Глава 1

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

1.1 Предварительные замечания

Обозначим через S множество всех „состояний“ физической системы; при этом мы предполагаем, что „состояние“ задается некоторым набором параметров таким образом, что состояние системы в момент времени $t = t_0 > 0$ однозначно определяется соответствующим физическим законом и состоянием при $t = 0$. Например, состояние системы n взаимодействующих материальных точек задается $3n$ координатами точек и $3n$ компонентами скоростей этих точек. Пусть для каждого $s \in S$ и для каждого $t > 0$ через $U_t(s)$ обозначено состояние системы в момент времени t, если в момент времени 0 система находилась в состоянии s. Тогда U_t для каждого фиксированного t будет преобразованием S в S. Далее, $U_{t_1}(U_{t_2}(s))$ — состояние, возникающее через t_1 единиц времени после состояния $U_{t_2}(s)$, а $U_{t_2}(s)$ — состояние, возникающее через t_2 единиц времени после состояния s; таким образом, $U_{t_1}(U_{t_2}(s))$ — состояние, возникающее через $t_1 + t_2$ единиц времени после состояния s, или $U_{t_1+t_2}(s)$. Другими словами, для всех $t_1 > 0$ и $t_2 > 0$ имеет место равенство

$$U_{t_1+t_2} = U_{t_1}\, U_{t_2} \tag{1.1}$$

Отсюда следует, что множество всех U_t является *полугруппой* преобразований. Полугруппа, параметризованная действительными числами так, что выполняется условие (1), называется *однопараметрической полугруппой*. Таким образом, изменение некоторой физической системы во времени описывается однопараметрической полугруппой. Мы будем называть ее *динамической полугруппой* системы.

Если каждое U_t является взаимно однозначным отображением S на S, т. е. существует U_t^{-1}, то мы будем писать $U_{-t} = U_t^{-1}$, где I — тождественное преобразование. При этом условие (1) выполняется для всех t_1 и t_2, и мы получаем *однопараметрическую группу*. Мы будем иметь дело главным образом с системами, которые являются *обратимыми* в том смысле, что их динамические полугруппы можно расширить до однопараметрических групп, как указано выше.

Если наша система обратима, то каждое s лежит на одной и только на одной „орбите“; под орбитой понимается множество всех точек $U_t(s)$ при фиксированном s и переменном t. Каждая орбита — некоторая кривая в S. Вообще говоря (мы остановимся на этом подробнее в различных частных случаях), S обладает дополнительной структурой, которая позволяет говорить о „касательных векторах“ к каждой орбите во всех ее точках. Тем самым динамическая группа позволяет приписать каждой точке S некоторый „вектор“, т. е. порождает „векторное поле“ на S. Это векторное поле называется „инфинитезимальной образующей“ соответствующей группы и во многих случаях однозначно определяет группу. Это чрезвычайно важно, поскольку обычно физический закон выражается значительно проще при описании инфинитезимальной образующей группы,

чем при описании самой группы. В самом деле, физические законы почти всегда даются в инфинитезимальной форме и, для того чтобы получить орбиты группы, приходится интегрировать дифференциальные уравнения.

В том частном случае, когда S является открытым подмножеством n-мерного евклидова пространства, мы можем выразить приведенные выше соображения в значительно более определенной форме. (Более общие случаи мы рассмотрим позднее.) При этом каждая орбита в S является кривой в n-мерном пространстве, описываемой n функциями от t: $q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)$. Здесь

$$(q_1(t), \ldots, q_n(t)) = U_t(q_1(0), \ldots, q_n(0)).$$

Если все производные $q_1'(t), \ldots, q_n'(t)$ существуют, то они служат компонентами касательного вектора к единственной орбите, проходящей через точку $q_1(t), \ldots, q_n(t)$. Мы будем говорить тогда, что U дифференцируема. Обозначим n компонент касательного вектора к орбите в точке $(q_1, \ldots, q_n)$ через

$$A_1^U(q_1, \ldots, q_n), A_2^U(q_1, \ldots, q_n), \ldots, A_n^U(q_1, \ldots, q_n).$$

Тогда каждая орбита $t \to q_1(t), \ldots, q_n(t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= A_1^U(q_1, \ldots, q_n), \\ \frac{dq_2}{dt} &= A_2^U(q_1, \ldots, q_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dq_n}{dt} &= A_n^U(q_1, \ldots, q_n). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Если A_j^U являются дифференцируемыми функциями $q_1, \ldots, q_n$, то, согласно классической теореме единственности для дифференциальных уравнений, через заданную точку проходит не более одной кривой, удовлетворяющей системе (2). Таким образом, A_j^U однозначно определяют U. Если A_j^U существуют и дифференцируемы, мы будем говорить, что U дважды дифференцируема. Таким образом, мы имеем естественное взаимно однозначное соответствие между дважды дифференцируемыми однопараметрическими группами на S и *некоторыми* непрерывными векторными полями на S. Мы можем устанавливать физический закон, задавая явным образом функции A_j^U.

Заметим, что не каждое дифференцируемое векторное поле на S является образующей некоторой однопараметрической группы. Теорема существования для дифференциальных уравнений обеспечивает только существование локальных решений; нетрудно построить примеры, в которых глобальное решение (т. е. группа U_t) не существует. Более того, неизвестны никакие простые необходимые и достаточные условия для существования глобальных решений. С другой стороны, из сказанного выше ясно, что векторное поле может определять некоторый обратимый физический закон только в том случае, когда существует именно глобальное решение.

Как мы увидим в дальнейшем, в применении к системам с бесконечным числом степеней свободы изложенные выше соображения приводят к дифференциальным уравнениям в частных производных. В квантовой механике состояние никогда не может быть описано конечным числом координат — даже в том случае, когда для соответствующего классического состояния это может быть сделано. Таким образом, в квантовой механике мы всегда получаем дифференциальное уравнение в частных производных (или систему таких уравнений). Оно называется уравнением Шредингера.

Основная группа $t \to U_t$ играет очень важную роль в теоретических исследованиях, хотя ее редко можно выписать в явном виде.