79. Определение. *f является функцией в y в том и только в том случае, когда f — функция и (область значений f) $\subset y$.*

80. Определение. *f является функцией на y в том и только в том случае, когда f — функция и (область значений f) $= y$.*

ВПОЛНЕ УПОРЯДОЧЕНИЕ

Многие результаты этого параграфа не понадобятся при последующем построении целых, порядковых и кардинальных чисел. Мы их включили, ибо они интересны и сами по себе; кроме того, в их доказательствах применяются упрощенные варианты тех конструкций, которые понадобятся в дальнейшем.

Так как основные конструктивные результаты уже доказаны, можно двигаться дальше несколько быстрее.

81. Определение. *xry в том и только в том случае, когда $(x, y) \in r$.*

Если xry, то говорят, что x *находится в отношении* r к y или что x *r-предшествует* y.

82. Определение. *r связывает x в том и только в том случае, когда из того, что u и v принадлежат x, следует, что либо urv, либо vru.*

83. Определение. *r транзитивно в x в том и только в том случае, когда из того, что u, v и w — элементы класса x и имеют место urv и vrw, следует, что urw.*

Если r транзитивно в x, то говорят, что r *упорядочивает* x. Выражение «u r-предшествует v» особенно удачно, когда u и v принадлежат x и r упорядочивает x.

84. Определение. *r асимметрично в x в том и только в том случае, когда из того, что u и v — элементы класса x и верно urv, следует, что vru неверно.*

Иначе говоря, если $u \in x$, $v \in x$ и u r-предшествует v, то v не r-предшествует u.

85. Определение. *$x \neq y$ в том и только в том случае, когда неверно, что $x = y$.*

86. Определение. *z есть r-первый элемент класса x в том и только в том случае, когда $z \in x$ и из $y \in x$ при $z \neq y$ вытекает, что yrz ложно.*

87. Определение. *r вполне упорядочивает x в том и только в том случае, когда r связывает x и из того, что $y \subset x$ и $y \neq 0$, следует, что в классе y есть r-первый элемент.*

88. Теорема. *Если r вполне упорядочивает x, то r транзитивно в x и r асимметрично в x.*

Доказательство. Если $u \in x$, $v \in x$, urv и vru, то $\{uv\} \subset x$ и, следовательно, в $\{uv\}$ существует r-первый элемент z. Верно либо $z=u$, либо $z=v$, и, следовательно, либо ложно, что vru, либо ложно, что urv. Это противоречие показывает, что r асимметрично в x. Если r не транзитивно в x, то для некоторых элементов u, v и w класса x будет urv, vrw и wru, так как r связывает x. Но тогда в множестве $\{u\} \cup \{v\} \cup \{w\}$ нет r-первого элемента.

89. Определение. *y есть r-секция класса x в том и только в том случае, когда $y \subset x$, r вполне упорядочивает x и из того, что $u \in x$, $v \in y$ и urv, следует, что $u \in y$.*

Следовательно, подмножество y класса x называется его r-секцией в том и лишь в том случае, когда r вполне упорядочивает x и никакой элемент из $x \setminus y$ не r-предшествует никакому элементу класса y.

90. Теорема. *Если $n \neq 0$ и каждый элемент класса n является r-секцией класса x, то $\bigcup n$ и $\bigcap n$ — r-секции класса x.*

91. Теорема. *Если y — r-секция класса x и $y \neq x$, то $y = \{u : u \in x$ и $urv\}$ для некоторого v из x.*

Доказательство. Если y — r-секция класса x и $y \neq x$, то в $x \setminus y$ есть r-первый элемент v. Если $u \in x$ и urv, то, так как v — r-первый элемент класса $x \setminus y$, имеет место $u \notin x \setminus y$ и, значит, $u \in y$. Следовательно, $\{u : u \in x$ и $urv\} \subset y$. С другой стороны, если $u \in y$, то, так как $v \notin y$ и y — r-секция, vru ложно; значит, имеет место urv. Отсюда вытекает доказываемое равенство.

92. Теорема. *Если x и y — r-секции класса z, то $x \subset y$ или $y \subset x$.*

93. Определение*). *f r — s-сохраняет порядок в том и только в том случае, когда f — функция, r впол-*

---

*) В этом Добавлении нет необходимости рассматривать сохраняющие порядок функции с не вполне упорядоченными областью определения и областью значений (как мы делали в главе 0). Ради простоты прежняя терминология модифицирована.

не упорядочивает область определения f, s вполне упорядочивает область значений f и для любых элементов u и v области определения f, удовлетворяющих условию urv, имеет место $f(u)sf(v)$.

94. Теорема. *Если $x \subset y$ и f является r — r-сохраняющей порядок функцией в y, заданной на x, то для каждого u из x ложно, что $f(u)ru$.*

Доказательство. Следует показать, что класс $\{u : u \in x \text{ и } f(u)ru\}$ пуст. Если бы это было не так, то в этом классе нашелся бы r-первый элемент v. Тогда $f(v)rv$ и, если urv, то $urf(u)$ или $u=f(u)$. Так как $f(v)rv$, то $f(v)rf(f(v))$ или $f(v)=f(f(v))$, но раз f r — r-сохраняет порядок, то $f(f(v))rf(v)$, что приводит к противоречию.

Таким образом, r — r-сохраняющая порядок функция не может перевести никакой элемент ее области определения в r-предшествующий ему.

Доказательства, которые подобно теореме 94 основываются на рассмотрении r-первого элемента, для которого нарушается утверждение теоремы, называются *доказательствами по индукции.*

95. Определение. *f является 1 — 1-функцией в том и только в том случае, когда и f и f^{-1} — функции.*

Это эквивалентно требованию, чтобы f было функцией и для любых двух различных элементов x и y ее области определения имело место $f(x) \neq f(y)$.

96. Теорема. *Если f r — s-сохраняет порядок, то f является 1 — 1-функцией, причем f^{-1} s — r-сохраняет порядок.*

Доказательство. Если $f(u)=f(v)$, то невозможно, чтобы было urv или vru, ибо тогда было бы $f(u)sf(v)$ или $f(v)sf(u)$. Значит, $u=v$ и f является 1 — 1-функцией. Пусть $f(u)sf(v)$; тогда $u \neq v$ и, если vru, то $f(v)sf(u)$, что приводит к противоречию. Значит, f^{-1} s — r-сохраняет порядок.

97. Теорема. *Если f и g r — s-сохраняют порядок, область определения f и область определения g являются r-секциями класса x, а область значений f и область значений g являются s-секциями класса y, то $f \subset g$ или $g \subset f$.*

Доказательство. В силу теоремы 92 либо (*область определения f*) $\subset$ (*область определения g*), либо (*область определения* g) $\subset$ (*область определения* f). Теорема будет доказана, если мы установим, что $f(u)=g(u)$ для всех u, принадлежащих и области определения f, и области определения g. Если класс $\{z : z \in$ (*область определения* f) $\cap$ (*область определения* g) *и* $g(z) \neq f(z)\}$ не пуст, то в нем существует r-первый элемент u. Тогда $f(u) \neq g(u)$, и можно предположить, что $f(u) s g(u)$. Так как область значений g является s-секцией, то $g(v)=f(u)$ для некоторого v из x, причем верно vru, поскольку g^{-1} сохраняет порядок. Но u — r-первая точка среди тех, в которых функции отличаются, значит, $f(v)=g(v)=f(u)$, что приводит к противоречию.

98. Определение. *f r — s-сохраняет порядок в x и y в том и только в том случае, когда r вполне упорядочивает x, s вполне упорядочивает y, f r — s-сохраняет порядок, область определения f является r-секцией класса x и область значений f является s-секцией класса y.*

Согласно теореме 97, если f и g r — s-сохраняют порядок в x и y, то $f \subset g$ или $g \subset f$.

99. Теорема. *Если r вполне упорядочивает x и s вполне упорядочивает y, то существует такая функция f, r — s-сохраняющая порядок в x и y, что либо (область определения f) $=x$, либо (область значений f) $=y$.*

Доказательство. Положим $f = \{(u, v) : u \in x$ *и для некоторой функции g, которая r — s-сохраняет порядок в x и y, $u \in$ (область определения g) и* $(u, v) \in g\}$. В силу предыдущей теоремы f — функция, причем легко видеть, что ее область определения является r-секцией класса x, а область значений является s-секцией класса y. Значит, f r — s-сохраняет порядок в x и y; остается показать, что либо (*область определения* f) $=x$, либо (*область значений* f) $=y$. Пусть ни одно из этих условий не выполняется. Тогда существует r-первый элемент u в классе $x \setminus$ (*область определения* f) и s-первый элемент v в классе $y \setminus$ (*область значений* f). Легко видеть, что функция $f \cup \{(u, v)\}$ r — s-сохраняет порядок в x и y. Тогда $(u, v) \in f$ в силу определения f и, значит, $u \in$ (*область определения* f). В этом заключено противоречие.

Можно в одном случае точно установить, какая из альтернатив, указанных в заключении предшествующей теоремы, выполняется: если x — множество, а y не является множеством, то в силу аксиомы подстановки равенство «(*область значений* f) $=y$» невозможно.

100. Теорема. *Если r вполне упорядочивает x, s вполне упорядочивает y, x — множество и y не является множеством, то существует единственная r — s-сохраняющая порядок в x и y функция, областью определения которой является x.*

ПОРЯДКОВЫЕ ЧИСЛА

В этом параграфе определяются порядковые числа и устанавливаются их основные свойства. До обсуждения порядковых чисел принимается еще одна аксиома.

Может à priori случиться, что класс x является единственным элементом класса y, а класс y является единственным элементом класса x. Вообще говоря, возможен класс z, каждый элемент которого содержит элементы класса z и только элементы этого класса. Следующая аксиома как раз и исключает эту возможность: накладывается требование, чтобы в каждом непустом классе z существовал элемент, никакой элемент которого не принадлежит классу z.

VII. Аксиома регулярности. *Если $x \neq 0$, то в классе x есть такой элемент y, что $x \cap y = 0$.*

101. Теорема. $x \notin x$.

Доказательство. Если $x \in x$, то x — непустое множество, причем x является единственным элементом класса $\{x\}$. В силу аксиомы регулярности существует $y \in \{x\}$, для которого $y \cap \{x\} = 0$; непременно $y = x$. Но тогда $y \in y \cap \{x\}$, откуда следует противоречие.

102. Теорема. *Ложно, что $x \in y$ и $y \in x$.*

Доказательство. Если $x \in y$ и $y \in x$, то x и y — множества, причем они являются единственными элементами класса $\{x : z = x$ *или* $z = y\}$. Применив аксиому регулярности к последнему классу, получаем противоречие так же, как при доказательстве предыдущей теоремы.

Можно, конечно, обобщить последнюю теорему на случай более чем двух множеств. В действительности из аксиомы регулярности вытекает следующий сильный