мы получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v_i}\right) = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = v_i,$$

или, в общепринятой, более краткой форме,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i}.$$

Уравнения движения, записанные в таком виде, называют *уравнениями в форме Лагранжа, а* $\mathfrak{L}$ *— лагранжианом* или *функцией Лагранжа* системы. Уравнения Лагранжа интересны тем, что они являются в точности уравнениями Эйлера для некоторой определенной задачи вариационного исчисления. Поэтому функция $\mathfrak{L}$ определяет орбиты группы U_t некоторым внутренним образом, не зависящим от особенностей выбранной системы координат.

Действительно, пусть $\mathfrak{L}$ — произвольная подходящая дифференцируемая функция, определенная на S'; предположим также, что S' для каждого набора $(q_1, \ldots, q_{3n})$ содержит точки $(q_1, \ldots, q_{3n}, v_1, \ldots, v_{3n})$ для всевозможных наборов $(v_1, \ldots, v_{3n})$. Пусть $\mathcal{M}$ — множество наборов $q_1, \ldots, q_{3n}$, соответствующих точкам S'. Пусть, далее, q' и q'' — две точки в $\mathcal{M}$, и $q_1(t), \ldots, q_{3n}(t)$ — дифференцируемые функции, определенные на отрезке $[0, 1]$ и такие, что кривая $q_1(t), \ldots, q_{3n}(t)$ целиком лежит в $\mathcal{M}$, причем $(q_i(0)) = q'_i$ и $(q_i(1)) = q''_i$. Тогда набор $(q_1(t), \ldots, q_{3n}(t), \dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_{3n}(t))$ можно подставить в функцию $\mathfrak{L}$ и проинтегрировать полученное выражение по t от 0 до 1. Тем самым каждой кривой C в $\mathcal{M}$, соединяющей q' с q'', мы ставим в соответствие некоторое число $I(C)$.

Мы ищем условия, которым должны удовлетворять функции $q_i(t)$, чтобы соответствующая кривая C давала функционалу $I(C)$ „стационарное“ значение. Более точно, если $\eta_i(t)$ таково, что $\eta_i(0) = \eta_i(1) = 0$, то $q_i(t) + \varepsilon\eta_i(t) = C_\varepsilon^\eta$ будет „допустимой кривой“ для любого (достаточно малого) ε; мы говорим, что C дает стационарное значение $I(C)$, если

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon} I(C_\varepsilon^\eta)\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

для каждой функции η. Несложное рассуждение, которое читатель может найти в любом учебнике вариационного исчисления, показывает, что кривая, определенная функциями $q_i(t)$, дает стационарное значение I тогда и только когда, когда $q_i(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i}\big(q_1(t), \ldots, q_{3n}(t), \dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_{3n}(t)\big)\right) = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i}\big(q_1(t), \ldots, q_{3n}(t), \dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_{3n}(t)\big).$$

Когда $\mathfrak{L}$ — лагранжиан нашей системы, это в точности уравнения Лагранжа. Тот факт, что на орбитах группы U_t указанный интеграл принимает стационарное значение, известен как *принцип Гамильтона*.

1.3 Обобщенные координаты и дифференцируемые многообразия

Иногда бывает удобно перейти к новой системе координат, в которой координаты не только не являются прямоугольными, но могут произвольным образом зависеть от прямоугольных координат нескольких различных частиц. Более того, рассматривая системы, в которых имеются „связи“, удобно уменьшить число координат, оставив только те, которые могут изменяться независимо от остальных, а это, вообще говоря, можно сделать только локально. Например, если $\mathcal{M}$ — поверхность сферы, то нельзя найти

две непрерывные функции f и g, которые давали бы взаимно однозначное отображение $q \to (f(q), \mathrm{g}(q))$ поверхности $\mathcal{M}$ на некоторое подмножество плоскости. Наконец, представляя результаты в форме, не зависящей от выбора системы координат, нередко можно глубже проникнуть в суть дела. Таковы причины, побудившие нас дать здесь более абстрактное обобщение материала, разобранного в разд. 1.1 и 1.2.

Для того, чтобы оправдать определения, которые будут даны ниже, мы начнем с доказательства теоремы, характеризующей вектор в E^n с помощью частных производных, которые он определяет. Пусть $\mathcal{O}$ — открытое подмножество пространства E^n; обозначим через $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}$ множество всех действительных функций, которые определены на $\mathcal{O}$ и принадлежат классу C^∞, т. е. имеют непрерывные частные производные всех порядков. Множество ее является к о л ь ц о м функций в том смысле, что оно замкнуто относительно операций сложения и умножения. Для каждой $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{O}}$, каждого $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{O}$ и каждого $v = (v_1, \ldots, v_n) \in E^n$ рассмотрим действительную функцию на прямой $t \to f(a+tv)$. Она определена для всех достаточно малых t и также принадлежит классу C^∞. Мы определяем $f_v(a)$ как

$$\frac{d}{dt} f(a+tv)\bigg|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

Заметим, что если $v = (1, 0, \ldots, 0)$, то $f_v(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_n)$; аналогичные результаты имеют место для остальных частных производных. Вообще

$$f_v(a) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_n) + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, \ldots, a_n) + \ldots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \ldots, a_n).$$

Таким образом, $f_v(a)$ всегда представляет собой конечную линейную комбинацию частных производных первого порядка от функции f в точке a. Поскольку $f_{\lambda v}(a) = \lambda f_v(a)$, величина $f_v(a)$ имеет следующую геометрическую интерпретацию: $f_v(a)$ есть длина вектора v, умноженная на производную функции f по направлению v. Фиксируя a и v, рассмотрим функционал $l^{a,v}$, переводящий функцию $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{O}}$ в число $f_v(a)$. Нетрудно убедиться в том, что $l^{a,v}$ обладает следующими формальными свойствами:

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} && l^{a,v}(f+\mathrm{g}) = l^{a,v}(f) + l^{a,v}(\mathrm{g});\\
&\text{(b)} && l^{a,v}(f\,\mathrm{g}) = f(a)\, l^{a,v}(\mathrm{g}) + \mathrm{g}(a)\, l^{a,v}(f);\\
&\text{(c)} && l^{a,v}(f) = 0, \text{ если } f \text{ постоянна.}
\end{aligned}$$

Кроме того, если $l^{a,v}(f) = l^{a,w}(f)$ для всех f, то $v = w$. Таким образом, отображение $v \to l^{a,v}$ является взаимно однозначным, т. е. вектор v полностью описывается функционалом $l^{a,v}$. Мы покажем сейчас, что каждый функционал, обладающий свойствами (a), (b) и (c), соответствует некоторому вектору.

Т е о р е м а. *Пусть a — некоторая точка $\mathcal{O}$, и l — функционал, сопоставляющий каждой функции $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{O}}$ некоторое число $l(f)$ так что*

$$\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&\text{(i)} && l(f+\mathrm{g}) = l(f) + l(\mathrm{g}),\\
&\text{(ii)} && l(f\mathrm{g}) = f(a)\, l(\mathrm{g}) + \mathrm{g}(a)\, l(f)
\end{aligned}\right\} && \textit{для всех } f \textit{ и } \mathrm{g} \textit{ из } \mathcal{E}_{\mathcal{O}};\\
&\text{(iii)} && l(f) = 0, && \textit{если } f \textit{ постоянна}
\end{aligned}$$

Тогда существует единственный вектор v, такой что $l(f) = f_v(a)$ для всех $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{O}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что из (ii) и (iii) следует, что $l(\lambda f) = \lambda\, l(f)$, если λ — произвольная константа. Предположим теперь, что $\mathcal{O}$ не только открыто,

но и выпукло. Для заданных $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{O}}$ и $x \in \mathcal{O}$ положим $\varphi(t) = f(a + t(x - a))$; тогда

$$f(x) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int\limits_0^1 \varphi'(t)\,dt = \int\limits_0^1 \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) f_j(a + t(x - a))\,dt,$$

где через f_j обозначена частная производная f по j-й переменной. Пусть

$$A_j(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_0^1 f_j(a + t(x - a))\,dt;$$

тогда, как нетрудно видеть, A_j принадлежит $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}$, и имеет место тождество

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(a_1, \ldots, a_n) + \sum_{j=1}^n (x_j - a_j)\, A_j(x_1, \ldots, x_n).$$

Применяя то же самое рассуждение к каждой функции A_j, получаем

$$A_j(x_1, \ldots, x_n) = c_j + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)\, A_{ij}(x_1, \ldots, x_n),$$

где $c_j = A_j(a) = f_j(a)$. Подстановка этих выражений в предыдущее тождество дает новое тождество:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv f(a_1, \ldots, a_n) + \sum c_j(x_j - a_j) + \sum (x_i - a_i)(x_j - a_j)\, A_{ij}(x_1, \ldots, x_n);$$

таким образом, $l(f) = 0 + \sum c_j l(x_j) + 0$. Последний член равен нулю, поскольку он представляет собой сумму нескольких членов, в каждом из которых *два* сомножителя обращаются в нуль в точке a:

$$l(h_1 h_2 h_3) = h_1(a)\, l(h_2 h_3) + h_2(a)\, h_3(a)\, l(h_1) = 0,$$

если $h_1(a) = h_2(a) = 0$. Положим $v_j = l(x_j)$, тогда $l(f) = \sum v_j f_j(a) = l^{a,v}(f)$.

Теперь предположим, что $\mathcal{O}$ не обязательно выпукло. Заметим, что если $f = 0$ в некотором открытом множестве вокруг точки a, то $l(f) = 0$. Действительно, мы всегда можем выбрать $\mathrm{g} \in \mathcal{E}_{\mathcal{O}}$ так, чтобы $\mathrm{g}(a) = 1$ и $\mathrm{g}(x) = 0$ вне множества, где $f(x) = 0$. Таким образом, $f\mathrm{g} = 0$, т. е.

$$0 = l(f\mathrm{g}) = f(a)\, l(\mathrm{g}) + \mathrm{g}(a)\, l(f) = 0 + l(f) = l(f).$$

Следовательно, если f_1 и f_2 совпадают в окрестности a, то $l(f_1) = l(f_2)$. Теперь выберем открытое выпуклое множество $\mathcal{O}'$ так, чтобы $a \in \mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$. Для любой функции f из $\mathcal{E}_{\mathcal{O}'}$ выберем $\mathrm{g} \in \mathcal{E}_{\mathcal{O}}$ так, чтобы $f(x) = \mathrm{g}(x)$ в некоторой окрестности точки a. Если g_1 и g_2 — две такие функции, то, как доказано выше, $l(\mathrm{g}_1) = l(\mathrm{g}_2)$. Следовательно, $l(\mathrm{g})$ не зависит от выбора g, а зависит только от f. Обозначим этот функционал через $\bar{l}(f)$. Ясно, что для $\bar{l}$ выполняются свойства (i)–(iii) и, поскольку $\mathcal{O}'$ выпукло, существует такой вектор v, что $\bar{l}(f) = l^{a,v}(f)$ для всех $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{O}'}$. Но если $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{O}}$, то $l(f) = \bar{l}(\mathrm{g})$ для некоторой функции g из $\mathcal{E}_{\mathcal{O}'}$, которая совпадает с f в некоторой окрестности точки a. Поэтому $l(f) = l^{a,v}(\mathrm{g}) = l^{a,v}(f)$, и доказательство закончено.

Пусть теперь S — произвольное множество, а $\mathcal{E}$ — кольцо действительных функций, определенных на всем S, причем для любых двух различных точек p и q из S существует

функция $f \in \mathcal{E}$, такая что $f(p) \neq f(q)$. Множество S становится хаусдорфовым пространством [4]) (а на самом деле даже вполне регулярным пространством), если считать открытыми те множества $\mathcal{O} \subseteq S$, у которых для каждой точки $q \in \mathcal{O}$ существуют функции $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{E}$ и $\varepsilon > 0$, такие, что из неравенств $|f_i(p) - f_i(q)| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n$, следует, что $p \in \mathcal{O}$. В этой топологии все функции из $\mathcal{E}$ непрерывны, и ее можно определить эквивалентным образом как слабейшую из топологий, при которых сохраняется это свойство. Мы будем говорить что некоторая действительная функция f *локально* принадлежит $\mathcal{E}$, если каждая точка q, в которой функция f определена, содержится в таком открытом множестве $\mathcal{O}$, что f определена всюду на $\mathcal{O}$ и совпадает там с некоторой функцией из $\mathcal{E}$. Мы будем говорить, что $\mathcal{E}$ превращает S в *многообразие класса* C^∞, если выполняются следующие два дополнительных условия:

(a) любая функция, определенная всюду на S и локально принадлежащая $\mathcal{E}$, действительно принадлежит $\mathcal{E}$;

(b) для любой точки $q \in S$ существует некоторое открытое множество $\mathcal{O}$, $q \in \mathcal{O} \subseteq S$, и некоторое взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение θ открытого подмножества G n-мерного евклидова пространства E^n на $\mathcal{O}$, такие, что функция f, определенная на $\mathcal{O}$, локально принадлежит $\mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда $f \circ \theta$ является бесконечно дифференцируемой на G.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — функции, определенные на открытом подмножестве $\mathcal{O} \subseteq S$; обозначим через Φ отображение $p \to (x_1(p), \ldots, x_n(p))$. Если Φ устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{O}$ и некоторым открытым подмножеством G пространства E^n, и Φ^{-1} обладает свойствами, описанными в пункте (b), мы будем говорить, что $x_1, \ldots, x_n$ *образуют систему координат* для $\mathcal{O}$ и *локальную систему координат* для каждой точки q из $\mathcal{O}$. Ясно, что функции, образующие систему координат, локально принадлежат $\mathcal{E}$. Более того, из (b) следует, что каждая точка $q \in S$ имеет локальную систему координат, т. е. лежит в некотором открытом множестве, имеющем систему координат. Нетрудно доказать, что каждая точка имеет локальную систему координат, целиком состоящую из ограничений на подходящее открытое множество нескольких функций из $\mathcal{E}$. Конечно, функции из $\mathcal{E}$ обычно не образуют системы координат для всего S.

Можно представлять себе многообразие класса C^∞ как результат соединения нескольких открытых подмножеств евклидова пространства; это соединение произведено таким образом, чтобы сохранилось понятие бесконечно дифференцируемой функции (функции класса C^∞). Мы будем в дальнейшем говорить о функциях из $\mathcal{E}$ как о функциях класса C^∞ на S, а о функциях, локально принадлежащих $\mathcal{E}$ — как о функциях, которые бесконечно дифференцируемы в своей области определения.

Если S связно, то, как нетрудно видеть, каждая точка имеет локальную систему координат с тем же самым числом координат, что и любая другая точка; мы будем называть это число *размерностью* S. Представляется удобным принять это предположение и, начиная с этого момента, считать, что S имеет размерность n.

Пусть S — произвольное многообразие класса C^∞, и $\mathcal{E}$ — кольцо всех функций класса C^∞ на S. Под (касательным) *вектором* в точке $q \in S$ мы будем понимать про-

---

[4]) Подмножество $\mathcal{O}$ евклидова пространства называется открытым, если для любой точки $P \in \mathcal{O}$ существует такое положительное число ε, что все точки P', расстояние которых до точки P меньше ε, принадлежат множеству $\mathcal{O}$. Нетрудно проверить, что открытые множества обладают следующими свойствами:

1) объединение любой совокупности открытых множеств открыто;

2) пересечение любых двух открытых множеств открыто;

3) если P_1 и P_2 — различные точки, то существуют непересекающиеся открытые множества $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$, такие что $P_1 \in \mathcal{O}_1$ и $P_2 \in \mathcal{O}_2$.

Понятие хаусдорфова топологического пространства получается, если принять эти свойства за аксиомы. Пусть S — произвольное множество, и $\mathcal{F}$ — некоторое семейство его подмножеств. Элементы $\mathcal{F}$ мы будем называть открытыми множествами. Если для этого семейства множеств выполняются перечисленные выше свойства 1, 2, 3, то мы будем говорить, что S является хаусдорфовым пространством (в топологии, которая задается семейством $\mathcal{F}$).

извольную действительную функцию v на $\mathcal{E}$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} &\text{(a)} && v(f) + v(\mathrm{g}) = v(f + \mathrm{g}), \\ &\text{(b)} && v(f\mathrm{g}) = \mathrm{g}(q)\, v(f) + f(q)\, v(\mathrm{g}), \\ &\text{(c)} && v(c) = 0, \end{aligned}$$

если f и g принадлежат $\mathcal{E}$, а c — произвольная константа. Мы будем часто обозначать $v(f)$ через $f_v(q)$ и называть его частной производной функции f в точке q, определяемой вектором v. Ясно, что множество всех касательных векторов в точке q образует векторное пространство над полем действительных чисел. Мы будем называть его *касательным пространством* в точке q и обозначать V_q.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — система координат для открытого множества $\mathcal{O}$, содержащего q. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{E}$ существует бесконечно дифференцируемая функция $\tilde{f}$, определенная на некоторой открытой окрестности $(x_1(q), \ldots, x_n(q))$, такая что $f(p) = \tilde{f}(x_1(p), \ldots, x_n(p))$ для всех $p \in \mathcal{O}$. Мы можем образовать производные $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}(x_1(q), \ldots, x_n(q))$ и будем обозначать их через $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right|_q, \ldots, \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right|_q$. Из доказанной выше теоремы непосредственно следует, что для каждого f функция $f \to \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right|_q$ принадлежит V_q, и что эти n элементов пространства V_q образуют в нем базис.

Таким образом, мы видим, что для n-мерного многообразия класса C^∞ каждое V_q является n-мерным векторным пространством, и каждая локальная система координат для точки q определяет некоторый базис в пространстве V_q. Проще говоря, как только в открытом множестве $\mathcal{O}$ введена система координат, мы можем отождествить его с открытым подмножеством E^n, при этом наиболее общий касательный вектор в точке $q = (q_1, \ldots, q_n)$ имеет вид

$$f \to \left(c_1 \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_q, \ldots, c_n \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_q \right).$$

Под *контравариантным векторным полем* L на S мы будем понимать сопоставление каждой точке $q \in S$ некоторого элемента из $V_q : q \to L_q \in V_q$. Если L — контравариантное векторное поле, и f — бесконечно дифференцируемая функция, то мы можем определить новую функцию $L(f)$, заставляя L_q действовать на f при каждом q. Другими словами, $L(f)(q) \equiv L_q(f)$. Если $L(f)$ — функция класса C^∞ для всех f, то мы будем говорить, что L — *контравариантное векторное поле класса* C^∞.

Пусть $\mathcal{O}$ — открытое множество, в котором имеется система координат $(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда каждое контравариантное векторное поле L описывается в $\mathcal{O}$ своими компонентами относительно базисов в V_q, определенных координатами $x_1, \ldots, x_n$. Мы имеем

$$L = A_1(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + A_n(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_n},$$

и

$$L(f) = A_1(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + A_n(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Легко видеть, что L будет бесконечно дифференцируемым тогда и только тогда, когда A_j будут бесконечно дифференцируемыми для всех локальных систем координат.

Каждое векторное поле класса C^∞ отображает $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}$ так, что выполняются следующие тождества:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} && L(f + \mathrm{g}) = L(f) + L(\mathrm{g}), \\ &\text{(b)} && L(f\mathrm{g}) = f\, L(\mathrm{g}) + \mathrm{g}\, L(f), \\ &\text{(c)} && L(c) = 0 \end{aligned}$$

для всех f и g из $\mathcal{E}$ и всех констант c. Другими словами, L определяет некоторое *дифференцирование* в кольце $\mathcal{E}$. Обратно, пусть D — любое дифференцирование в $\mathcal{E}$, т. е. отображение $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}$, удовлетворяющее условиям (a), (b) и (c). Для каждого $q \in S$ положим $L_q(f) = D(f)(q)$. Мы немедленно убеждаемся, что L_q принадлежит V_q, и что, соответственно, $q \to L_q$ представляет собой контравариантное векторное поле класса C^∞, такое что $L(f) \equiv D(f)$. Таким образом, контравариантное векторное поле класса C^∞ можно одновременно рассматривать как определенного вида отображение $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}$.

Если L и M — контравариантные векторные поля класса C^∞, то мы можем положить по определению $(L+M)_q = L_q + M_q$, и тогда $L+M$ снова будет таким же векторным полем. Аналогичным образом мы можем умножить контравариантное векторное поле класса C^∞ на функцию f класса C^∞ и получим контравариантное векторное поле fL. Можно также определить „произведение“ L и M, что уже менее очевидно. Для заданных L и M мы полагаем $[L,M](f) = L(M(f)) - M(L(f))$ для всех $f \in \mathcal{E}$. Ясно, что $[L,M]$ обладает свойствами (a) и (c), указанными выше; непосредственные вычисления показывают, что (b) также выполняется. Таким образом, $[L,M]$ снова является контравариантным векторным полем класса C^∞. „Умножение“, определенное таким образом, дистрибутивно относительно сложения и „антикоммутативно“ в том смысле, что $[L,M] = -[M,L]$. Оно, конечно, не ассоциативно. Вместо этого оно удовлетворяет так называемому тождеству Якоби [5])

$$[[L,M],N] + [[N,L],M] + [[M,N],L] = 0.$$

Итак, множество контравариантных векторных полей класса C^∞ образует то, что обычно называют *алгеброй Ли*.

Пусть V_q^* для каждого $q \in S$ обозначает пространство, сопряженное к V_q, т. е. пространство всех линейных функционалов на V_q. Мы предоставляем читателю убедиться в том, что, хотя V_q и V_q^* всегда имеют одинаковую размерность и, следовательно, изоморфны, между ними нет никакого „естественного“ изоморфизма. Правда, каждый базис $v_1, \ldots, v_n$ в V_q естественным образом определяет некоторый двойственный базис $l_1, \ldots, l_n$ в V_q^*; а именно, l_k — единственный линейный функционал, для которого $l_k(v_j) = \delta_j^k$. Далее, если заданы $v_1, \ldots, v_n$ и, следовательно, $l_1, \ldots, l_n$, то мы можем построить некоторый изоморфизм

$$c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n \to c_1 l_1 + \ldots + c_n l_n$$

V_q на V_q^*, однако этот изоморфизм зависит, вообще говоря, от выбора базиса. Только в том случае, когда мы имеем внутреннее произведение в V_q и ограничиваемся ортогональными базисами, мы получаем единственный изоморфизм. Таким образом, при использовании произвольных координат, которые мы сейчас рассматриваем, необходимо проводить тщательное разграничение между элементами V_q и элементами V_q^*. Под *ковариантным векторным полем* W на S мы будем понимать сопоставление $q \to W_q$ каждой точке $q \in S$ некоторого элемента V_q^*. Если W — ковариантное векторное поле, и L — контравариантное векторное поле, то можно для всех q образовать $W_q(L_q)$ и получить, таким образом, действительную функцию $W(L)$, определенную на S. Если $W(L) \in \mathcal{E}$ для любого контравариантного векторного поля L класса C^∞, то мы будем говорить, что W — ковариантное векторное поле класса C^∞.

Пусть $f \in \mathcal{E}$. Тогда для каждого $q \in S$ и каждого $v \in V_q$ можно образовать $f_v(q)$. При фиксированном q и переменном v это линейный функционал, т. е. существует единственный элемент $l_q \in V_q^*$, такой, что $f_v(q) = l_q(v)$ для всех $v \in V_q$. Этот линейный функционал называется *дифференциалом f в точке q* и обозначается через $(df)_q$. Ковариантное векторное поле класса C^∞, получающееся при сопоставлении $(df)_q$ каждой точке $q \in S$,

[5]) Это тождество называют также тождеством Пуассона.— *Прим. ред.*

мы будем обозначать просто df и называть *дифференциалом* f. Тот факт, что df принадлежит классу C^∞, непосредственно следует из очевидного тождества $df(L) = L(f)$.

Предположим, что $(x_1, \ldots, x_n)$ — система координат для некоторого открытого множества $\mathcal{O}$ в S. Тогда для каждого q из $\mathcal{O}$ $((dx_1)_q, \ldots, (dx_n)_q)$ — некоторый базис к естественному базису в V_q, определенному системой координат $(x_1, \ldots, x_n)$. Это следует из того, что $\partial x_i/\partial x_j = \delta^i_j$. Непосредственно видно, что компонентами df относительно этого естественного базиса в V_q^*, являются $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n$. Таким образом, (ковариантное) векторное поле df есть как раз то, что физики называют градиентом ($\mathrm{grad} f$). Поскольку $(dx_1, \ldots, dx_n)$ представляет собой базис для всех $q \in \mathcal{O}$, наиболее общее ковариантное векторное поле W класса C^∞ имеет в $\mathcal{O}$ вид $a_1\, dx_1 + \ldots + a_n\, dx_n$, где $a_1, \ldots, a_n$ — подходящие функции класса C^∞. Таким образом, самое общее ковариантное векторное поле класса C^∞, выраженное в локальных координатах, представляет собой просто формальный дифференциал. Отсюда и из известных теорем анализа непосредственно следует, что не каждое ковариантное векторное поле класса C^∞ можно представить в форме df. Те дифференциалы, для которых это возможно, называются *точными*.

Пусть V — произвольное конечномерное действительное векторное пространство. Под n раз ковариантным и m раз контравариантным тензором над V мы будем понимать действительную функцию F от $n + m$ аргументов, из которых первые n принадлежат пространству V, а последние m — пространству V^*, линейную по каждому аргументу отдельно. Например, любой элемент V^* является тензором ковариантного порядка 1 (1 раз ковариантным тензором), а элементы V можно рассматривать как элементы V^{**} и, следовательно, как тензоры контравариантного порядка 1. „Внутренним произведением“ в V называется тензор ковариантного порядка 2, обладающий дополнительными свойствами симметрии и положительной определенности.

Пусть F — произвольный тензор ковариантного порядка 2. Тогда для каждого фиксированного $v_0 \in V$ $F(v_0, v)$ как линейный функционал от v принадлежит V^*. Тем самым определено линейное отображение $\tilde{F}$ пространства V в V^*, такое, что $F(v_0, v) \equiv \tilde{F}(v_0)(v)$. Обратно, каждое линейное отображение V в V^* можно получить таким способом из некоторого тензора ковариантного порядка 2. Если $\tilde{F}$ взаимно однозначно, то мы говорим, что F невырожден. В том случае, когда F невырожден, мы можем образовать $\tilde{F}^{-1}$, которое получается аналогичным образом из некоторого тензора контравариантого порядка 2.

Под *тензорным полем* T ковариантного порядка n и контравариантного порядка m на многообразии $(S, \mathcal{E})$ класса C^∞ мы будем понимать сопоставление каждой точке q из S некоторого тензора T_q над векторным пространством V_q. Если $L_1, \ldots, L_n$ — контравариантные векторные поля, и $W_1, \ldots, W_m$ — ковариантные векторные поля, то мы можем задать функцию

$$T(L_1, \ldots, L_n, W_1, \ldots, W_m),$$

положив

$$T(L_1, \ldots, L_n, W_1, \ldots, W_m)(q) = T(v_1, \ldots, v_n, l_1, \ldots, l_m),$$

где

$$v_j = (L_j)_q \text{ и } l_k = (W_k)_q.$$

Если

$$T(L_1, \ldots, L_n, W_1, \ldots, W_m)$$

— функция класса C^∞ для любых L_j и W_k класса C^∞, то мы будем говорить, что T — тензорное поле класса C^∞. Ясно, что

$$T(f\, L_1' + \mathrm{g}\, L_1'', L_2, \ldots, L_n, W_1, \ldots, W_m) = \\ = f\, T(L_1', L_2, \ldots, L_n, W_1, \ldots, W_m) + \mathrm{g}\, T(L_1'', \ldots, L_n, W_1, \ldots, W_m)$$

для всех f и g из $\mathcal{E}$ и всех L_j и W_k, и что аналогичное тождество имеет место для каждого из остальных аргументов; другими словами, функция T линейна над $\mathcal{E}$ по каждому аргументу. Обратно, пусть T' — любая функция $n+m$ аргументов со значениями в $\mathcal{E}$, у которой первые n аргументов — контравариантные векторные поля класса C^∞, а последние m аргументов — ковариантные векторные поля класса C^∞. Мы предоставляем читателю убедиться в том, что если T' линейна над $\mathcal{E}$ по каждому аргументу, то она порождается, как показано выше, некоторым однозначно определенным тензорным полем T' класса C^∞.

Если T — тензорное поле ковариантного порядка n и контравариантного порядка m, а $q_1, \ldots, q_k$ — система координат для открытого множества $\mathcal{O} \subset S$, то $q_1, \ldots, q_k$ определяют базис $\varphi_1^q, \ldots, \varphi_k^q$ в каждом V_q и двойственный базис $l_1^q, \ldots, l_k^q$ в каждом V_q^*; значения T при этом определяются его значениями

$$A_{i_1,\ldots,i_n}^{j_1,\ldots,j_m}(q) = T(\varphi_{i_1}^q, \ldots, \varphi_{i_n}^q, l_{j_1}^q, \ldots, l_{j_m}^q)$$

на элементах этих базисов. Поэтому тензорное поле T можно описать (на множестве $\mathcal{O}$), указав значения его компонент $A_{i_1,\ldots,i_n}^{j_1,\ldots,j_m}$ при каждом q. Тензоры часто определяются именно таким образом.

Мы будем интересоваться главным образом ковариантными тензорами второго порядка, для которых отображение V_q в V_q^*, определяемое T_q, невырождено. С помощью таких тензоров можно преобразовывать ковариантное векторное поле в контравариантное и обратно. В частном случае, когда $T(L, M) = T(M, L)$ и $T(L, L) > 0$ при $L_q \neq 0$, T называется *римановой метрикой*.

Пусть W — некоторое ковариантное векторное поле на S класса C^∞. Для каждой пары L, M контравариантных векторных полей класса C^∞ мы определим функцию $\widetilde{W}(L, M)$ класса C^∞:

$$\widetilde{W}(L, M) = L(W(M)) - M(W(L)) - W([L, M]).$$

Очевидно, что $\widetilde{W}(L, M) = -\widetilde{W}(M, L)$, и почти также очевидно, что

$$\widetilde{W}(L_1 + L_2, M) = \widetilde{W}(L_1, M) + \widetilde{W}(L_2, M).$$

Мы покажем, что для всех $\theta \in \mathcal{E}$ $\widetilde{W}(\theta L, M) = \theta\widetilde{W}(L, M)$ и, следовательно, что W линейна над $\mathcal{E}$ по каждому переменному. Заметим сначала, что

$$\begin{aligned}&\theta L(W(M)) - M(W(\theta L)) = \theta L(W(M)) - M(\theta W(L)) = \\ &= \theta L(W(M)) - M(\theta)W(L) - \theta M(W(L)) = \theta\{L(W(M)) - M(W(L))\} - M(\theta)W(L).\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}[\theta L, M](f) = \theta L(M(f)) - M(\theta L(f)) = \theta L(M(f)) - M(\theta)L(f) - \theta M(L(f)) = \\ = \{\theta[L, M] - M(\theta)L\}(f),\end{aligned}$$

поэтому

$$[\theta L, M] = \theta[L, M] - M(\theta)L,$$

следовательно,

$$W([\theta L, M]) = \theta W([L, M]) - M(\theta)W(L).$$

Итак, оказывается, что $W([L, M])$ и $L(W(M)) - M(W(L))$ линейны над $\mathcal{E}$ с точностью до одного и того же поправочного члена. Поскольку $\widetilde{W}$ представляет собой разность между ними, этот член сокращается, и $\widetilde{W}$ оказывается линейным над $\mathcal{E}$. Из сформулированной

выше теоремы мы получаем теперь, что существует единственный ковариантный тензор второго порядка (который мы обозначаем через dW и называем дифференциалом W), такой, что

$$dW(L,M) \equiv \widetilde{W}(L,M) \equiv L(W(M)) - M(W(L)) - W([L,M]).$$

Ясно, что dW антисимметричен по своим двум аргументам.

Вычислим dW в частном случае, когда $W = df$. По определению $[L,M]$ мы имеем

$$\begin{aligned} dW(L,M) \equiv L(W(M)) - M(W(L)) - W([L,M]) = \\ = L(df(M)) - M(df(L)) - df([L,M]) = \\ = L(M(f)) - M(L(f)) - [L,M](f) = 0. \end{aligned}$$

Итак, необходимое условие того, что $W = df$ для некоторой f, есть $dW = 0$. Это условие не является достаточным вообще, но оно достаточно для локального представления W в виде df. Проще всего в этом убедиться, вычислив коэффициенты W в некоторой системе координат. Если $W = a_1\,dq_1 + \ldots + a_k\,dq_k$, то $dW|_{ij} = \partial a_i/\partial q_j - \partial a_j/\partial q_i$. Поэтому $dW = 0$ тогда и только тогда, когда $\partial a_i/\partial q_j = \partial a_j/\partial q_i$; из этого условия, как известно, вытекает, что $a_i = \partial f/\partial q_i$ в некоторой окрестности каждой точки.

Вообще мы говорим, что поле W *замкнуто*, если $dW = 0$. Множество всех замкнутых W есть векторное пространство, в котором точные W составляют некоторое подпространство. Размерность факторпространства зависит только от топологии S и называется первым числом Бетти многообразия S. Это число равно нулю, если S — внутренность единичного шара в E^n, и равно единице, если S — внутренность кольца [6]).

Пусть $t \to q(t)$ — „бесконечно гладкая кривая“ в S, т. е. функция, отображающая открытое связное подмножество I действительной прямой в S, такая что $f(q(t)) \in C^\infty$ для всех $f \in \mathcal{E}$. Для каждого $t_0 \in I$ отображение

$$f \to v_{t_0}(f) = \left.\frac{df(q(t))}{dt}\right|_{t=t_0},$$

очевидно, удовлетворяет условиям, содержащимся в определении касательного вектора в $q(t_0)$. Итак, $v_{t_0} \in V_q(t_0)$; мы называем v_{t_0} *касательным вектором к кривой* $q(t)$ в $q(t_0)$. Заметим, кстати, что если у нас имеется некоторая риманова метрика G_q на S, то $\sqrt{G_{q(t)}(v_t, v_t)}$ — длина вектора v_t и мы можем каждому конечному сегменту нашей кривой поставить в соответствие его длину

$$\int\limits_a^b \sqrt{G_{q(t)}(v_t, v_t)}\,dt.$$

Пусть теперь $t \to U_t$ — некоторая однопараметрическая группа автоморфизмов $(S, \mathcal{E})$; под автоморфизмом α понимается взаимно однозначное отображение S на S, такое что $f \in \mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда $f \circ \alpha \in \mathcal{E}$. Предположим, что все орбиты $t \to U_t$ на S — бесконечно гладкие кривые. Тогда поскольку каждая точка $q \in S$ лежит в точности на одной орбите, то, построив касательный вектор к орбите, проходящей через q, мы получим определенный вектор в точке q. Построенное таким образом векторное поле мы будем обозначать через L^U и называть инфинитезимальной образующей группы U. Если L^U — векторное поле класса C^∞, то мы будем говорить, что U — однопараметрическая группа класса C^∞.

[6]) Пусть, например, $W = (x\,dy - y\,dx)/(x^2 + y^2)$, а рассматриваемая область — кольцо $1 < x^2 + y^2 < 2$. В окрестности любой точки $W = d\,\mathrm{arctg}(y/x)$, но $\mathrm{arctg}(y/x)$ нельзя определить как однозначную непрерывную функцию всюду внутри кольца.

Пусть $\mathcal{O}$ — открытое подмножество S, допускающее систему координат $(q_1, \ldots, q_n)$. Тогда части орбит U, лежащие в $\mathcal{O}$, можно записать в конкретной форме: каждая орбита задается n функциями от t. Как и в разд. 1.1, эти функции удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_1}{dt} = A_1^U(q_1, \ldots, q_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dq_n}{dt} = A_n^U(q_1, \ldots, q_n),$$

где $A_1^U, \ldots, A_n^U$ — компоненты L^U относительно базиса, определяемого системой координат $q_1, \ldots, q_n$. Поэтому, согласно классической теореме единственности дифференциальных уравнений, L^U однозначно определяет U для любой однопараметрической группы U класса C^∞.

Пусть S — многообразие класса C^∞, представляющее собой „конфигурационное пространство“ некоторой физической системы [7]). Пусть $f : t \to f(t)$ — кривая класса C^∞ в S. Тогда для каждой точки t_0 вектор $v_{f(t_0)}$, касательный к f в $f(t_0)$, показывает „скорость“ системы, „движущейся“ по траектории f, при $t = t_0$. Если в некоторой системе координат $f(t) = (q_1(t), q_2(t), \ldots, q_k(t))$, то в этой системе координат вектор $v_{f(t_0)}$ имеет компоненты $\dot{q}_1(t_0), \ldots, \dot{q}_k(t_0)$. Поэтому задать все q и $\dot{q}$ все равно, что задать точку q_0 из S и вектор из V_{q_0}.

Другими словами, многообразие состояний физической системы, у которой состояния определяются заданием пространственных координат и скоростей, имеет специальный вид. Это — многообразие касательных векторов некоторого другого многообразия вдвое меньшей размерности. Более того, как мы увидим, введение импульсов вместо скоростей (p вместо $\dot{q}$) в инвариантной форме означает, что мы выбираем специальное отображение каждого V_q в V_q^* и описываем состояния с помощью элементов V_q^*. Но, прежде чем вернуться к механике, нам нужно обсудить некоторые особые свойства таких многообразий касательных векторов.

Пусть S — многообразие класса C^∞. Обозначим через S_V множество всех пар (q, v), где $v \in V_q$. Если $(q_1, \ldots, q_n)$ — система координат для открытого множества $\mathcal{O} \subset S$, то $\partial/\partial q_1, \ldots, \partial/\partial q_n$ — базис V_q для каждого $q \in \mathcal{O}$. Поэтому каждой точке $\pi^{-1}(\mathcal{O})$ естественным образом ставится в соответствие набор $2n$ действительных чисел; здесь π — отображение S_V на S, которое переводит (q, v) в q.

Мы будем говорить, что функция f, определенная на S_V, принадлежит $\mathcal{E}_V$, если она бесконечно дифференцируема в каждом множестве $\pi^{-1}(\mathcal{O})$ относительно индуцированной системы координат. Мы предоставляем читателю самостоятельно убедиться в том, что $\mathcal{E}_V$ превращает S_V в многообразие класса C^∞. Это многообразие часто называется *касательным пучком* (касательным расслоенным пространством) над S.

Если S_1 и S_2 — любые два многообразия класса C^∞, φ — некоторое отображение S_1 в S_2, то мы говорим, что φ — отображение класса C^∞, если $f \circ \varphi \in C^\infty$ на S_1 для любой функции $f \in C^\infty$ на S_2. Пусть φ — такое отображение, и $q \in S_1$. Для каждого $v \in V_q$ и произвольной функции f класса C^∞ на S_2 мы можем образовать $(f \circ \varphi)_v(q)$. Фиксируя v и меняя f, мы получаем функцию на функциях класса C^∞, определенных на многообразии S_2, которая, как нетрудно убедиться, удовлетворяет условиям, содержащимся в определении касательного вектора в точке $\varphi(q)$. Итак, существует единственный вектор $w \in V_{\varphi(q)}$, для которого $(f \circ \varphi)_v(q) \equiv f_w(\varphi(q))$. Нетрудно видеть, что w линейно

[7]) Конфигурационным пространством механической системы называется совокупность всех возможных положений этой системы (т. е. положений всех ее точек без учета их скоростей), например, для системы, состоящей из жесткого стержня, перемещающегося по плоскости, конфигурационное пространство является произведением плоскости и окружности. — *Прим. ред.*

зависит от v. Это линейное отображение V_q в $V_{\varphi(q)}$ мы будем называть дифференциалом $d\varphi|_q$ отображения φ в точке q. Если $(q_1, \ldots, q_n)$ — система координат для некоторого открытого множества $\mathcal{O} \subset S_1$, содержащего q, а $(s_1, \ldots, s_m)$ — система координат для некоторого открытого множества $\mathcal{O}' \subset S_2$, содержащего $\varphi(q)$, то φ описывается m функциями n действительных переменных $s_j = f_j(q_1, \ldots, q_n)$. Далее, эти системы координат порождают базисы в V_q и в $V_{\varphi(q)}$. Ясно, что матрица $d\varphi|_q$ относительно этих базисов имеет вид $\| \, \partial f_j/\partial q_k|_q \, \|$.

Пусть теперь $S_1 = S_V, S_2 = S$ и $\varphi = \pi$. Тогда для каждой точки $(s, v) \in S_1$ дифференциал $d\pi_{(s,v)}$ отображает $V_{s,v}$ линейно в (в действительности на) V_s. Если L — любое контравариантное векторное поле класса C^∞ на S_V, мы можем применить $d\pi_{(s,v)}$ к $L_{(s,v)}$ и получить некоторый элемент V_s. Для каждого фиксированного s мы имеем, следовательно, некоторое отображение $v \to d\pi_{(s,v)}(L_{(s,v)})$ из V_s в V_s. Обозначим это отображение T_s^L. Мы будем называть контравариантное векторное поле L *специальным*, если это отображение является тождественным для всех s, т. е. если $d\pi_{(s,v)}(L_{(s,v)}) = v$ для всех s и v. Если $(q_1, \ldots, q_n)$ — система координат для открытого подмножества $\mathcal{O} \subset S$, а $q_1, \ldots, q_n, w_1, \ldots, w_n$ — соответствующая система координат для $\pi^{-1}(\mathcal{O})$, то система обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующая наиболее общему контравариантному векторному полю L на S_V, имеет следующий вид:

$$\frac{dq_j}{dt} = B_j(q_1, \ldots, q_n, w_1, \ldots, w_n),$$
$$\frac{dw_j}{dt} = A_j(q_1, \ldots, q_n, w_1, \ldots, w_n).$$

Мы предоставляем читателю убедиться в том, что L является специальным тогда и только тогда, когда

$$B_j(q_1, \ldots, q_n, w_1, \ldots, w_n) \equiv w_j \text{ для всех } j.$$

Но системы уравнений первого порядка вида

$$\frac{dq_j}{dt} = w_j, \quad \frac{dw_j}{dt} = A_j(q_1, \ldots, q_n, w_1, \ldots, w_n),$$

— это в точности те системы, которые получаются из систем второго порядка

$$\frac{d^2 q_j}{dt^2} = A_j\Big(q_1, \ldots, q_n, \frac{dq_1}{dt}, \ldots, \frac{dq_n}{dt}\Big)$$

введением вспомогательных переменных $w_j = dq_j/dt$. Итак, инвариантно определенным математическим объектом, соответствующим системе дифференциальных уравнений второго порядка класса C^∞ на S, является специальное контравариантное векторное поле класса C^∞ на S_V.

Пусть $\mathcal{L}$ — функция класса C^∞ на S_V, и $t \to \theta(t)$ — некоторая кривая класса C^∞ на S. Для каждого t обозначим касательный вектор к кривой $\theta(t)$ через $\theta'(t)$. Тогда для всех t пара $(\theta(t), \theta'(t))$ принадлежит S_V, и мы можем рассматривать функцию $\mathcal{L}(\theta(t), \theta'(t))$ переменного t и ее интеграл между фиксированными пределами. В координатах этот интеграл имеет вид

$$\int_a^b \mathcal{L}(q_1(t), \ldots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_n(t))\, dt.$$

Отсюда видно, что понятие касательного пучка S_V, составляет естественную основу для инвариантного описания задач вариационного исчисления, встречающихся в формулировке принципа Гамильтона.

Множество S_{V^*} всех пар (q, w), где $w \in V_q^*$, может быть превращено в многообразие класса C^∞ совершенно тем же образом, как S_V. Это многообразие мы будем называть

кокасательным пучком на S; отображение $(q, w) \to q$ класса C^∞ мы по-прежнему обозначаем через π. Используя отображение $d\pi$, мы можем выбрать некоторое специальное векторное поле класса C^∞ на S_{V^*}, которое будет играть центральную роль в формулировке законов механики. Это поле определяется следующим образом. Для каждой точки $(q, w) \in S_{V^*}$ отображение $d\pi_{(q,w)}$ является линейным отображением $V_{(q,w)}$ на V_q. Сопряженное отображение $(d\pi)^*_{(q,w)}(w)$ представляет собой линейное отображение V_q^* на $V^*_{(q,w)}$. Это линейное отображение переводит элемент $w \in V_q^*$ в некоторый элемент поля $V^*_{(q,w)}$. Таким образом мы каждой точке $(q, w) \in S_{V^*}$ ставим в соответствие некоторый элемент $V^*_{(q,w)}$ и получаем тем самым некоторое ковариантное векторное поле. Мы будем называть его *фундаментальным ковариантным векторным полем многообразия* и обозначать через W^0.

Пусть $(q_1, \ldots, q_n)$ — некоторая система координат для открытого множества $\mathcal{O}$ и $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ — соответствующая система координат для $\pi^{-1}(\mathcal{O})$. Тогда наиболее общее векторное поле на $\pi^{-1}(\mathcal{O}) \subset S_{V^*}$ можно записать в виде

$$a_1\, dq_1 + \ldots + a_n\, dq_n + b_1\, dp_1 + \ldots + b_n\, dp_n,$$

где все a и b являются функциями p и q. Нетрудно вычислить a и b для W^0. Поскольку

$$\pi(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = (q_1, \ldots, q_n),$$

$d\pi$ в каждой точке имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix};$$

матрица $(d\pi)^*$ получается из этой матрицы транспонированием. Следовательно, $(d\pi_{(q,p)})^*(p) = (p, 0)$, т. е. $a_j = p_j$ и $b_j = 0$. Другими словами, $W^0 = p_1\, dq_1 + \ldots + p_n\, dq_n$. Отсюда, в частности, следует, что W^0 является ковариантным векторным полем класса C^∞ и мы можем образовать антисимметрическое ковариантное тензорное поле dW^0 второго порядка класса C^∞. Нетрудно подсчитать, что матрица dW^0 в тех же координатах имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \\ \hline -1 & & & & & & & \\ & -1 & & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & -1 & & & & \end{array}\right),$$

так что dW^0 нигде не вырождено.

Пусть для каждого контравариантного векторного поля L на S_{V^*} класса C^∞ через $\tilde{L}$ обозначено ковариантное векторное поле, такое, что $\tilde{L}(M) = dW^0(L, M)$ для всех контравариантных векторных полей M класса C^∞. Из невырожденности dW^0 следует, что отображение $L \to \tilde{L}$ множества контравариантных векторных полей класса C^∞ на S_{V^*}, на множество ковариантных векторных полей класса C^∞ на S_{V^*} взаимно однозначно и является отображением на все множество. Мы будем использовать тот же знак $\sim$ для обратного отображения, так что $\tilde{\tilde{L}} = L$. Если

$$L = a_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \ldots + a_n \frac{\partial}{\partial q_n} + b_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + \ldots + b_n \frac{\partial}{\partial p_n},$$

то, как нетрудно видеть,

$$\tilde{L} = b_1\,dq_1 + \ldots + b_n\,dq_n - a_1\,dp_1 - \ldots - a_n\,dp_n.$$

Если f и g — функции класса C^∞ на S_{V^*}, то мы можем образовать функцию $dW^0(\widetilde{df}, \widetilde{d\mathrm{g}})$, которую мы будем сокращенно обозначать через $[f, \mathrm{g}]$. В терминах p и q мы имеем

$$[f, \mathrm{g}] = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial q_1} - \ldots - \frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial q_n},$$

т. е. скобку Пуассона функций f и g.

Отображение $L \to \tilde{L}$ контравариантных векторных полей на ковариантные позволяет перенести имеющуюся классификацию ковариантных векторных полей (замкнутые поля — те, для которых $dW = 0$, точные поля — те, для которых $W = dH$) на контравариантные векторные поля. Мы будем называть контравариантное векторное поле L *гамильтоновым в целом, если* $L = \widetilde{dH}$, и *локально гамильтоновым*, если $L = \widetilde{W}$, где $dW = 0$. Локально гамильтоновое векторное поле можно представить в виде $\widetilde{dH}$ в некоторой окрестности каждой точки, но при этом может не существовать функции, которая годилась бы для всего многообразия. Во всяком случае, дифференциальные уравнения, определяемые таким векторным полем, имеют так называемую „форму Гамильтона“:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Пусть U и V — однопараметрические группы класса C^∞ автоморфизмов S_{V^*}; предположим, что их инфинитезимальные образующие L^U и L^V являются гамильтоновыми в целом, т. е. $L^U = \widetilde{df}$ и $L^V = \widetilde{d\mathrm{g}}$. Тогда скорость изменения g вдоль орбит U равна

$$L^U(\mathrm{g}) = \widetilde{df}(\mathrm{g}) = dW^0(\widetilde{df}, \widetilde{d\mathrm{g}}) = [f, \mathrm{g}].$$

Таким образом, скобки Пуассона имеют ту же интерпретацию, что и в разд. 1.2.

Однопараметрические группы U класса C^∞, инфинитезимальные образующие которых L^U являются локально гамильтоновыми, могут быть коротко охарактеризованы следующим образом. Это именно те группы, у которых U_t и оставляют dW^0 инвариантным. Другими словами, назовем автоморфизм A многообразия S_{V^*} класса C^∞ *контактным преобразованием*, если $(dA)_{q,w}$ отображает $V_{q,w}$ на $V_{A(q,w)}$ таким образом, что $(dW^0)_{q,w}$ переходит в $(dW^0)_{A(q,w)}$; тогда имеет место теорема (которую мы не будем доказывать), утверждающая, что инфинитезимальная образующая однопараметрической группы $t \to U_t$ локально гамильтонова тогда и только тогда, когда каждое U_t является контактным преобразованием. Поэтому локально гамильтоновы контравариантные векторные поля на S_{V^*} иногда называют инфинитезимальными контактными преобразованиями.

Мы подготовлены теперь к тому, чтобы вернуться к физике и обобщить законы механики системы точек, сформулированные в разд. 1.2. Вместо того чтобы предполагать, что $3n$ координат наших n точек принадлежат некоторому открытому подмножеству E^{3n}, мы предполагаем только что они принадлежат некоторому подмножеству $\mathcal{M}$, которое становится многообразием класса C^∞, если за $\mathcal{E}$ принять множество всех ограничений на $\mathcal{M}$ функций класса C^∞ в E^{3n}. Например, мы можем задать $n(n-1)/2$ констант c_{ij} и в качестве $\mathcal{M}$ взять множество всех наборов $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$, таких, что

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = c_{ij}.$$

Для того чтобы допустить еще более общий случай, например такой, когда пространство является не „плоским“, а „кривым“, мы будем просто считать, что задано абстрактное

множество $\mathcal{M}$ „возможных конфигураций“, и что $\mathcal{M}$ является многообразием класса C^∞ относительно некоторого множества $\mathcal{E}$ действительных функций на $\mathcal{M}$. Если $t \to \varphi(t)$ — кривая на $\mathcal{M}$, описывающая некоторое возможное изменение конфигурации системы во времени, то касательный вектор $\varphi'(t)$ служит мерой скорости изменения системы в момент времени t. Действительно, если $(q_1, \ldots, q_n)$ — локальная система координат, так что $t \to \varphi(t)$ описывается (локально) n функциями $q_1(t), \ldots, q_n(t)$, то производные этих функций в точке t_0 служат координатами $\varphi'(t_0)$. В соответствии с нашим прежним предположением, что будущее системы определяется координатами и скоростями в один фиксированный момент времени, мы предполагаем теперь, что $\varphi(t_0)$ и $\varphi'(t_0)$ вместе определяют будущее. Это означает, что множество состояний нашей системы можно отождествить с множеством точек касательного пучка $\mathcal{M}_V$. Мы исключаем из рассмотрения так называемые неголономные системы, предполагая, что *каждая* точка $\mathcal{M}_V$ является возможным состоянием. Мы будем по-прежнему предполагать, что наша система обратима и для удобства будем считать, что динамическая группа $t \to U_t$ является однопараметрической группой класса C^∞, хотя столь сильное ограничение и не является необходимым. Конечно, из нашего определения состояний следует, что инфинитезимальная образующая L^U группы $t \to U_t$ будет специальным контравариантным векторным полем на $\mathcal{M}_V$.

В соответствии с нашими предположениями (1)–(3), сделанными в разд. 1.2 относительно ускорений A_j, мы примем здесь одно предположение, которое одновременно и обобщает и включает все существенные требования, содержащиеся в (1)–(3). Пусть T — произвольная риманова метрика на $\mathcal{M}$ класса C^∞. Тогда для каждой точки $q \in \mathcal{M}$ метрика T_q определяет линейное отображение $\widetilde{T}_q$ пространства V_q на V_q^*. Используя эти отображения, мы можем построить взаимно однозначное отображение $B^T : \mathcal{M}_V \to \mathcal{M}_{V^*}$, положив $B^T(q, v) = (q, \widetilde{T}_q(v))$. Ясно, что B^T и обратное отображение принадлежат классу C^∞. Поэтому $t \to U_t^T = B^T U_t (B^T)^{-1}$ — однопараметрическая группа автоморфизмов $\mathcal{M}_{V^*}$ класса C^∞. Наше основное предположение заключается в следующем.

На $\mathcal{M}$ существует такая риманова метрика T, что группа $t \to U_t^T$ имеет гамильтонову в целом инфинитезимальную образующую.

Пусть H — та функция класса C^∞ на $\mathcal{M}_{V^*}$, для которой $\widetilde{dH}$ является требуемой инфинитезимальной образующей; функция H, конечно, определяется однозначно с точностью до аддитивной постоянной и называется гамильтонианом нашей системы. Мы увидим, что она определяет не только U^T, но и метрику T и, следовательно, первоначальную динамическую группу нашей системы.

Пусть $q_1, \ldots, q_n$ — система координат для открытого множества $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ и $(q_1, \ldots, q_n, v_1, \ldots$ — соответствующая система координат для $\pi^{-1}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{M}_V$. Пусть

$$T_q(v_1, \ldots, v_n, v_1', \ldots, v_n') = \sum_{i,j} \mathrm{g}_{ij}(q_1, \ldots, q_n)\, v_i\, v_j';$$

тогда

$$(\widetilde{T}_q(v_1, \ldots, v_n))_i = \sum_j \mathrm{g}_{ij}(q_1, \ldots, q_n)\, v_j$$

и

$$(\widetilde{T}_q^{-1}(p_1, \ldots, p_n))_i = \sum_j \mathrm{g}'_{ij}(q_1, \ldots, q_n)\, p_j,$$

где координаты p_i в пространстве V_q^* двойственны к координатам v в пространстве V_q и

$$\|\mathrm{g}'_{ij}(q_1, \ldots, q_n)\| = \|\mathrm{g}_{ij}(q_1, \ldots, q_n)\|^{-1}.$$

Мы имеем

$$(B^T)^{-1}(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = \Big(q_1, \ldots, q_n, \sum_j \mathrm{g}'_{1j}\, p_j, \ldots, \sum_j \mathrm{g}'_{nj}\, p_j\Big),$$

поэтому равенство $dq_i/dt = v_i$ превращается в равенство

$$\frac{dq_i}{dt} = \sum_j \mathrm{g}'_{ij}\, p_j.$$

Поскольку, кроме того, $dq_i/dt = \partial H/\partial p_i$, мы имеем

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum \mathrm{g}'_{ij}\, p_j,$$

откуда

$$H = \frac{1}{2} \sum \mathrm{g}'_{ij}\, p_i\, p_j + \mathcal{V},$$

где $\mathcal{V}$ — функция только переменных q_i. Пусть для каждого $q \in \mathcal{M}$ символ T_q^0 обозначает контравариантный тензор второго порядка, который переводит w и w' из V_q^* в $\widetilde{T}_q^{-1}(w)(w')$. Тогда мы видим, что H имеет следующий вид:

$$H(q, w) = \frac{1}{2}\, T_q^0(w, w') + \mathcal{V}(q),$$

где $\mathcal{V}$ — некоторая функция класса C^∞ на $\mathcal{M}$. Конечно, H однозначно определяет функцию $\mathcal{V}(q) = H(q, 0)$; следовательно, H определяет T^0 и вместе с ним метрику T. Задание же T и $\mathcal{V}$ полностью определяет движение системы.

Предположения (1)–(3), как нетрудно видеть, эквивалентны требованию, что метрика T не только существует, но и имеет специальный вид $\sum\limits_{j=1}^{3n} m_j\, v_j\, v'_j$, где m_j — константы. Метрика T, так же как m_j, определяется не единственным образом; несколько различных T могут соответствовать одной и той же системе; другими словами две совершенно различные функции Гамильтона H могут приводить к одной и той же однопараметрической группе в $\mathcal{M}_V$. С другой стороны, во многих важных случаях T определяется однозначно с точностью до постоянного множителя. Более того, во всех случаях, когда в выборе T имеется больший произвол, его можно устранить, допустив, что наша система взаимодействует с некоторыми другими системами. Существенная неоднозначность в выборе T возникает только тогда, когда мы изолируем слишком малую часть физического мира.

Наш основной закон можно сформулировать эквивалентным образом без введения многообразия $\mathcal{M}_{V^*}$. Пусть $\mathcal{L}$ — любая функция класса C^∞ на $\mathcal{M}_V$ и $q : t \to q(t)$ — некоторая кривая класса C^∞ на $\mathcal{M}$. Тогда если a и b ($a \leqslant b$) принадлежат области определения функции $q(t)$, то мы можем образовать

$$\int\limits_a^b \mathcal{L}(q(t), q'(t))\, dt.$$

Если на кривой $q(t)$ этот интеграл принимает стационарное значение (в обычном смысле вариационного исчисления) относительно всех кривых q с теми же концами, $q(t)$ является *экстремалью* функции $\mathcal{L}$. Теорема, доказательство которой мы опускаем, утверждает, что проекции на $\mathcal{M}$ орбит нашей гамильтоновой динамической группы U являются экстремалями функции

$$\mathcal{L}(q, v) = \frac{1}{2}\, T_q(v, v) - \mathcal{V}(q).$$

Обратно, пусть U_t — произвольная однопараметрическая группа автоморфизмов $\mathcal{M}_V$ класса C^∞, и $\mathcal{L}$ — некоторая функция на $\mathcal{M}_V$ класса C^∞ вида

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\, T_q(v, v) - \mathcal{V}(q),$$

где T — риманова метрика на $\mathcal{M}$, и $\mathcal{V}$ — действительная функция на $\mathcal{M}$. Если проекции орбит U на $\mathcal{M}$ являются экстремалями $\mathcal{L}$, то $t \to U_t^T$ имеет гамильтонову в целом инфинитезимальную образующую. Действительно, мы можем принять

$$\frac{1}{2}\, T_q^0(w, w) + \mathcal{V}(q)$$

за функцию Гамильтона на $\mathcal{M}_{V^*}$. Функция $\mathcal{L}$ называется лагранжианом системы, формулировку основного ограничения, налагаемого на U, в терминах экстремальных свойств $\mathcal{L}$ можно рассматривать, конечно, как более общую форму принципа Гамильтона, упомянутого в разд. 1.2. Естественно, мы можем рассматривать экстремальные свойства любых интегралов вида

$$\int\limits_a^b \mathcal{L}(q(t), q'(t))\, dt,$$

где $\mathcal{L}$ — произвольная функция на $\mathcal{M}_V$ класса C^∞, не обязательно квадратичная на V_q. Кроме того, разумеется, существуют гамильтоновы в целом векторные поля класса C^∞ на $\mathcal{M}_{V^*}$, для которых соответствующая функция H не квадратична на V_q^*. Оказывается, что соответствие между экстремалями вариационных задач и интегральными кривыми гамильтоновых в целом векторных полей класса C^∞ имеет место в значительно более общей ситуации, чем рассмотренная выше. Мы ограничимся здесь описанием перехода от $\mathcal{L}$ к H в том частном случае, когда имеется соответствующее взаимно однозначное отображение $\mathcal{M}_V$ на $\mathcal{M}_{V^*}$.

Рассмотрим прежде всего конечномерное векторное пространство V. Касательным пространством многообразия V класса C^∞ в любой точке является само V. Поэтому любое ковариантное векторное поле класса C^∞ на V является в то же время отображением класса C^∞ V в V^* [8]).

Пусть $\mathcal{L}$ — произвольная действительная функция на V класса C^∞, такая, что ковариантное векторное поле $d\mathcal{L}$ класса C^∞ задает взаимно однозначное отображение V на V^* Нетрудно показать, что $(d\mathcal{L})^{-1}$ имеет вид $d\mathcal{L}^0$ для некоторой функции $\mathcal{L}^0$ класса C^∞ на V^* и что произвольную постоянную в $\mathcal{L}^0$ можно выбрать так, чтобы выполнялось равенство

$$\mathcal{L}^0(l) = l(\psi(l)) - \mathcal{L}(\psi(l)),$$

где $\psi = (d\mathcal{L})^{-1}$. При этом мы, конечно, отождествляем V и V^{**}. Далее, $\mathcal{L}^{00} = \mathcal{L}$. Поэтому $\mathcal{L} \to \mathcal{L}^0$ представляет собой взаимно однозначное соответствие между некоторыми функциями класса C^∞ на V и некоторыми функциями класса C^∞ на V^* [9]).

Пусть теперь $\mathcal{L}$ — некоторая функция класса C^∞ на $\mathcal{M}_V$, которая при каждом фиксированном $q \in \mathcal{M}$ как функция на V_q удовлетворяет указанному выше условию. Мы можем образовать функцию $(\mathcal{L}_q)^0$ на V_q^*; тогда $(q, w) \to (\mathcal{L}_q)^0(w)$ будет функцией класса C^∞ на $\mathcal{M}_{V^*}$, которую мы обозначим $\mathcal{L}^0$. По-прежнему $\mathcal{L}^{00} = \mathcal{L}$. Нетрудно усмотреть, что если $\mathcal{L}$ — лагранжиан динамической системы, то $\mathcal{L}^0$ — ее гамильтониан.

Когда мы, используя нашу основную риманову метрику T, отображаем $\mathcal{M}_V$ на $\mathcal{M}_{V^*}$, мы можем рассматривать $\mathcal{M}_{V^*}$ как пространство всех состояний и будем называть его в этом случае *фазовым пространством* системы. Действительные функции на $\mathcal{M}_{V^*}$ мы будем называть *наблюдаемыми* или *динамическими переменными*.

Теперь мы можем без труда обобщить остальные рассуждения разд. 1.2.

Функции

$$\mathcal{V}(q), \quad \frac{1}{2}\, T_q(w, w), \quad \mathcal{V}(q) + \frac{1}{2}\, T_q(w, w)$$

[8]) Это отображение принадлежит классу C^∞ но, вообще говоря, не является линейным. — *Прим. ред.*

[9]) Переход от функции $\mathcal{L}$ на V к функции $\mathcal{L}^0$ на V^* называется преобразованием Лежандра; см., например, Гельфанд И. М., Фомин С. В., Вариационное исчисление, Физматгиз, М., 1961. — *Прим. перев.*

— это наблюдаемые, которые называются соответственно потенциальной, кинетической и полной энергией системы. Наблюдаемая, постоянная на орбитах динамической группы U (которую мы считаем теперь действующей на $\mathcal{M}_{V^*}$), называется интегралом системы. Некоторая наблюдаемая f класса C^∞ является интегралом тогда и только тогда, когда $[f, H] = 0$. В частности, $[H, H] = 0$, так что полная энергия $H = \mathcal{V} + {}^1/_2 T$ является интегралом. Вообще если $\widetilde{df}$ — инфинитезимальная образующая группы U^f автоморфизмов $\mathcal{M}_{V^*}$, то f является интегралом тогда и только тогда, когда H постоянна на орбитах U^f.

Пусть $t \to A_t$ — произвольная однопараметрическая группа автоморфизмов $\mathcal{M}$, и L^A — ее инфинитезимальная образующая. Каждое преобразование A_t является автоморфизмом $\mathcal{M}$, т. е. $(dA_t)_q$ отображает V_q линейно на $V_{A_t(q)}$. $((dA_t)_q^*)^{-1}$ отображает V_q^* линейно на $V_{A_t(q)}^*$. Поэтому

$$(q, w) \to (A_t(q), ((dA_t)_q^*)^{-1}(w))$$

является взаимно однозначным отображением A_t^0 многообразия $\mathcal{M}_{V^*}$ на $\mathcal{M}_{V^*}$. Очевидно, что $t \to A_t^0$ — однопараметрическая группа автоморфизмов $\mathcal{M}_{V^*}$. Мы называем ее группой, порожденной A_t.

Рассмотрим теперь инфинитезимальную образующую L^A группы A_t. Она сопоставляет каждой точке q из $\mathcal{M}$ вектор v из V_q. Будем рассматривать вектор v как линейную функцию на V_q^*. Таким образом, L^A определяет некоторую функцию на $\mathcal{M}_{V^*}$: $(q, w) \to L_q^A(w)$, которую мы обозначим φ^{L^A}. Имеет место теорема, согласно которой $\widetilde{d\varphi}^{L^A} = L^{A^0}$ (доказательство мы предоставляем читателю). Другими словами, инфинитезимальная образующая группы A^0, порожденной группой A, гамильтонова в целом, а та функция на $\mathcal{M}_{V^*}$, дифференциал которой определяет эту образующую, совпадает с φ^{L^A}. Функции на $\mathcal{M}_{V^*}$, которые линейны на всех V_q^*, называются обобщенными импульсами. Мы можем получить интеграл нашей системы, линейный на каждом V_q^*, из любой однопараметрической группы A в $\mathcal{M}$, которая оставляет T и $\mathcal{V}$ неизменными. Такие интегралы мы будем, как и выше, называть линейными интегралами импульсов.

Из всего изложенного следует, что для того, чтобы описать реальную физическую систему, достаточно описать пространство $\mathcal{M}$ всех конфигураций и задать риманову метрику T на $\mathcal{M}$ и потенциал $\mathcal{V}$. После этого сразу же может быть выписана инфинитезимальная образующая системы, и предсказание будущего поведения системы сводится к задаче (часто весьма сложной) интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В заключение этого раздела приведем несколько примеров.

В небесной механике $\mathcal{M}$ является $3n$-мерным евклидовым пространством всех координат n рассматриваемых планет, а кинетическая и потенциальная энергия выражаются так:

$$T(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, v_1, \ldots, v_{3n}) = m_1(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + \ldots + m_n(v_{3n-2}^2 + v_{3n-1}^2 + v_{3r}^2$$

$$\mathcal{V}(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = -\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} G \frac{m_i m_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}}.$$

где m_i и G — константы, определяемые из опыта [10]). Строго говоря, сформулированная выше теория не применима к этому случаю, поскольку функция $\mathcal{V}$ имеет особенности. Однако этот недостаток можно устранить, изменив $\mathcal{V}$ при очень малых значениях расстояний так, чтобы сделать столкновение невозможным. При $n = 2$ получающиеся дифференциальные уравнения могут быть полностью проинтегрированы. В результате

[10]) В действительности m_i — половина массы i-й точки, а G — учетверенная гравитационная постоянная. — *Прим. ред.*

оказывается, что планеты двигаются по фиксированным орбитам около общего центра тяжести. Эти орбиты являются в зависимости от начальных условий эллипсами, параболами или гиперболами. Для $n > 2$ известны только отдельные частные результаты.

В обычной механике наклонных плоскостей, рычагов, блоков, волчков и т. д. мы снова имеем конечную систему материальных частиц с координатами $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$, но здесь имеются определенные связи, так что $\mathcal{M}$ является подмногообразием E^{3n} класса C^∞. Если ось z выбрана перпендикулярно к поверхности Земли, то функция $\mathcal{V}$ является ограничением на $\mathcal{M}$ функции

$$m_1 z_1 + \ldots + m_n z_n,$$

а T — ограничением на $\mathcal{M}_V$ функции

$$m_1(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + \ldots + m_n(v_{3n-2}^2 + v_{3n-1}^2 + v_{3n}^2).$$

В динамике обычного „твердого тела“ $\mathcal{M}$ — шестимерное многообразие, которое получается при пересечении $n(n-1)/2$ $(3n-1)$-мерных гиперповерхностей вида

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = d_{ij},$$

где все d_{ij} — константы.

1.4 Колебания, волны и гильбертово пространство

Пусть (q, w) — стационарная точка фазового пространства динамической системы, т. е. $U_t(q, w) = (q, w)$ для всех t. Это имеет место тогда и только тогда, когда $w = 0$ и $(d\mathcal{V})_q = 0$. Точки многообразия $\mathcal{M}$, в которых $d\mathcal{V}$ обращается в нуль, называются *точками равновесия* системы. Условие $(d\mathcal{V})_q = 0$ необходимо (но недостаточно) для того, чтобы $\mathcal{V}$ имела локальный максимум или локальный минимум в точке q. Чтобы узнать, имеет ли $\mathcal{V}$ максимум или минимум, нужно рассмотреть билинейную форму B_q на V_q, матрица которой в некоторой системе координат имеет вид $\|\partial^2\mathcal{V}/\partial q_i \partial q_j\|$. [В инвариантной форме $B(L, M) = L(M(\mathcal{V}))$. Значение $B(L, M)$ в точке q зависит только от L_q и M_q.]

Если $B_q(v, v) > 0$ при всех $v \neq 0$, то форма называется положительно определенной, и $\mathcal{V}$ имеет локальный минимум в точке q. В этом случае кинетическая энергия в точке q будет больше, чем в любой близкой точке; если систему слегка вывести из состояния равновесия q, она не сможет уйти далеко от этого состояния, так как при этом ее кинетическая энергия и, следовательно, вектор скорости должны были бы обратиться в нуль. В соответствии с этим мы будем называть q точкой *устойчивого* равновесия. Если движение начнется вблизи такой точки (с достаточно малой начальной скоростью), то система будет оставаться около этой точки в течение всего движения.

Далее, многообразие вблизи каждой точки можно аппроксимировать касательным пространством; если же $\mathcal{M}$ представляет собой линейное пространство, и точка q расположена в начале координат, то T можно аппроксимировать тензором с постоянными коэффициентами, а функцию $\mathcal{V}$ — квадратичной формой, входящей в разложение этой функции по формуле Тейлора. Другими словами „малые“ колебания произвольной системы около точки устойчивого равновесия можно изучать как движение системы со следующими свойствами:

(1) $\mathcal{M}$ — конечномерное векторное пространство,

(2) $\mathcal{V}$ — положительно определенная квадратичная форма,

(3) T_q не зависит от q.

Такую механическую систему мы будем называть *линейной системой*.

Пусть $\mathcal{M}, \mathcal{V}, T$ образуют линейную систему. Тогда V_q в каждой точке q можно естественным образом отождествить с $\mathcal{M}$, и, следовательно, $\mathcal{M}_V = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}$ тоже является