ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Книга Келли «Общая топология» является очень популярным руководством по общей топологии; книга может служить, во-первых, учебником для лиц, желающих систематически овладеть основами этой области математики, и, во-вторых, справочным пособием для многочисленных категорий математиков, сталкивающихся в своей работе с теми или иными понятиями или теоремами, относящимися к топологическим пространствам, их непрерывным отображениям, равномерной топологии и т. д.

Общетопологические концепции и факты заняли в последнее время большое место в самых разнообразных областях математики, и поэтому книга такого типа, как книга Келли, стала нужна очень многим математикам весьма различных специальностей. В этом — первая причина успеха названной книги. Вторая причина связана с тем, что в огромном множестве определений и фактов, составляющем современную общую топологию, автору учебника необходимо сделать тот или иной, но достаточно строгий выбор: нельзя объять необъятное. Выбор, сделанный Келли примерно тринадцать лет назад, был сделан удачно, вернее, вниманию читателя предложен один из удачных вариантов такого выбора (я думаю, впрочем, что если бы автор писал свою книгу не в 1950—1953 гг., а в 1965—1968 гг., то отбор основных фактов для учебника был бы иногда несколько иным, что и естественно в применении к быстро развивающейся области математики). Но несомненно, что и сейчас, как и десять лет тому назад, книга Келли может хорошо выполнять те основные свои назначения, о которых сказано выше. Поэтому перевод ее на русский язык вполне целесообразен, и многочисленные настойчивые пожелания осуществить, наконец, этот перевод раздаются среди советских математиков уже не первый год.

Автор перевода — А. В. Архангельский — является не только одним из лучших знатоков современной общей топологии, но и, несомненно, одним из тех математиков молодого поколения, которым эта область науки обязана многими из самых лучших и самых ярких своих достижений за последние годы. Если к этому прибавить, что А. В. Архангельский обладает даром излагать свои мысли легким и весьма современным (на мой взгляд, иногда даже слишком современным!) языком, то надо думать, что выбор переводчика сделан удачно. Это суждение вполне подтверждается и при подробном знакомстве с переводом: он не только точно передает содержание подлинника, но и сохраняет общий литературный стиль его. Поэтому весь перевод представляется мне удачным.

Теперь — краткий обзор содержания книги. Она открывается вводной главой (имеющей порядковый номер нуль), в которой собраны определения и элементарные предложения, касающиеся таких понятий, как множество, подмножество, отношение, функция (отображение одного множества в другое), порядок, а также простейшие понятия алгебраического характера: группа, гомоморфизм, кольцо, идеал и т. п. В этой же главе идет речь о действительных числах, а также о счетных множествах, кардинальных числах (мощностях) и порядковых числах. Следует заметить, что аксиоматически построенному элементарному введению в абстрактную теорию множеств посвящено еще специальное Добавление в конце книги. Наконец, в той же «нулевой» главе содержится и хаусдорфов принцип максимума (эквивалентный принципу трансфинитной индукции и принципу Куратовского о возможности исключения трансфинитных чисел из математических рассуждений); принцип этот в свое время (1922 г.) произвел большое впечатление.

В первой главе излагаются элементарные свойства топологических пространств: открытые множества (лежащие, как обычно, в основе определения), окрестности (определенные по Бурбаки, а не согласно классическому определению Хаусдорфа), точки накопления (почему-то предпочтенные принятым у нас точкам прикосновения), замкнутые множества, базы и т. д. — обычный материал! Здесь же, естественно, излагается и понятие связности.

Вторая глава посвящена сходимости по направленному множеству (в Америке принято название «сходимость Мора — Смита»; в книге Келли дана ссылка на работу этих авторов 1922 г.). Следовало бы помнить, что это самое понятие на два десятилетия ранее было открыто талантливым одесским математиком С. О. Шатуновским. На мой взгляд, следует очень приветствовать, что сходимость по направленному множеству (в частности, такое трудное понятие, как «подпоследовательность по направленному множеству») подверглась в книге тщательному исследованию. Английский термин *net* кажется мне очень неудачным; русский термин «последовательность по направленному множеству» слишком длинен. Переводчик предлагает — быть может, несколько компромиссный — термин «направленность»; вероятно, это — лучший выход из положения.

Третья глава посвящена топологическим произведениям (А. Н. Тихонов) и фактор-пространствам, а следовательно, и фактор-отображениям. Фактор-отображения, введенные автором этого предисловия в совместной книге с Хопфом ([1], стр. 65), приобретают в новейшее время все возрастающее значение в топологии. В частности, весьма замечательные исследования, касающиеся этих отображений, принадлежат самому А. В. Архангельскому. Специальными случаями фактор-отображений являются как замкнутые, так и открытые отображения, и исследования А. В. Архангельского, в частности, освещают взаимные связи, существующие между этими и другими классами фактор-отображений. Эти исследования А. В. Архангельского составляют часть новой главы общей топологии, которую естественно назвать «общей теорией непрерывных отображений топологических пространств». После уже упомянутого введения понятия фактор-отображения, а также замкнутого отображения в книге П. С. Александрова и Хопфа, первые результаты по общей теории непрерывных отображений получены в Москве И. А. Вайнштейном. В последние годы эта теория развивалась стремительно и очень интересно главным образом в работах талантливых молодых советских топологов: А. В. Архангельского, Б. А. Пасынкова, В. И. Пономарева (в работах последнего существенное развитие получила, в частности, теория неприводимых совершенных отображений, см. [3], [6]). К этой же области относятся очень интересные работы американских математиков: Глисона (предваряющие часть основных результатов Пономарева), Стоуна, Майкла, Исбелла и др., английского тополога Даукера, а также работы японских ученых: Морита и его учеников. Замечательная факторизационная теорема принадлежит югославскому математику С. Мардешичу.

Выделение фактор-отображений как одного из важнейших классов непрерывных отображений является удачной особенностью книги Келли, хотя в этой книге о фактор-отображениях сообщаются лишь самые элементарные сведения. Это естественно — все развитие теории произошло в конце пятидесятых и в начале шестидесятых годов, т. е. уже после выхода книги Келли.

В четвертой главе доказываются классические теоремы Урысона и Тихонова о погружении вполне регулярных пространств в соответствующие «кирпичи» — гильбертов и тихоновский, т. е. в топологическое (тихоновское) произведение счетного, соответственно, любого множества отрезков. В этой же главе доказываются и метризационные теоремы Бинга и Нагата — Смирнова и метризационная теорема Урысона как их частный случай. Здесь же вводится понятие псевдометрического пространства. Не могли получить отражения в книге метризационные теоремы совершенно нового типа, доказанные в начале шестидесятых годов П. С. Александровым и А. В. Архангельским.

Пятая глава посвящена теории бикомпактных пространств. Несколько удивляет отсутствие теоремы, характеризующей бикомпакты (бикомпактные хаусдорфовы пространства) как регулярные пространства, замкнутые во всяком объемлющем хаусдорфовом пространстве. Не упоминается и знаменитая теорема Стоуна, характеризующая бикомпакты как те хаусдорфовы пространства, все замкнутые подмножества которых абсолютно замкнуты, т. е. замкнуты во всяком объемлющем хаусдорфовом пространстве. Сама эта «абсолютная» замкнутость (теперь предпочитают говорить «*H*-замкнутость») упоминается лишь мимоходом; в частности, остаются в стороне работы М. Катетова и др.

Центральной теоремой главы заслуженно является классическая теорема А. Н. Тихонова о бикомпактности топологического произведения любого числа бикомпактных пространств. На мой взгляд, слишком бегло освещены бикомпактные расширения. Впрочем, это объясняется тем, что основная теорема Ю. М. Смирнова, связывающая бикомпактные расширения с пространствами близости, и основывающаяся на этой теореме последующая работа П. С. Александрова и В. И. Пономарева, перефразирующая теорему Ю. М. Смирнова так, что она превращается в способ построения всех бикомпактных расширений данного вполне регулярного пространства методом центрированных систем открытых множеств, уже не могли оказаться в сфере внимания автора, когда он писал свою книгу. То же относится и к очень интересным работам Е. Г. Скляренко. Однако метод центрированных систем открытых множеств, найденный и примененный еще в 1939 г. П. С. Александровым к построению максимального бикомпактного расширения (расширения Стоуна — Чеха) и явившийся основой многих дальнейших исследований (С. В. Фомина, частично Ю. М. Смирнова, В. И. Пономарева, С. Илиадиса и др.), мог бы найти свое место в книге Келли.

Паракомпактные пространства попадают в ту же пятую главу. В настоящее время мы видим в паракомпактных пространствах один из важнейших классов топологических пространств. Однако новейшее развитие теории этих пространств также относится уже к годам после написания книги Келли, поэтому не удивительно, что в эту книгу они вошли только в самом коротком изложении, занимающем всего лишь один небольшой параграф. На пятой главе заканчивается изложение собственно теории топологических пространств.

Шестая глава книги посвящена равномерной топологии, которую Келли понимает как теорию равномерных структур в смысле А. Вейля. Очень важно, конечно, что эта теория, вызывающая интерес математиков самых различных специальностей, изложена в элементарном учебнике. Однако нельзя не пожалеть, что в книге Келли даже не упомянуты пространства близости. Эти пространства, определение которых восходит еще к Рису, были введены В. А. Ефремовичем; однако В. А. Ефремович интересовался определенными им пространствами лишь с точки зрения возможных приложений к конкретным геометрическим объектам. Общая теория пространств близости была, как известно, построена Ю. М. Смирновым в [1], [5], [6], и эта теория, несомненно, принадлежит к значительнейшим достижениям современной общей топологии. Но и исследования Ю. М. Смирнова не могли стать известными Келли до окончания им работы над его учебником.

Последняя, седьмая, глава книги Келли посвящена функциональным пространствам, которые в значительной степени исследуются именно с точки зрения равномерной топологии (равномерная сходимость, равностепенная непрерывность семейств функций и т. д.).

Интересной особенностью книги, рекомендуемой сегодня вниманию советского читателя, является наличие в каждой ее главе особого добавления, состоящего из упражнений, связанных именно с данной главой. Помимо «упражнений» в собственном смысле слова, в этот раздел попали и многие теоремы, казавшиеся автору слишком специальными, чтобы быть помещенными в основной текст книги. В большинстве случаев с соображениями автора можно согласиться. Но все же, как мне кажется, не всегда. Приведу только один пример: в раздел «упражнений» попала знаменитая теорема, называемая теперь «теоремой Вейерштрасса — Стоуна»; очевидно, это не только одна из важнейших теорем общей топологии, но и одна из самых «нужных» для всей вообще математики.

Переводчик кое-где дополнил перевод своими немногочисленными примечаниями. Все эти примечания кажутся мне существенными; их могло бы быть и больше — книга бы от этого только выиграла. Но и такая, какая она есть, книга, несомненно, будет иметь успех у широкого круга советских математиков различных возрастов и специальностей.

Болшево — Комаровка
5 ноября 1966

П. Александров