КАРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

В этом параграфе определяются кардинальные числа и доказываются их наиболее часто применяемые свойства. Доказательства очень тесно связаны с предшествующими результатами.

144. Определение. *$x \approx y$ в том и только в том случае, когда существует взаимно однозначная функция f, для которой (область определения f) $= x$ и (область значений f) $= y$.*

Если $x \approx y$, то говорят, что (класс) x *эквивалентен* (классу) y или что x и y *равномощны.*

145. Теорема. $x \approx x$.

146. Теорема. *Если $x \approx y$, то $y \approx x$.*

147. Теорема. *Если $x \approx y$ и $y \approx z$, то $x \approx z$.*

148. Определение. *x является кардинальным числом в том и только в том случае, когда x — порядковое число и из того, что $y \in R$ и $y < x$, следует, что $x \approx y$ ложно.*

Таким образом, кардинальное число — это такое порядковое число, которое не эквивалентно никакому меньшему порядковому числу.

149. Определение. $C = \{x : x$ — *кардинальное число*$\}$.

150. Теорема. *E вполне упорядочивает C.*

151. Определение. $P = \{(x, y) : x \approx y$ *и* $y \in C\}$.

Класс P состоит из всех пар (x, y), где x — множество и y — кардинальное число, эквивалентное x. Кардинальное число $P(x)$, где x — любое множество, называется *мощностью* множества x, или *кардиналом* этого множества.

Основные факты, лежащие в основе следующего ряда утверждений, уже сообщены нами.

152. Теорема. *P является функцией, (область определения P) $= \mathcal{U}$ и (область значений P) $= C$.*

Доказательство. Решающую роль в доказательстве играет теорема 140.

153. Теорема. *Если x — множество, то $P(x) \approx x$.*

154. Теорема. *Если x и y — множества, то $x \approx y$ в том и только в том случае, когда $P(x) = P(y)$.*

155. Теорема. $P(P(x)) = P(x)$.

Доказательство. Если x не является множеством, то $P(x)=\mathfrak{U}$ в силу теоремы 69 и $P(\mathfrak{U})=\mathfrak{U}$.

156. Теорема. *$x \in C$ в том и только в том случае, когда x — множество и $P(x)=x$.*

157. Теорема. *Если $y \in R$ и $x \subset y$, то $P(x) \leqslant y$.*

Доказательство. В силу теоремы 99 существует взаимно однозначная функция f, которая $E-E$-сохраняет порядок в x и R и такая, что либо (*область определения* $f)=x$, либо (*область значений* $f)=R$. Так как x — множество, а R не является множеством, то (*область определения* $f)=x$. В силу теоремы 94 $f(u) \leqslant u$, когда $u \in x$; следовательно, x эквивалентно некоторому порядковому числу, меньшему y или равному y.

158. Теорема. *Если y — множество и $x \subset y$, то $P(x) \leqslant P(y)$.*

Следующее утверждение — теорема Шредера — Бернштейна *). Ее можно доказать прямо, не пользуясь аксиомой выбора (теорема 0.20).

159. Теорема. *Если x и y — множества, $u \subset x$, $v \subset y$, $x \approx v$ и $y \approx u$, то $x \approx y$.*

Доказательство. В силу теоремы 157 $P(x)=$ $=P(v) \leqslant P(y)=P(u) \leqslant P(x)$.

160. Теорема. *Пусть f — функция, причем f — множество; тогда P(область значений $f) \leqslant P$(область определения f).*

Доказательство. Пусть функция f отображает x на y и c — функция выбора, удовлетворяющая аксиоме выбора. Тогда существует такая функция g, что (*область определения* $g)=y$ и $g(v)=c(\{u: v=f(u)\})$ для $v \in y$. Следовательно, y эквивалентно подмножеству множества x.

Ниже излагается классическая теорема Кантора.

161. Теорема. *Для любого множества x имеет место $P(x)<P(2^x)$.*

Доказательство. Функция, область определения которой есть x, а значение на произвольном элементе u класса x равно $\{u\}$, является взаимно однозначной функцией. Следовательно, x эквивалентно некоторому

---

*) Эта теорема чаще называется теоремой Кантора — Бернштейна. (*Прим. перев.*)

подмножеству множества 2^x и $P(x) \leqslant P(2^x)$. Если $P(x) = P(2^x)$, то существует взаимно однозначная функция f с областью определения x и областью значений 2^x. Найдется такой элемент u класса x, что $f(u) = \{v : v \in x$ и $v \notin f(v)\}$. Но тогда $u \in f(u)$ тогда и только тогда, когда $u \notin f(u)$, в чем заключается противоречие.

Предшествующее рассуждение похоже по построению на парадокс Рассела.

162. Теорема. *C не является множеством.*

Доказательство. Если C — множество, то $\bigcup C$ — множество, $P(2^{\bigcup C}) \in C$ и, следовательно, $P(2^{\bigcup C}) \subset \bigcup C$. Значит, $P(2^{\bigcup C}) \leqslant P(\bigcup C)$, что ведет к противоречию.

После некоторых приготовлений мы разобьем кардинальные числа на два класса: конечные кардинальные числа и бесконечные кардинальные числа — и докажем для каждого класса несколько специальных свойств.

163. *Если $x \in \omega$, $y \in \omega$ и $x+1 \approx y+1$, то $x \approx y$.*

Доказательство. Пусть f — взаимно однозначная функция, отображающая $x+1$ на $y+1$; тогда существует взаимно однозначная функция g, отображающая $x+1$ на $y+1$ и такая, что $g(x) = y$; в качестве g годится, например, $(f \setminus (\{(x, f(x))\} \cup \{(f^{-1}(y), y)\})) \cup \cup \{(f^{-1}(y), f(x))\} \cup \{(x, y)\}$. Тогда $g|x$ — взаимно однозначная функция, заданная на x, с y в качестве множества значений.

164. Теорема. $\omega \subset C$.

Доказательство. Доказательство ведется по индукции. Применим предыдущую теорему к первому целому числу, эквивалентному меньшему целому числу, и получим противоречие. Это означает, что каждое целое число является кардинальным числом.

165. Теорема. $\omega \in C$.

Доказательство. Если $\omega \approx x$ и $x \in \omega$, то $x \subset x + 1 \subset \omega$ и, значит, $P(x+1) = P(x)$. Это противоречит предыдущей теореме, в которой утверждается, что каждое целое число является кардинальным числом.

166. Определение. *Класс x конечен в том и только в том случае, когда $P(x) \in \omega$.*

167. Теорема. *Класс x конечен в том и только в том случае, когда существует такое r, что как r, так и r^{-1} вполне упорядочивает x.*

Доказательство. Если $P(x) \in \omega$, то и E и E^{-1} вполне упорядочивают $P(x)$, а так как $x \approx P(x)$, то не составляет труда найти такое r, что r и r^{-1} вполне упорядочивают x. Обратно, если r и r^{-1} вполне упорядочивают x, то в силу теоремы 99 существует взаимно однозначная функция f, которая r — E-сохраняет порядок в x и R и такая, что либо (*область определения* f) $= x$, либо (*область значений* f) $= R$. Если $\omega \subset$ (*область значений* f), то r^{-1} не вполне упорядочивает x, ибо в ω нет E-последнего элемента. Следовательно, (*область значений* f) $\in \omega$, (*область определения* f) $= x$, откуда и вытекает наша теорема.

Каждую из следующего ряда теорем о конечных множествах можно доказать по индукции относительно мощности множества или построением подходящего вполне упорядочения с последующей ссылкой на теорему 167. Будут даны примеры доказательств каждого из этих типов.

168. Теорема. *Если x и y конечны, то $x \cup y$ конечно.*

Доказательство. Пусть r и r^{-1} вполне упорядочивают x, а s и s^{-1} вполне упорядочивают y. Беря r на точках из x, s на точках из $y \setminus x$ и полагая, что каждый элемент класса $y \setminus x$ следует за каждым элементом класса x, можно построить подходящее упорядочение на $x \cup y$.

169. Теорема. *Если x конечен и каждый элемент класса x конечен, то и класс $\bigcup x$ конечен.*

Доказательство. Можно провести рассуждение по индукции относительно $P(x)$. А именно, рассмотрим множество s всех таких целых чисел u, что если $P(x) = u$ и каждый элемент класса x конечен, то и класс $\bigcup x$ конечен. Ясно, что 0 принадлежит множеству s. Если $u \in s$, $P(x) = u + 1$ и каждый элемент класса x конечен, то можно разбить x на два множества, одно из которых имеет мощность u, а другое содержит лишь один элемент. Из предположения индукции в силу предшествующей теоремы следует, что класс $\bigcup x$ конечен. Значит, $s = \omega$.

170. Теорема. *Если x и y конечны, то и класс $x \times y$ конечен.*

Доказательство. Класс $x \times y$ является объединением элементов некоторого конечного класса; эти элементы имеют вид $\{v\} \times y$, где $v \in x$.

171. Теорема. *Если класс x конечен, то и класс 2^x конечен.*

Доказательство. Пусть y — целое число. Тогда подмножества множества $y+1$ можно разбить на два класса: те, которые являются подмножествами множества y, и те, которые являются объединением некоторого подмножества множества y и $\{y\}$. Это дает необходимую основу для индуктивного доказательства теоремы.

172. Теорема. *Если класс x конечен, $y \subset x$ и $P(y) = P(x)$, то $x = y$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда x — целое число. Предположим, что $y \subset x$, $y \neq x$, $P(y) = x$ и $x \in \omega$. Тогда $x \neq 0$ и, значит, $x = u+1$ для некоторого целого числа u. Так как $y \neq x$, то найдется подмножество класса u, эквивалентное y; значит, $P(y) \leqslant u$. Но $P(y) = x = u+1$, а это противоречит тому, что каждое целое число является кардинальным.

Обнаруженный теоремой 172 факт неэквивалентности конечного множества никакому его собственному подмножеству в действительности характеризует конечные множества.

173. Теорема. *Если x — множество, причем не конечное, то существует такое подмножество y множества x, что $y \neq x$ и $x \approx y$.*

Доказательство. Так как x — множество, причем не конечное, то $\omega \subset P(x)$. Существует функция f, заданная на $P(x)$, такая, что $f(u) = u+1$ при $u \in \omega$ и $f(u) = u$ при $u \in P(x) \setminus \omega$. Это взаимно однозначная функция, причем (*область значений* f) $= P(x) \setminus \{0\}$. Так как $P(x) \approx x$, то утверждение теоремы ясно.

174. Теорема. *Если $x \in R \setminus \omega$, то $P(x+1) = P(x)$.*

Доказательство. Ясно, что $P(x) \leqslant P(x+1)$. Так как множество x не конечно, то в нем найдется такое подмножество u, что $u \neq x$ и $u \approx x$. Следовательно, существует взаимно однозначная функция f на $x+1$ такая, что $f(y)\in u$ при $y\in x$ и $f(x)\in x\setminus u$. Значит, $P(x+1)\leqslant \leqslant P(x)$.

Главная из оставшихся нам теорем связана с порядком, который предстоит задать на декартовом произведении $R\times R$. Может оказаться полезным интуитивное описание этого порядка. Это вполне упорядочение с тем свойством на $\omega\times\omega$, что класс всех предшественников произвольного элемента (x, y) из $\omega\times\omega$ конечен (некоторое обобщение этого факта представляет собой ключ к объяснению ценности предлагаемого порядка). Изобразим $\omega\times\omega$ как подмножество евклидовой плоскости и разобьем его на классы: пары (x, y) и (u, v) относятся к одному классу, если максимум x и y совпадает с максимумом u и v. Тогда каждый класс представляется двумя сторонами квадрата; упорядочение устроено так, что точки меньших квадратов предшествуют точкам больших. На точках, принадлежащих сторонам одного квадрата, упорядочение соответствует движению по верхнему краю вплоть до угловой точки, но исключая ее, с последующим перемещением снизу вверх по второй стороне до угловой точки включительно.

Когда x и y — ординалы, наибольшим из них является $x\cup y$. Этим мотивируется следующее определение.

175. Определение. $\max[x, y]=x\cup y$.

176. Определение. $\ll=\{z$: *для некоторого* $(u, v)\in \in R\times R$ *и некоторого* $(x, y)\in R\times R$ $z=((u, v), (x, y))$ *и* $\max[u, v]<\max[x, y]$, *или* $\max[u, v]=\max[x, y]$ *и* $u<x$, *или* $\max[u, v]=\max[x, y]$ *и* $u=x$ *и* $v<y\}$.

177. Теорема. *$\ll$ вполне упорядочивает $R\times R$.*

Доказательство заключается в прямом, но громоздком применении определения и того факта, что $<$ вполне упорядочивает R.

178. Теорема. *Если* $(u, v)\ll(x, y)$, *то* $(u, v)\in \in(\max[x, y]+1)\times(\max[x, y]+1)$.

Доказательство. Ясно, что $\max[u, v]\leqslant \leqslant\max[x, y]$; значит, $\max[u, v]\subset\max[x, y]$. Ординалы u и v являются подмножествами класса $\max[x, y]$, поэтому они являются элементами класса $\max[x, y]+1$.

179. Теорема. *Если* $x\in C\setminus\omega$, то $P(x\times x)=x$.

Доказательство. Будем рассуждать по индукции. Пусть x — первый элемент класса $C\setminus\omega$, для которого теорема неверна. В силу теоремы 99 существует функция f, которая $\ll$—E-сохраняет порядок в $x\times x$ и R и такая, что либо (*область определения* $f)=x\times x$, либо (*область значений* $f)=R$. Так как $x\times x$ — множество, а R множеством не является, то (*область определения* $f)=$ $=x\times x$. Мы покажем, что если $(u, v)\in x\times x$, то $f((u, v))<x$, откуда и будет следовать теорема. В силу предыдущей теоремы класс всех элементов, предшествующих (u, v), является подмножеством класса $(\max[u, v]+1)\times(\max[u, v]+1)$. Если $x=\omega$, то u и v конечны, ибо $\max[u, v]<x$ в силу теоремы 170. Множество $(\max[u, v]+1)\times(\max[u, v]+1)$ конечно; следовательно, у $f((u, v))$ есть только конечное число предшественников и $f((u, v))<x$. Если $x\neq\omega$ и $\max[u, v]$ не конечен, то $P(\max[u, v]+1)=P(\max[u, v])<x$ в силу теоремы 174. Значит, $P(f((u, v)))<x$ и $f((u, v))<x$.

180. Теорема. *Пусть хотя бы один из элементов x и y класса C не принадлежит ω. Тогда $P(x\times y)=$ $=\max[P(x), P(y)]$.*

Элементы класса $C\setminus\omega$ называются *бесконечными*, или *трансфинитными*, кардинальными числами.

Кардинальные числа являются объектом многих важных и полезных теорем, не нашедших места в этой книге. Дальнейшие сведения и ссылки можно найти, например, в книге Френкеля [1]. Наше обсуждение завершается краткой постановкой одной из классических нерешенных проблем теории множеств.

181. Теорема. *Существует единственная $<$—$<$-сохраняющая порядок функция с областью определения R и областью значений $C\setminus\omega$.*

Доказательство. В силу теоремы 99 существует единственная функция f, $<$—$<$-сохраняющая порядок в R и $C\setminus\omega$, такая, что либо (*область определения* $f)=R$, либо (*область значений* $f)=C\setminus\omega$. Так как каждая E-секция класса R и каждая E-секция класса $C\setminus\omega$ является множеством и ни R, ни $C\setminus\omega$ не являются множествами, то невозможно, чтобы было (*область определения* $f)\neq R$ или (*область значений* $f)\neq C\setminus\omega$.

Однозначно определенная $<$—$<$-сохраняющая порядок функция, существование которой гарантирует предыдущая теорема, обычно обозначается через $\aleph$. Таким образом, $\aleph(0)$ (или $\aleph_0$) есть ω. Следующее кардинальное число $\aleph_1$ часто обозначается через Ω: это первое несчетное порядковое число. Так как $P(2^{\aleph_0}) > \aleph_0$, то отсюда следует, что $P(2^{\aleph_0}) \geqslant \aleph_1$. Равенство последних двух кардинальных чисел — чрезвычайно привлекательная гипотеза. Она называется *гипотезой континуума. Обобщенная гипотеза континуума* состоит в следующем: если x — порядковое число, то $P(2^{\aleph_x}) = \aleph_{x+1}$. Ни одна из этих гипотез не доказана и не опровергнута. Однако Гёдель [1] доказал прекрасную математическую теорему: если, отправляясь от континуум-гипотезы, можно прийти к противоречию, то можно построить противоречие и не прибегая к континуум-гипотезе. Таково же в основном положение с обобщенной гипотезой континуума и аксиомой выбора *).

---

*) Недавно (1963 г.) П. Коэн [1] доказал независимость континуум-гипотезы и аксиомы выбора в системе аксиом Цермело — Френкеля теории множеств. (*Прим. перев.*)