1.2 Законы механики системы точек

Пусть $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n$ — координаты n точек в некоторой евклидовой системе координат. Быть может, самым основным законом классической механики системы точек является то, что „будущие“ координаты определяются координатами и их производными по времени в некоторый фиксированный момент времени. Таким образом, пространство S всех состояний можно отождествить с некоторым подмножеством $6n$-мерного евклидова пространства. Мы будем предполагать пока, что это подмножество *открыто*; это означает, грубо говоря, что отсутствуют „связи“. Будет удобно обозначить все координаты одинаковыми буквами $q_1, \ldots, q_{3n}$, а соответствующие производные по времени — буквами $v_1, \ldots, v_{3n}$. Предполагая, что динамическая группа U дважды дифференцируема, ее можно получить путем интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{dq_j}{dt} = A_j^0(q_1, \ldots, q_{3n}, v_1, \ldots, v_{3n}),$$
$$\frac{dv_j}{dt} = A_j(q_1, \ldots, q_{3n}, v_1, \ldots, v_{3n}).$$

Более того, поскольку по определению $v_j = dq_j/dt$, все функции A_j^0 известны, и мы получаем систему

$$\frac{dq_j}{dt} = v_j,$$
$$\frac{dv_j}{dt} = A_j(q_1, \ldots, q_{3n}, v_1, \ldots, v_{3n}).$$

Заметим, что именно эта система $6n$ уравнений первого порядка получается из системы $3n$ уравнений второго порядка

$$\frac{d^2q_j}{dt^2} = A_j\left(q_1, \ldots, q_{3n}, \frac{dq_1}{dt}, \ldots, \frac{dq_{3n}}{dt}\right)$$

с помощью стандартного приема — замены первых производных вспомогательными переменными. Дальнейшие предположения относительно физических законов будут ограничениями на функции A_j. Мы будем рассматривать только такие системы, относительно которых предполагается следующее:

(1) функции A_j являются функциями только переменных q_k и не зависят от v_k;

(2) существуют такие положительные константы m_j, что

$$\frac{\partial m_j A_j}{\partial q_k} = \frac{\partial m_k A_k}{\partial q_j};$$

(3) величины $m_j A_j$ являются частными производными от некоторой функции — $\mathcal{V}$ [1]).

Ясно, что константы m_j в предположении (2) неоднозначно определяются функциями A_j. Мы можем умножить все m_j на одну и ту же положительную константу, не нарушая равенств (2). С другой стороны, отношения m_j/m_k определены, если соответствующие частные производные не обращаются в нуль. Если мы условимся считать, что $m_j/m_k = 1$ во всех случаях, когда это отношение не определяется из равенств (2), то сразу же увидим, что все величины m_j однозначно определяются, как только одной, из них приписано

[1]) Как следует из дальнейшего (см. стр. 11, где вводится понятие энергии и функции Гамильтона), при этом предполагается, что $\mathcal{V}$ является функцией только от координат q_i и не зависит явно от времени t.— *Прим. ред.*

определенное значение. Выбор одного такого значения — это выбор единицы массы; получающиеся в результате числа m_j называются массами, ассоциированными с соответствующими координатами. На практике оказывается, что $m_{3k+1} = m_{3k+2} = m_{3k+3}$, так что на самом деле массы являются свойствами частиц. Предположение (3) почти следует из (2): в соответствии с известной теоремой дифференциального исчисления $\mathcal{V}$ всегда существуем локально, и во всех случаях, когда S односвязно, можно, соединяя эти локальные $\mathcal{V}$, построить одну глобальную функцию $\mathcal{V}$ на всем S. Если же S не предполагается односвязным, то требование (3) ставится отдельно.

Функция $m_j A_j(q_1, \ldots, q_{3n})$ часто обозначается через $F_j(q_1, \ldots, q_{3n})$ и называется компонентой силы, отнесенной к j-й координате. Величина $p_j = m_j v_j$ называется компонентой *импульса* (*количества движения*), сопряженной координате q_j [2]). Уравнения движения, записанные через силы и импульсы, принимают следующий вид:

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{p_j}{m_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = F_j(q_1, \ldots, q_{3n}),$$

а предположение (3) представляется как $F_j = -\partial\mathcal{V}/\partial q_j$. В этом случае говорят, что силы *консервативны и имеют потенциал* $\mathcal{V}$.

Поскольку v_j и p_j однозначно определяют друг друга, мы можем считать, что состояние нашей системы описывается параметрами q_j и p_j вместо q_i и v_i. Конечно, при этом S становится другим подмножеством $6n$-мерного пространства. Когда S рассматривается как множество всех возможных q_i и p_i, оно называется фазовым пространством. Действительное значение перехода к фазовому пространству станет понятным ниже, когда будет дана трактовка этих вопросов, не зависящая от выбора системы координат.

Под интегралом нашей системы мы будем понимать функцию φ, определенную на фазовом пространстве S и постоянную на каждой орбите U_t. Если φ дифференцируема, то, как нетрудно видеть,

$$\frac{d}{dt}[\varphi(U_t(s))]_{t=0} = \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial q_{3n}}\frac{dq_{3n}}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{3n}}\frac{dp_{3n}}{dt} =$$
$$= \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{p_1}{m_1} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial q_{3n}}\frac{p_{3n}}{m_{3n}} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial q_1} - \ldots - \frac{\partial\varphi}{\partial p_{3n}}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial q_{3n}}.$$

Поэтому φ является интегралом в том и только в том случае, когда последнее выражение равно нулю тождественно по всем q и p.

Более общим образом пусть W — любая дважды дифференцируемая однопараметрическая группа, $B_1^W, \ldots, B_{3n}^W, C_1^W, \ldots, C_{3n}^W$ — компоненты ее инфинитезимальной образующей; каждое B_i^W и C_j^W — функция всех q и p. Тогда функция φ постоянна на орбитах W в том и только в том случае, когда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}B_1^W + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial q_{3n}}B_{3n}^W + \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}C_1^W + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{3n}}C_{3n}^W = 0$$

Предположим, что векторное поле, компонентами которого по порядку являются C_j^W и $-B_j^W$ есть множество всех частных производных некоторой функции φ, т. е. предположим, что

$$C_j^W = \frac{\partial\varphi}{\partial q_j}; \quad B_j^W = -\frac{\partial\varphi}{\partial p_j}.$$

Из написанного выше тождества сразу следует, что φ будет постоянна на орбитах W. Такие векторные поля играют важную роль в нашей теории. Они называются *инфинитезимальными контактными преобразованиями*. Если инфинитезимальная образующая группы W является инфинитезимальным контактным преобразованием, т. е. если

[2]) Определение импульса, данное здесь автором ($p_j = mv_j = m\dot{q}_j$), справедливо только в том случае, когда $q_1, \ldots, q_n$ образуют декартову систему координат. —*Прим.ред.*

существует такая функция φ, что

$$C_j^W = \frac{\partial \varphi}{\partial q_j}, \quad B_j^W = -\frac{\partial \varphi}{\partial p_j},$$

мы говорим, что W является *однопараметрической группой контактных преобразований*. Функция φ однозначно определяет W и сама однозначно определяется группой W с точностью до аддитивной константы. Мы будем называть ее *фундаментальным инвариантом* группы W.

Мы покажем теперь, что наша динамическая группа U является однопараметрической группой контактных преобразований и, следовательно, имеет хотя бы один нетривиальный интеграл. Мы должны найти функцию (которую мы обозначим H), такую что

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{p_j}{m_j}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_j}.$$

Из первой группы равенств мы видим, что H должна иметь вид

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \ldots + \frac{p_{3n}^2}{2m_{3n}} + H_0(q_1, \ldots, q_{3n}),$$

а из второй, что можно положить $H_0 = \mathcal{V}$. Таким образом, функция

$$H(q_1, \ldots, q_{3n}, p_1, \ldots, p_{3n}) = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \ldots + \frac{p_{3n}^2}{2m_{3n}} + \mathcal{V}(q_1, \ldots, q_{3n}) \tag{1.3}$$

постоянна на орбитах U. Она называется *интегралом энергии* или просто *энергией* системы. Тот факт, что она остается постоянной во времени, представляет собой один из аспектов „закона сохранения энергии“. Используя H, мы можем переписать дифференциальные уравнения движения в так называемой „гамильтоновой“ форме

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

В этом контексте функция H называется гамильтонианом, или функцией Гамильтона, системы. Мы заметим, что H является суммой двух слагаемых, одно из которых зависит только от координат, а другое — только от скоростей. Эти два слагаемых называются соответственно *потенциальной и кинетической энергией*.

Пусть W — однопараметрическая группа контактных преобразований с фундаментальным инвариантом ψ; посмотрим, при каком условии функция φ будет постоянной на орбитах W. Производя замены в полученной выше формуле, мы приходим к следующему условию:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial \psi}{\partial p_1} - \ldots - \frac{\partial \varphi}{\partial q_{3n}}\frac{\partial \psi}{\partial p_{3n}} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_{3n}}\frac{\partial \psi}{\partial q_{3n}} = 0. \tag{1.4}$$

Выражение в левой части этого равенства [взятое с обратным знаком. — *Ред.*] называется скобкой Пуассона функций φ и ψ и обозначается $[\varphi, \psi]$. Ясно, что $[\varphi, \psi] = -[\psi, \varphi]$ и, следовательно, $[\varphi, \psi] \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $[\psi, \varphi] \equiv 0$. Это означает, что функция φ постоянна на орбитах однопараметрической группы контактных преобразований, определенной функцией ψ, тогда и только тогда, когда ψ постоянна на орбитах однопараметрической группы контактных преобразований, определенной функцией φ. В частном случае, когда $\varphi = H$, мы получаем следующий важный принцип. Пусть ψ — фундаментальный инвариант произвольной однопараметрической группы контактных преобразований W^ψ. Тогда ψ является интегралом нашей динамической системы в том и

только в том случае, когда преобразования W^ψ переводят H в себя. Тем самым мы получаем соответствие между интегралами и однопараметрическими группами „симметрий“. Мы скоро увидим, что известные интегралы импульса и момента импульса соответствуют симметриям переноса и вращения пространства.

Предположим теперь, что S для каждого фиксированного набора $q_1, \ldots, q_{3n}$ содержит $q_1, \ldots, q_{3n}, p_1, \ldots, p_{3n}$ для произвольного набора $p_1, \ldots, p_{3n}$. Обозначим через $\mathcal{M}$ открытое множество в E^{3n}, состоящее из всех $q_1, \ldots, q_{3n}$, входящих в S. Пусть $t \to U_t$ — дважды дифференцируемая однопараметрическая группа в $\mathcal{M}$, инфинитезимальной образующей которой служит векторное поле с компонентами $D_1, \ldots, D_{3n}$. Тогда некоторым способом, объяснение которого нам удобнее отложить до следующего раздела, U индуцирует однопараметрическую группу W на S с инфинитезимальной образующей

$$D_1, \ldots, D_{3n}, -\sum_{i=1}^{3n} p_i \frac{\partial D_i}{\partial q_1}, -\sum_{i=1}^{3n} p_i \frac{\partial D_i}{\partial q_2}, \ldots, -\sum_{i=1}^{3n} p_i \frac{\partial D_i}{\partial q_{3n}}.$$

Мы сразу же видим, что W является однопараметрической группой контактных преобразований с фундаментальным инвариантом

$$p_1 D_1(q_1, \ldots, q_{3n}) + \ldots + p_{3n} D_{3n}(q_1, \ldots, q_{3n}).$$

Если U такова, что H остается инвариантной при всех W_t, то функция

$$p_1 D_1(q_1, \ldots, q_{3n}) + \ldots + p_{3n} D_{3n}(q_1, \ldots, q_{3n})$$

будет интегралом, линейным по всем p_i. Такие интегралы, когда они существуют, называются линейными интегралами импульсов [3]).

Важным случаем, когда имеются линейные интегралы импульсов, является система, у которой функция $\mathcal{V}$ зависит только от расстояний между частицами, например движение планет или более общий случай, когда

$$F_i(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} G_{ij}(|w_i - w_j|) \frac{w_i - w_j}{|w_i - w_j|}$$

где w_i — вектор (x_i, y_i, z_i),

$$|w_i - w_j| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2},$$

а G_{ij} — некоторые непрерывные функции, определенные на положительной части действительной оси и такие, что $G_{ij} = G_{ji}$. Пусть в этом случае $t \to A_t$ — любая однопараметрическая группа преобразований трехмерного пространства, сохраняющих расстояние. Тогда соответствие

$$x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n \to A_t(x_1, y_1, z_1), \ldots, A_t(x_n, y_n, z_n)$$

определяет некоторую однопараметрическую группу U на $\mathcal{M}$, для которой соответствующая W на S оставляет H неизменной. В этом можно убедиться, производя соответствующие вычисления; кроме того, это будет непосредственно вытекать из соображений, которые не зависят от выбора системы координат и будут приведены в следующем разделе.

Таким образом, каждой группе $t \to A_t$ мы ставим в соответствие некоторый интеграл, линейный по импульсам p. Если $A_t(x, y, z) = (x + t, y, z)$, то этот интеграл превращается

[3]) В подлиннике стоит просто momentum integrals (интегралы импульсов), но, поскольку речь идет о линейной комбинации импульсов, нам представляется более удачным термин „линейные интегралы импульсов“, хотя он и не принят в русской научной литературе. — *Прим. ред.*

в $p_1 + p_4 + p_7 + \ldots$. Точно так же группа всевозможных переносов в направлении y приводит к интегралу $p_2 + p_5 + p_8 + \ldots$, а группа переносов в направлении z — к интегралу $p_3 + p_6 + p_9 + \ldots$. Эти три интеграла называются компонентами (соответственно по осям x, y и z) импульса системы. Тот факт, что они являются интегралами, составляет содержание закона сохранения импульса. Рассматривая переносы по другим направлениям, можно получить другие интегралы, но они не дают ничего существенно нового. Все они являются линейными комбинациями с постоянными коэффициентами трех уже описанных интегралов.

Рассмотрим теперь группу

$$(x, y, z) \to (x \cos t + y \sin t, -x \sin t + y \cos t, z)$$

всех вращений относительно оси z. Она приводит к интегралу

$$\sum_{j=1}^{n} (p_{3j-2}\, q_{3j-1} - q_{3j-2}\, p_{3j-1}),$$

называемому моментом импульса относительно оси z. Аналогично определяются моменты импульса относительно осей x и y. Моменты импульса относительно осей, имеющих другие направления и проходящих через точки, отличные от $(0, 0, 0)$, также являются интегралами, но все они просто выражаются через шесть уже полученных. Мы подчеркиваем эти теоретико-групповые определения импульса и момента импульса, поскольку именно эти определения допускают наиболее естественное обобщение в квантовой механике.

Отображение

$$(q_1, \ldots, q_{3n}, p_1, \ldots, p_{3n}) \to \left(q_1, \ldots, q_{3n}, \frac{p_1}{m_1}, \ldots, \frac{p_{3n}}{m_{3n}}\right)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между фазовым пространством S, рассматриваемым как множество всевозможных значений q и p, и первоначально выбранным пространством S' всевозможных значений q и v. Это отображение переводит функцию H на S в функцию H' на S', где

$$H'(q_1, \ldots, q_{3n}, v_1, \ldots, v_{3n}) = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \ldots + \frac{m_{3n} v_{3n}^2}{2} + \mathcal{V}(q_1, \ldots, q_{3n}).$$

Уравнения движения, выраженные через H', имеют вид

$$\frac{dq_i}{dt} = v_i, \quad \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q_i} \frac{1}{m_i}.$$

Далее,

$$v_i = \frac{\partial H'}{\partial v_i} \frac{1}{m_i},$$

поэтому мы можем переписать их так:

$$\frac{dq_i}{dt} = v_i, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H'}{\partial v_i}\right) = -\frac{\partial H'}{\partial q_i}.$$

Наконец, полагая

$$\mathcal{L}(q_1, \ldots, q_{3n}, v_1, \ldots, v_{3n}) = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \ldots + \frac{m_{3n} v_{3n}^2}{2} - \mathcal{V}(q_1, \ldots, q_{3n}),$$

мы получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v_i}\right) = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = v_i,$$

или, в общепринятой, более краткой форме,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i}.$$

Уравнения движения, записанные в таком виде, называют *уравнениями в форме Лагранжа, а* $\mathfrak{L}$ *— лагранжианом* или *функцией Лагранжа* системы. Уравнения Лагранжа интересны тем, что они являются в точности уравнениями Эйлера для некоторой определенной задачи вариационного исчисления. Поэтому функция $\mathfrak{L}$ определяет орбиты группы U_t некоторым внутренним образом, не зависящим от особенностей выбранной системы координат.

Действительно, пусть $\mathfrak{L}$ — произвольная подходящая дифференцируемая функция, определенная на S'; предположим также, что S' для каждого набора $(q_1, \ldots, q_{3n})$ содержит точки $(q_1, \ldots, q_{3n}, v_1, \ldots, v_{3n})$ для всевозможных наборов $(v_1, \ldots, v_{3n})$. Пусть $\mathcal{M}$ — множество наборов $q_1, \ldots, q_{3n}$, соответствующих точкам S'. Пусть, далее, q' и q'' — две точки в $\mathcal{M}$, и $q_1(t), \ldots, q_{3n}(t)$ — дифференцируемые функции, определенные на отрезке $[0, 1]$ и такие, что кривая $q_1(t), \ldots, q_{3n}(t)$ целиком лежит в $\mathcal{M}$, причем $(q_i(0)) = q'_i$ и $(q_i(1)) = q''_i$. Тогда набор $(q_1(t), \ldots, q_{3n}(t), \dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_{3n}(t))$ можно подставить в функцию $\mathfrak{L}$ и проинтегрировать полученное выражение по t от 0 до 1. Тем самым каждой кривой C в $\mathcal{M}$, соединяющей q' с q'', мы ставим в соответствие некоторое число $I(C)$.

Мы ищем условия, которым должны удовлетворять функции $q_i(t)$, чтобы соответствующая кривая C давала функционалу $I(C)$ „стационарное“ значение. Более точно, если $\eta_i(t)$ таково, что $\eta_i(0) = \eta_i(1) = 0$, то $q_i(t) + \varepsilon\eta_i(t) = C_\varepsilon^\eta$ будет „допустимой кривой“ для любого (достаточно малого) ε; мы говорим, что C дает стационарное значение $I(C)$, если

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon} I(C_\varepsilon^\eta)\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

для каждой функции η. Несложное рассуждение, которое читатель может найти в любом учебнике вариационного исчисления, показывает, что кривая, определенная функциями $q_i(t)$, дает стационарное значение I тогда и только когда, когда $q_i(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i}\big(q_1(t), \ldots, q_{3n}(t), \dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_{3n}(t)\big)\right) = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i}\big(q_1(t), \ldots, q_{3n}(t), \dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_{3n}(t)\big).$$

Когда $\mathfrak{L}$ — лагранжиан нашей системы, это в точности уравнения Лагранжа. Тот факт, что на орбитах группы U_t указанный интеграл принимает стационарное значение, известен как *принцип Гамильтона*.

1.3 Обобщенные координаты и дифференцируемые многообразия

Иногда бывает удобно перейти к новой системе координат, в которой координаты не только не являются прямоугольными, но могут произвольным образом зависеть от прямоугольных координат нескольких различных частиц. Более того, рассматривая системы, в которых имеются „связи“, удобно уменьшить число координат, оставив только те, которые могут изменяться независимо от остальных, а это, вообще говоря, можно сделать только локально. Например, если $\mathcal{M}$ — поверхность сферы, то нельзя найти