R$ и R является множеством. Отсюда вытекает, что R не является множеством. Заметьте, что если бы в классификационной аксиоме отсутствовали слова «. . .является множеством», то возникло бы явное противоречие: $R \in R$ эквивалентно $R \notin R$. Это — парадокс Рассела. Из этого рассуждения следует, что $\mathfrak{U}$ не будет множеством, ибо $R \subset \mathfrak{U}$ и можно применить теорему 33. (Из аксиомы регулярности будет следовать, что $R = \mathfrak{U}$. Эта аксиома позволит также по-другому доказать, что $\mathfrak{U}$ не является множеством.)

39. Теорема. $\mathfrak{U}$ *не является множеством.*

40. Определение. $\{x\} = \{z$: *если* $x \in \mathfrak{U}$, *то* $z = x\}$.

Одночленный класс элемента x — это $\{x\}$.

Данное определение служит примером очень удобного технического соглашения. Если x — множество, то $\{x\}$ — класс, единственным элементом которого является x. Однако если x — не множество, то $\{x\}=\mathfrak{U}$ (это утверждается в теоремах 41 и 43). В действительности наиболее интересен случай, когда x — множество; здесь тот же результат достигается более естественным определением: за $\{x\}$ принимается $\{z : z=x\}$. Однако формулировки результатов существенно упрощаются, если вычисления построены таким образом, что при их применении за пределами естественной области действия получается $\mathfrak{U}$.

41. Теорема. *Если x — множество, то при каждом y $y\in\{x\}$ эквивалентно $y=x$.*

42. Теорема. *Если x — множество, то и $\{x\}$ — множество.*

Доказательство. Если x — множество, то $\{x\}\subset\subset 2^x$, причем 2^x — множество.

43. Теорема. $\{x\}=\mathfrak{U}$ *в том и только в том случае, когда x не является множеством.*

Доказательство. Если x — множество, то $\{x\}$ — множество; поэтому $\{x\}$ не равно $\mathfrak{U}$. Если x не является множеством, то $x\notin\mathfrak{U}$ и $\{x\}=\mathfrak{U}$ по определению.

44. Теорема. *Если x — множество, то $\bigcap\{x\}=x$ и $\bigcup\{x\}=x$. Если x не является множеством, то $\bigcap\{x\}=0$ и $\bigcup\{x\}=\mathfrak{U}$.*

Доказательство. Примените теоремы 34 и 41.

IV. Аксиома объединения. *Если x — множество и y — множество, то и $x\cup y$ — множество.*

45. Определение. $\{xy\}=\{x\}\cup\{y\}$.

Класс $\{xy\}$ называется *неупорядоченной парой.*

46. Теорема. *Если x — множество и y — множество, то $\{xy\}$ — множество и $z\in\{xy\}$ тогда и только тогда, когда $z=x$ или $z=y$; $\{xy\}=\mathfrak{U}$ в том и только в том случае, когда x или y не является множеством.*

47. Теорема. *Если x и y — множества, то $\bigcap\{xy\}=x\cap y$ и $\bigcup\{xy\}=x\cup y$. Если либо x, либо y не является множеством, то $\bigcap\{xy\}=0$ и $\bigcup\{xy\}=\mathfrak{U}$.*