УПОРЯДОЧЕННЫЕ ПАРЫ; ОТНОШЕНИЯ

Этот параграф посвящен свойствам упорядоченных пар и отношений. Характерное свойство упорядоченных пар обнаруживает теорема 55: если x и y — множества, то $(x, y) = (u, v)$ тогда и только тогда, когда $x = u$ и $y = v$.

48. Определение. $(x, y) = \{\{x\}\{xy\}\}$.

Класс (x, y) называется *упорядоченной парой.*

49. Теорема. *(x, y) является множеством в том и только в том случае, когда x — множество и y — множество; если (x, y) не является множеством, то $(x, y) = \mathfrak{U}$.*

50. Теорема. *Если x и y — множества, то $\bigcup (x, y) = \{xy\}$, $\bigcap (x, y) = \{x\}$, $\bigcup \bigcap (x, y) = x$, $\bigcap \bigcap (x, y) = x$, $\bigcup \bigcup (x, y) = x \cup y$ и $\bigcap \bigcup (x, y) = x \cap y$.*

Если либо x, либо y не является множеством, то $\bigcup \bigcap (x, y) = 0$, $\bigcap \bigcap (x, y) = \mathfrak{U}$, $\bigcup \bigcup (x, y) = \mathfrak{U}$ и $\bigcap \bigcup (x, y) = 0$.

51. Определение. 1-*я коорд.* $z = \bigcap \bigcap z$.

52. Определение. 2-*я коорд.* $z = (\bigcap \bigcup z) \cup ((\bigcup \bigcup z) \setminus \bigcup \bigcap z)$.

Этими определениями мы будем пользоваться только тогда, когда z — упорядоченная пара, за одним лишь исключением. *Первая координата* класса z есть 1-я коорд. z и *вторая координата* класса z есть 2-я коорд. z.

53. Теорема. 2-*я коорд.* $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}$.

54. Теорема. *Если x и y — множества, то 1-я коорд. $(x, y) = x$ и 2-я коорд. $(x, y) = y$. Если либо x, либо y не является множеством, то 1-я коорд. $(x, y) = \mathfrak{U}$ и 2-я коорд. $(x, y) = \mathfrak{U}$.*

Доказательство. Если x и y — множества, то искомое равенство для 1-*й коорд.* немедленно вытекает из 50 и 51. Искомое равенство для 2-*й коорд.* сводится в силу 50 и 52 к доказательству того, что $y = (x \cap y) \cup ((x \cup y) \setminus x)$. Непосредственно видно, что $(x \cup y) \setminus x = y \setminus x$, а в силу закона дистрибутивности $(y \cap x) \cup (y \cap \setminus x)$ есть $y \cap (x \cup \setminus x) = y \cap \mathfrak{U} = y$. Если хотя бы один из классов x и y не является множеством, то 1-*я корд.* (x, y) и 2-*я коорд.* (x, y) легко вычисляются с помощью теоремы 50.

55. Теорема. *Если x и y — множества и $(x, y) = (u, v)$, то $x = u$ и $y = v$.*

56. Определение. *r является отношением в том и только в том случае, когда для каждого элемента z класса r существуют такие x и y, что $z = (x, y)$.*

Отношение — это класс, элементами которого являются упорядоченные пары.

57. Определение. $r \circ s = \{u$: *для некоторого x, некоторого y и некоторого z будет $u = (x, z)$, $(x, y) \in s$ и $(y, z) \in r\}$.*

Класс $r \circ s$ называется *композицией* классов r и s. Чтобы избежать излишних обозначений, условимся отождествлять $\{(x, z)\colon \ldots\}$ с $\{u$: *для некоторого x, некоторого z имеет место $u = (x, z)$ и* $\ldots\}$. Таким образом, $r \circ s = \{(x, z)$: *при некотором y $(x, y) \in s$ и $(y, z) \in r\}$.*

58. Теорема. $(r \circ s) \circ t = r \circ (s \circ t)$.

59. Теорема $r \circ (s \cup t) = (r \circ s) \cup (r \circ t)$ *и* $r \circ (s \cap t) \subset \subset (r \circ s) \cap (r \circ t)$.

60. Определение. $r^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in r\}$.

Если r — отношение, то r^{-1} называется *отношением, обратным* к r.

61. Теорема. $(r^{-1})^{-1} = r$.

62. Теорема. $(r \circ s)^{-1} = s^{-1} \circ r^{-1}$.

ФУНКЦИИ

Интуитивно функция отождествляется с классом упорядоченных пар, образующих ее график. Здесь рассматриваются только однозначные функции; следовательно, любые две различные упорядоченные пары, принадлежащие некоторой функции, должны отличаться первыми координатами.

63. Определение. *f является функцией в том и только в том случае, когда f представляет собой отношение и для каждого x, каждого y и каждого z, если $(x, y) \in f$ и $(x, z) \in f$, то $y = z$.*

64. Теорема. *Если f — функция и g — функция, то и $f \circ g$ — функция.*

65. Определение. (*Область определения* $f) = \{x$: *для некоторого y $(x, y) \in f\}$.*

66. Определение. (*Область значений* $f) = \{y$: *для некоторого x $(x, y) \in f\}$.*