55. Теорема. *Если x и y — множества и* $(x, y) = (u, v)$, то $x=u$ и $y=v$.

56. Определение. *r является отношением в том и только в том случае, когда для каждого элемента z класса r существуют такие x и y, что $z=(x, y)$.*

Отношение — это класс, элементами которого являются упорядоченные пары.

57. Определение. $r \circ s = \{u$: *для некоторого x, некоторого y и некоторого z будет* $u=(x, z)$, $(x, y) \in s$ *и* $(y, z) \in r\}$.

Класс $r \circ s$ называется *композицией* классов r и s. Чтобы избежать излишних обозначений, условимся отождествлять $\{(x, z)\colon \ldots\}$ с $\{u$: *для некоторого x, некоторого z имеет место* $u=(x, z)$ *и* $\ldots\}$. Таким образом, $r \circ s = \{(x, z)$: *при некотором y* $(x, y) \in s$ *и* $(y, z) \in r\}$.

58. Теорема. $(r \circ s) \circ t = r \circ (s \circ t)$.

59. Теорема $r \circ (s \cup t) = (r \circ s) \cup (r \circ t)$ *и* $r \circ (s \cap t) \subset (r \circ s) \cap (r \circ t)$.

60. Определение. $r^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in r\}$.

Если r — отношение, то r^{-1} называется *отношением, обратным* к r.

61. Теорема. $(r^{-1})^{-1} = r$.

62. Теорема. $(r \circ s)^{-1} = s^{-1} \circ r^{-1}$.

ФУНКЦИИ

Интуитивно функция отождествляется с классом упорядоченных пар, образующих ее график. Здесь рассматриваются только однозначные функции; следовательно, любые две различные упорядоченные пары, принадлежащие некоторой функции, должны отличаться первыми координатами.

63. Определение. *f является функцией в том и только в том случае, когда f представляет собой отношение и для каждого x, каждого y и каждого z, если* $(x, y) \in f$ *и* $(x, z) \in f$, *то* $y=z$.

64. Теорема. *Если f — функция и g — функция, то и $f \circ g$ — функция.*

65. Определение. (*Область определения* f) $= \{x$: *для некоторого y* $(x, y) \in f\}$.

66. Определение. (*Область значений* f) $= \{y$: *для некоторого x* $(x, y) \in f\}$.

67. Теорема. *(Область определения* $\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}$ *и (область значений* $\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}$.

Доказательство. Если $x \in \mathfrak{U}$, то $(x, 0)$ и $(0, x)$ принадлежат $\mathfrak{U}$ и, значит, x принадлежит как области определения $\mathfrak{U}$, так и области значений $\mathfrak{U}$.

68. Определение. $f(x) = \bigcap\{y : (x, y) \in f\}$.

Значит, $z \in f(x)$, если z принадлежит второй координате каждого элемента из f, первой координатой которого служит x.

Класс $f(x)$ называется *значением* f в x, или *образом* x при f. Следует обратить внимание на то, что если x — подмножество области определения f, то $f(x)$ — это вовсе не $\{y$: *при некотором* z $z \in x$ *и* $y = f(z)\}$.

69. Теорема. *Если* $x \notin$ *(область определения* f), *то* $f(x) = \mathfrak{U}$; *если* $x \in$ *(область определения* f), *то* $f(x) \in \mathfrak{U}$.

Доказательство. Если $x \notin$ *(область определения* f), то $\{y : (x, y) \in f\} = 0$ и $f(x) = \mathfrak{U}$ (теорема 24). Если $x \in$ *(область определения* f), то $\{y : (x, y) \in f\} \neq 0$ и (теорема 35) $f(x)$ является множеством.

В предшествующей теореме не предполагается, что f — функция.

70. Теорема. *Если* f — *функция, то* $f = \{(x, y) : y = f(x)\}$.

71. Теорема*). *Если* f *и* g — *функции, то* $f = g$ *в том и только в том случае, когда* $f(x) = g(x)$ *для каждого* x.

Следующие две аксиомы **) придают новые черты классу всех множеств.

*) Эта теорема не была бы верна, если бы мы определили $f(x)$ как объединение вторых координат тех элементов из f, первая координата которых есть x. Ибо тогда, если $y \in \mathfrak{U}$ и $y \notin$ *(область определения* f), то $f(y) = 0$ и, если $g = f \cup \{(y, 0)\}$, то $g(x) = f(x)$ для каждого x, хотя f не равно g.

**) Эти две аксиомы можно заменить одной: если f — функция и область определения f представляет собой множество, то $\bigcup$ *(область значений* f) тоже является множеством. (В прежних обозначениях это предложение формулируется весьма естественно: если d — множество, $x(a)$ — множество для каждого a из d, то $\bigcup\{x(a) : a \in d\}$ — множество.) Чтобы вывести отсюда V и VI, можно поступить в общих чертах так. Доказываем V. По заданному f строим новую функцию, элементы которой имеют вид $(x, \{f(x)\})$. Доказываем VI. Для заданного x рассмотрим функцию, элементы которой имеют вид (u, u), где $u \in x$.

V. Аксиома подстановки. *Если f — функция и область определения f — множество, то и область значений f тоже является множеством.*

VI. Аксиома соединения. *Если x — множество, то и $\bigcup x$ — множество.*

72. Определение. $x \times y = \{(u, v) : u \in x \text{ и } v \in y\}$.

Класс $x \times y$ называется *декартовым произведением* классов x и y.

73. Теорема. *Если u и y — множества, то и $\{u\} \times y$ — множество.*

Доказательство. Ясно, что можно построить функцию (а именно, $\{(w, z) : w \in y \text{ и } z = (u, w)\}$), область определения которой есть y, а областью значений является $\{u\} \times y$. Затем примените аксиому подстановки.

74. Теорема. *Если x и y — множества, то и $x \times y$ — множество.*

Доказательство. Пусть f — функция (*область определения* f) $= x$ и $f(u) = \{u\} \times y$ при u из x (есть только одна такая функция, а именно, $f = \{(u, z) : u \in x \text{ и } z = \{u\} \times y\}$). В силу аксиомы подстановки область значений f является множеством. Прямое вычисление показывает, что (*область значений* f) $= \{z$: *для некоторого* u $u \in x$ *и* $z = \{u\} \times y\}$. Следовательно, $\bigcup$ (*область значений* f) — класс, который в силу аксиомы соединения является множеством, — есть $x \times y$.

75. Теорема. *Если f — функция и область определения f является множеством, то f — множество.*

Доказательство. В самом деле, $f \subset$ (*область определения* f) $\times$ (*область значений* f).

76. Определение. $y^x = \{f : f$ — *функция* (*область определения* f) $= x$ *и* (*область значений* f) $\subset y\}$.

77. Теорема. *Если x и y — множества, то и y^x — множество.*

Доказательство. Если $f \in y^x$, то $f \subset x \times y$, причем справа стоит множество; следовательно, $f \in 2^{x \times y}$ (теорема 38) и $2^{x \times y}$ — множество. Так как $y^x \subset 2^{x \times y}$, то из аксиомы подмножеств следует, что y^x — множество.

Для большего удобства дадим еще три определения.

78. Определение. *f задана на x в том и только в том случае, когда f — функция и $x =$ (область определения f).*

79. Определение. *f является функцией в y в том и только в том случае, когда f — функция и (область значений f) $\subset y$.*

80. Определение. *f является функцией на y в том и только в том случае, когда f — функция и (область значений f) $= y$.*

ВПОЛНЕ УПОРЯДОЧЕНИЕ

Многие результаты этого параграфа не понадобятся при последующем построении целых, порядковых и кардинальных чисел. Мы их включили, ибо они интересны и сами по себе; кроме того, в их доказательствах применяются упрощенные варианты тех конструкций, которые понадобятся в дальнейшем.

Так как основные конструктивные результаты уже доказаны, можно двигаться дальше несколько быстрее.

81. Определение. *xry в том и только в том случае, когда $(x, y) \in r$.*

Если xry, то говорят, что *x находится в отношении r* к y или что *x r-предшествует y*.

82. Определение. *r связывает x в том и только в том случае, когда из того, что u и v принадлежат x, следует, что либо urv, либо vru.*

83. Определение. *r транзитивно в x в том и только в том случае, когда из того, что u, v и w — элементы класса x и имеют место urv и vrw, следует, что urw.*

Если r транзитивно в x, то говорят, что *r упорядочивает x*. Выражение «u r-предшествует v» особенно удачно, когда u и v принадлежат x и r упорядочивает x.

84. Определение. *r асимметрично в x в том и только в том случае, когда из того, что u и v — элементы класса x и верно urv, следует, что vru неверно.*

Иначе говоря, если $u \in x$, $v \in x$ и u r-предшествует v, то v не r-предшествует u.

85. Определение. *$x \neq y$ в том и только в том случае, когда неверно, что $x = y$.*

86. Определение. *z есть r-первый элемент класса x в том и только в том случае, когда $z \in x$ и из $y \in x$ при $z \neq y$ вытекает, что yrz ложно.*