135. Теорема. $0 \in \omega$, *и если* $x \in \omega$, *то* $0 \neq x+1$.

Иными словами, 0 не является преемником никакого целого числа.

136. Теорема. *Если x и y — элементы класса ω и $x+1=y+1$*, то $x=y$.

Доказательство. В силу теоремы 124, если $x \in R$, то $\bigcup (x+1)=x$.

Следующая теорема представляет собой *принцип математической индукции.*

137. Теорема. *Если* $x \subset \omega$, $0 \in x$ *и* $u+1 \in x$ *всегда, когда* $u \in x$, *то* $x=\omega$.

Доказательство. Пусть $x \neq \omega$. Обозначим через y E-первый элемент класса $\omega \setminus x$ и заметим, что $y \neq 0$. Так как $y \subset y+1$ и $y+1$ — целое число, то в y существует E-последний элемент u; ясно, что $u \in x$. Тогда в силу теоремы 123 $y=u+1$; значит, $y \in x$. Получили противоречие.

Теоремы 134, 135, 136 и 137 представляют собой аксиомы Пеано для целых чисел. Следующая теорема означает, в частности, что ω — множество.

138. Теорема. $\omega \in R$.

Доказательство. В силу аксиомы бесконечности существует такое множество y, что $0 \in y$, и если $x \in y$, то $x+1 \in y$. По принципу математической индукции (т. е. по предыдущей теореме) $\omega \cap y=\omega$. Значит, ω — множество, ибо $\omega \subset y$. Так как класс ω состоит из порядковых чисел, то E связывает ω; класс ω наполнен, поскольку каждый элемент целого числа является целым числом.

АКСИОМА ВЫБОРА

Мы сформулируем теперь последнюю аксиому и выведем два сильных следствия.

139. Определение. *c является функцией выбора в том и только в том случае, когда c — функция и $c(x) \in x$ для каждого элемента x из области определения c.*

Интуитивно, функция выбора реализует выбор по элементу из каждого множества, принадлежащего области определения c.

Следующее условие — постулат Цермело в сильной формулировке, или аксиома выбора.

IX. Аксиома выбора. *Существует функция выбора c, областью определения которой является $\mathfrak{U}\setminus\{0\}$.*

Функция c выбирает по элементу из каждого непустого множества.

140. Теорема. *Для любого множества x существует взаимно однозначная функция, областью значений которой служит x, а областью определения является некоторое порядковое число.*

Доказательство. Доказательство состоит в построении искомой функции по трансфинитной индукции. Обозначим через g функцию, для которой $g(h)=$ $=c$ ($x\setminus$(*область значений* h)), где h — любое множество, а c — функция выбора, описанная в аксиоме выбора. В силу теоремы 128 существует такая функция f, что область определения f есть некоторый ординал и $f(u)=$ $=g(f|u)$ для каждого порядкового числа u. Тогда $f(u)=$ $=c$ ($x\setminus$(*область значений* $(f|u)$)), и если $u\in$ (*область определения* f), то $f(u)\in x\setminus$(*область значений* $(f|u)$). Но f является взаимно однозначной функцией, ибо если $f(v)=f(u)$ и $u<v$, то $f(v)\in$ (*область значений* $(f|v)$), а это противоречит тому, что $f(v)\in x\setminus$(*область значений* $(f|v)$). Так как f — взаимно однозначная функция, то равенство «(*область определения* f)$=R$» невозможно. В самом деле, f^{-1} — функция, область определения которой является подклассом класса x, а значит, множеством. Отсюда следует, что область значений f^{-1} является множеством в силу аксиомы подстановки, а R не является множеством. Следовательно, (*область определения* f)$\in R$. Так как (*область определения* f) $\notin$ (*область определения* f), то f(*область определения* f)$=\mathfrak{U}$ *) и, значит, c($x\setminus$(*область значений* f))$=\mathfrak{U}$. Так как область определения c есть $\mathfrak{U}\setminus\{0\}$, то $x\setminus$(*область значений* f)$=$ $=0$. Отсюда сразу следует, что функция f искомая.

141. Определение. *n является гнездом в том и только в том случае, когда из того, что x и y являются элементами класса n, следует, что $x\subset y$ или $y\subset x$.*

Следующий результат понадобится в доказательстве теоремы 143.

---

*) См. определение 68 и теорему 69. (*Прим. перев.*)

142. Теорема. *Если n — гнездо и каждый элемент класса n является гнездом, то $\bigcup n$ — гнездо.*

Доказательство. Если $x \in m$, $m \in n$, $y \in p$ и $p \in n$, то либо $m \subset p$, либо $p \subset m$, ибо n — гнездо. Предположим, что $m \subset p$. Тогда $x \in p$ и $y \in p$ и, так как p — гнездо, то либо $x \subset y$, либо $y \subset x$.

Следующая теорема — *принцип максимальности Хаусдорфа.* Утверждается существование максимального гнезда в любом множестве. Доказательство ее тесно связано с доказательством теоремы 140.

143. Теорема. *Для любого множества x существует такое гнездо n, что $n \subset x$, и если m — гнездо, $m \subset x$ и $n \subset m$, то $m = n$.*

Доказательство. Доказательство будем вести по трансфинитной индукции. Интуитивное его описание: мы берем какое-нибудь гнездо, затем большее гнездо и продолжаем действовать таким образом в уверенности, что, поскольку R не является множеством, множество всех гнезд, содержащихся в x, истощится раньше, чем класс R ординалов. Для каждого h положим $g(h) = c(\{m : m$ *— гнездо,* $m \subset x$ *и для* p *из области значений* h $p \subset m$ *и* $p \neq m\})$, где c — функция выбора, удовлетворяющая аксиоме выбора. (Интуитивно, в качестве $g(h)$ возьмем какое-нибудь гнездо в x, содержащее в качестве собственной части любое ранее выбранное гнездо.) В силу теоремы 128 существует такая функция f, что область определения f представляет собой некоторый ординал и $f(u) = g(f|u)$ для каждого порядкового числа u. Из определения g вытекает, что если $u \in$ (*область определения* f), то $f(u) \subset x$ и $f(u)$ — гнездо, причем если u и v — такие элементы области определения f, что $u < v$, то $f(u) \subset f(v)$ и $f(u) \neq f(v)$. Следовательно, f — взаимно однозначная функция, f^{-1} — функция, и так как x — множество, то (*область определения* f) $\in R$. Раз f(*область определения* f) $= \mathfrak{U}$, то $g(f) = \mathfrak{U}$. Следовательно, не существует гнезда m, содержащегося в x и строго содержащего каждый элемент области значений f. Наконец, $\bigcup$ (*область значений* f) — гнездо, которое содержит каждый элемент области значений f. Следовательно, не существует гнезда m, содержащегося в x и строго содержащего $\bigcup$ (*область значений* f).