ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА *)

В этом параграфе определяются целые числа и в виде теорем доказываются постулаты Пеано. Исходя из этих постулатов, можно на основе целых чисел построить вещественные числа (см. Ландау [1]). При этом мы опираемся на два факта:

1) класс целых чисел является множеством (теорема 138),

2) законно определение функции на целых числах по индукции (теорема 0.13; последний факт можно представить также как следствие из теоремы 128).

Нужна еще одна аксиома.

VIII. Аксиома бесконечности. *Для некоторого y верно, что y — множество, $0 \in y$ и $x \cup \{x\} \in y$ всегда, когда $x \in y$.*

В частности, 0 является множеством, так как 0 содержится в множестве.

129. Определение. *x является целым числом в том и только в том случае, когда x — ординал, и E^{-1} вполне упорядочивает x.*

130. Определение. *x является E-последним элементом класса y в том и только в том случае, когда x является E^{-1}-первым элементом класса y.*

131. Определение. $\omega = \{x : x$ — *целое число*$\}$.

132. Теорема. *Произвольный элемент целого числа является целым числом.*

Доказательство. Каждый элемент целого числа x является ординалом и подмножеством класса x, причем E^{-1} вполне упорядочивает x.

133. Теорема. *Если $y \in R$ и x — E-последний элемент класса y, то $y = x+1$.*

Доказательство. В силу теоремы 123 $x+1$ является E-первым элементом класса $\{z : z \in R$ и $x < z\}$. Отсюда $x+1 \leqslant y$, ибо $y \in R$ и $x < y$. Так как x является E-последним элементом класса y и $x < x+1$, то ложно, что $x+1 < y$.

134. Теорема. *Если $x \in \omega$, то $x+1 \in \omega$.*

---

*) Имеются в виду неотрицательные целые числа.

135. Теорема. $0 \in \omega$, *и если* $x \in \omega$, *то* $0 \neq x+1$.

Иными словами, 0 не является преемником никакого целого числа.

136. Теорема. *Если x и y — элементы класса ω и $x+1=y+1$*, то $x=y$.

Доказательство. В силу теоремы 124, если $x \in R$, то $\bigcup(x+1)=x$.

Следующая теорема представляет собой *принцип математической индукции.*

137. Теорема. *Если $x \subset \omega$, $0 \in x$ и $u+1 \in x$ всегда, когда $u \in x$, то $x=\omega$.*

Доказательство. Пусть $x \neq \omega$. Обозначим через y E-первый элемент класса $\omega \setminus x$ и заметим, что $y \neq 0$. Так как $y \subset y+1$ и $y+1$ — целое число, то в y существует E-последний элемент u; ясно, что $u \in x$. Тогда в силу теоремы 123 $y=u+1$; значит, $y \in x$. Получили противоречие.

Теоремы 134, 135, 136 и 137 представляют собой аксиомы Пеано для целых чисел. Следующая теорема означает, в частности, что ω — множество.

138. Теорема. $\omega \in R$.

Доказательство. В силу аксиомы бесконечности существует такое множество y, что $0 \in y$, и если $x \in y$, то $x+1 \in y$. По принципу математической индукции (т. е. по предыдущей теореме) $\omega \cap y=\omega$. Значит, ω — множество, ибо $\omega \subset y$. Так как класс ω состоит из порядковых чисел, то E связывает ω; класс ω наполнен, поскольку каждый элемент целого числа является целым числом.

АКСИОМА ВЫБОРА

Мы сформулируем теперь последнюю аксиому и выведем два сильных следствия.

139. Определение. *c является функцией выбора в том и только в том случае, когда c — функция и $c(x) \in x$ для каждого элемента x из области определения c.*

Интуитивно, функция выбора реализует выбор по элементу из каждого множества, принадлежащего области определения c.

Следующее условие — постулат Цермело в сильной формулировке, или аксиома выбора.