ляется множеством, то в силу аксиомы подстановки равенство «(*область значений* f) $=y$» невозможно.

100. Теорема. *Если r вполне упорядочивает x, s вполне упорядочивает y, x — множество и y не является множеством, то существует единственная r — s-сохраняющая порядок в x и y функция, областью определения которой является x.*

ПОРЯДКОВЫЕ ЧИСЛА

В этом параграфе определяются порядковые числа и устанавливаются их основные свойства. До обсуждения порядковых чисел принимается еще одна аксиома.

Может à priori случиться, что класс x является единственным элементом класса y, а класс y является единственным элементом класса x. Вообще говоря, возможен класс z, каждый элемент которого содержит элементы класса z и только элементы этого класса. Следующая аксиома как раз и исключает эту возможность: накладывается требование, чтобы в каждом непустом классе z существовал элемент, никакой элемент которого не принадлежит классу z.

VII. Аксиома регулярности. *Если $x \neq 0$, то в классе x есть такой элемент y, что $x \cap y=0$.*

101. Теорема. $x \notin x$.

Доказательство. Если $x \in x$, то x — непустое множество, причем x является единственным элементом класса $\{x\}$. В силу аксиомы регулярности существует $y \in \{x\}$, для которого $y \cap \{x\}=0$; непременно $y=x$. Но тогда $y \in y \cap \{x\}$, откуда следует противоречие.

102. Теорема. *Ложно, что $x \in y$ и $y \in x$.*

Доказательство. Если $x \in y$ и $y \in x$, то x и y — множества, причем они являются единственными элементами класса $\{x : z=x$ *или* $z=y\}$. Применив аксиому регулярности к последнему классу, получаем противоречие так же, как при доказательстве предыдущей теоремы.

Можно, конечно, обобщить последнюю теорему на случай более чем двух множеств. В действительности из аксиомы регулярности вытекает следующий сильный результат (интуитивное описание): не существует такой последовательности, что $x_{n+1} \in x_n$ при каждом n. Точную формулировку этого результата приходится отложить.

103. Определение. $E = \{(x, y) : x \in y\}$.

Класс E называется $\in$-*отношением*. Заметьте, что если $x \in y$ и y не является множеством, то $(x, y) = \mathfrak{U}$ в силу теоремы 54 и $(x, y) \notin E$.

104. Теорема. *E не является множеством.*

Доказательство. Если $E \in \mathfrak{U}$, то $\{E\} \in \mathfrak{U}$ и $(E, \{E\}) \in E$. Напоминаем, что $(x, y) = \{\{x\}\{xy\}\}$ и, если (x, y) — множество, то $z \in (x, y)$ тогда и только тогда, когда $z = \{x\}$ или $z = \{xy\}$. Следовательно, $E \in \{E\} \in \in \{\{E\}\{E\{E\}\}\} \in E$. Итак, имеем $a \in b \in c \in a$; применив аксиому регулярности к классу $\{x : x = a$, *или* $x = b$, *или* $x = c\}$, мы получаем противоречие.

Неформальное обсуждение строения нескольких первых порядковых чисел может прояснить соответствующие общие концепции*). Первым порядковым числом будет 0, следующим $1 = 0 \cup \{0\}$, следующим $2 = 1 \cup \{1\}$ и еще следующим $3 = 2 \cup \{2\}$. Заметьте, что 0 — единственный элемент класса 1, 0 и 1 — единственные элементы класса 2 и 0, 1, 2 — единственные элементы класса 3. Каждое порядковое число, предшествующее 3, является не только элементом, но и подмножеством класса 3. Порядковые числа определяются так, что этот весьма специальный тип строения сохраняется.

105. Определение**). *Класс x наполнен тогда и только тогда, когда каждый элемент класса x является его подмножеством.*

Иными словами, x наполнен в том и лишь в том случае, когда каждый элемент произвольного элемента класса x является элементом класса x. Другое эквива-

---

*) Наше обсуждение не совсем аккуратно — не доказано еще, что 0 является множеством. В действительности, это и нельзя вывести из имеющихся в нашем распоряжении аксиом. Существование множеств (и тот факт, что 0 является множеством) вытекает из аксиомы бесконечности, формулируемой в начале следующего параграфа.

**) Обычно говорят «полон», а не «наполнен», но термин «полон» раньше уже употреблялся в другом смысле.

лентное утверждение: x наполнен тогда и только тогда, когда E транзитивно в x.

Следующее определение принадлежит Р. Робинсону.

106. Определение. *x является ординалом в том и только в том случае, когда E связывает x и класс x наполнен.*

Это означает, что из любых двух элементов класса x один является элементом другого и каждый элемент произвольного элемента класса x принадлежит x.

107. Теорема. *Если x — ординал, то E вполне упорядочивает x.*

Доказательство. Если u и v — элементы класса x и uEv, то (теорема 102) ложно, что vEu; следовательно, E асимметрично в x. Пусть y — непустое подмножество класса x. Существует такой элемент $u \in y$, что $u \cap y = 0$. Тогда ни один элемент класса y не принадлежит u и u является E-первым элементом класса y.

108. Теорема. *Если x — ординал, $y \subset x$, $y \neq x$ и класс y наполнен, то $y \in x$.*

Доказательство. Если uEv и vEy, то uEy, ибо класс y наполнен. Значит, y — E-секция класса x. Следовательно, по теореме 91 в x существует такой элемент v, что $y = \{u : u \in x \text{ и } uEv\}$. Так как каждый элемент класса v является элементом класса x, то $y = \{u : u \in v\}$ и $y = v$.

109. Теорема. *Если x — ординал и y — ординал, то $x \subset y$ или $y \subset x$.*

Доказательство. Класс $x \cap y$ наполнен; в силу предшествующей теоремы либо $x \cap y = x$, либо $x \cap y \in x$. В первом случае $x \subset y$. Если $x \cap y \in x$, то $x \cap y \notin y$, так как в противном случае было бы $x \cap y \in x \cap y$. Так как $x \cap y \notin y$, то из предшествующей теоремы вытекает, что $x \cap y = y$. Значит, $y \subset x$.

110. Теорема. *Если x — ординал и y — ординал, то либо $x \in y$, либо $y \in x$, либо $x = y$.*

111. Теорема. *Если x — ординал и $y \in x$, то y — ординал.*

Доказательство. Ясно, что E связывает y, — ведь x наполнен, а E связывает x. Отношение E транзитивно на y, ибо E вполне упорядочивает x, а $y \subset x$.

Следовательно, если uEv и vEy, то uEy и, значит, класс y наполнен.

112. Определение. $R=\{x : x$ — *ординал*$\}$

113. Теорема*). *R — ординал и R не является множеством.*

Доказательство. Из двух последних теорем следует, что E связывает R и что класс R наполнен. Значит, R—ординал Если R—множество, то $R \in R$, что невозможно.

В силу теоремы 110 R — единственный ординал, не являющийся множеством.

114. Теорема. *Каждая E-секция класса R является ординалом.*

Доказательство. Если E-секция x класса R не равна R, то в силу теоремы 91 существует такой элемент $v \in R$, что $x=\{u : u \in R$ и $u \in v\}$. Так как каждый элемент класса v является ординалом, то $x=\{u : u \in v\}=v$.

115. Определение. *x — порядковое число в том и только в том случае, когда $x \in R$.*

116. Определение. *$x<y$ в том и только в том случае, когда $x \in y$.*

117. Определение. *$x \leqslant y$ в том и только в том случае, когда $x \in y$ или $x=y$.*

118. Теорема. *Если x и y — ординалы, то $x \leqslant y$ в том и только в том случае, когда $x \subset y$.*

119. Теорема. *Если x — ординал, то $x=\{y : y \in R$ и $y<x\}$.*

120. Теорема. *Если $x \subset R$, то $\bigcup x$ — ординал.*

Доказательство. E связывает $\bigcup x$ в силу теорем 110 и 111. Класс $\bigcup x$ наполнен, так как наполнены элементы класса x.

Нетрудно усмотреть, что если x — подмножество класса R, то $\bigcup x$ — первый ординал, больший каждого не равного ему элемента класса x, и что $\bigcup x$ будет множеством тогда и только тогда, когда x является множеством. Впрочем, эти результаты нам не понадобятся.

121. Теорема. *Если $x \subset R$ и $x \neq 0$, то $\bigcap x \in x$.*

В действительности, в этой ситуации $\bigcap x$ является E-первым элементом класса x.

---

*) Эта теорема составляет, по существу, содержание парадокса Бурали-Форти — исторически первого парадокса наивной теории множеств.

122. Определение. $x+1=x\cup\{x\}$.

123. Теорема. *Если $x\in R$, то $x+1$ — E-первый элемент класса $\{y: y\in R$ и $x<y\}$.*

Доказательство. Легко проверяется, что E связывает $x+1$ и что класс $x+1$ наполнен и, значит, является ординалом. Если существует такой класс u, что $x<u$ и $u<x+1$, то, так как x — множество и $u\in x\cup\{x\}$, либо $u\in x$ и $x\in u$, либо $u=x$ и $x\in u$. Однако ни одно из этих заключений выполняться не может (теоремы 101 и 102). Теорема доказана.

124. Теорема. *Если $x\in R$, то $\cup(x+1)=x$.*

125. Определение. $f|x=f\cap(x\times\mathfrak{U})$.

Мы будем пользоваться этим определением только тогда, когда f — отношение. В этом случае $f|x$ — тоже отношение; оно называется *сужением* f на x.

126. Теорема. *Если f — функция, то $f|x$ — функция, областью определения которой служит $x\cap$ (область определения f), причем $(f|x)(y)=f(y)$ для каждого y из области определения $f|x$.*

Заключительной теоремой параграфа об ординалах утверждается, что (интуитивно) можно задать функцию на ординале посредством правила, указывающего ее значение на каждом элементе области определения по ее значениям на предшествующих элементах. Несколько точнее, для произвольно заданной функции g существует единственная функция f, заданная на ординалах, такая, что $f(x)=g(f|x)$ для каждого порядкового числа x. Значение $f(x)$ вполне определено, таким образом, функцией g и значениями функции f на порядковых числах, предшествующих x.

Применение этой теоремы называется *определением функции по трансфинитной индукции.*

Доказательство выписанного выше утверждения похоже на доказательство теоремы 99; ту же роль играет предварительная лемма.

127. Теорема. *Пусть f — функция, областью определения которой является некоторый ординал, причем $f(u)=g(f|u)$, когда $u\in$ (область определения f). Если h — тоже такая функция, что область определения h есть некоторый ординал и $h(u)=g(h|u)$, когда $u\in$ (область определения h), то $h\subset f$ или $f\subset h$.*

Доказательство. Так как и область определения f, и область определения h являются ординалами, то можно предположить, что (*область определения* f) $\subset$ (*область определения* h) (иначе имеет место противоположное включение в силу теоремы 109). Остается доказать, что $f(u)=h(u)$, когда $u \in$ (*область определения* f). Предположим противное, и пусть u — E-первый элемент из области определения f, для которого $f(u) \neq h(u)$. Тогда $f(v)=h(v)$ для каждого ординала v, предшествующего u. Следовательно, $f|u=h|u$. Тогда $f(u)=g(f|u)=h(u)$, что ведет к противоречию.

128. Теорема. *Для каждого g существует единственная функция f такая, что область определения f есть ординал и $f(x)=g(f|x)$ для каждого порядкового числа x.*

Доказательство. Пусть $f=\{(u, v): u \in R$ *и существует такая функция* h, *что область определения* h *есть ординал*, $h(z)=g(h|z)$, *когда* $z \in$ (*область определения* h), *и* $(u, v) \in h\}$. Из предыдущей теоремы вытекает, что f — функция. Очевидно, область определения f является E-секцией класса R и, значит, есть ординал. Далее, если h — функция, заданная на некотором ординале, для которой $h(z)=g(h|z)$, когда $z \in$ (*область определения* h), то $h \subset f$ и, если $z \in$ (*область определения* f), то $f(z)=g(f|z)$.

Наконец, предположим, что $x \in R \setminus$ (*область определения* f). Тогда $f(x)=\mathfrak{U}$ по теореме 69 и, так как область определения f является множеством, то f — множество (теорема 75). Если $g(f|x)=g(f)=\mathfrak{U}$, то выполняется равенство $f(x)=g(f|x)$. В противном случае, $g(f)$ будет множеством (снова теорема 69). Тогда, если y — E-первый элемент класса $R \setminus$ (*область определения* f) и $h=f \cup \{(y, g(f))\}$, то область определения h является ординалом и $h(z)=g(h|z)$, когда $z \in$ (*область определения* h). Следовательно, $h \subset f$ и $y \in$ (*область определения* f), откуда получается противоречие. Следовательно, $g(f)=\mathfrak{U}$, и теорема доказана.

Механика этой теоремы заслуживает комментария. Если область определения f не есть R, то $g(f)=\mathfrak{U}$ и $f(x)=\mathfrak{U}$ для каждого порядкового числа x такого, что (*область определения* f) $\leqslant x$. Если $g(0)=\mathfrak{U}$, то $f=0$.