оказывается, что планеты двигаются по фиксированным орбитам около общего центра тяжести. Эти орбиты являются в зависимости от начальных условий эллипсами, параболами или гиперболами. Для $n > 2$ известны только отдельные частные результаты.

В обычной механике наклонных плоскостей, рычагов, блоков, волчков и т. д. мы снова имеем конечную систему материальных частиц с координатами $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$, но здесь имеются определенные связи, так что $\mathcal{M}$ является подмногообразием E^{3n} класса C^∞. Если ось z выбрана перпендикулярно к поверхности Земли, то функция $\mathcal{V}$ является ограничением на $\mathcal{M}$ функции

$$m_1 z_1 + \ldots + m_n z_n,$$

а T — ограничением на $\mathcal{M}_V$ функции

$$m_1(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + \ldots + m_n(v_{3n-2}^2 + v_{3n-1}^2 + v_{3n}^2).$$

В динамике обычного „твердого тела“ $\mathcal{M}$ — шестимерное многообразие, которое получается при пересечении $n(n-1)/2$ $(3n-1)$-мерных гиперповерхностей вида

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = d_{ij},$$

где все d_{ij} — константы.

1.4 Колебания, волны и гильбертово пространство

Пусть (q, w) — стационарная точка фазового пространства динамической системы, т. е. $U_t(q, w) = (q, w)$ для всех t. Это имеет место тогда и только тогда, когда $w = 0$ и $(d\mathcal{V})_q = 0$. Точки многообразия $\mathcal{M}$, в которых $d\mathcal{V}$ обращается в нуль, называются *точками равновесия* системы. Условие $(d\mathcal{V})_q = 0$ необходимо (но недостаточно) для того, чтобы $\mathcal{V}$ имела локальный максимум или локальный минимум в точке q. Чтобы узнать, имеет ли $\mathcal{V}$ максимум или минимум, нужно рассмотреть билинейную форму B_q на V_q, матрица которой в некоторой системе координат имеет вид $\|\partial^2\mathcal{V}/\partial q_i \partial q_j\|$. [В инвариантной форме $B(L, M) = L(M(\mathcal{V}))$. Значение $B(L, M)$ в точке q зависит только от L_q и M_q.]

Если $B_q(v, v) > 0$ при всех $v \neq 0$, то форма называется положительно определенной, и $\mathcal{V}$ имеет локальный минимум в точке q. В этом случае кинетическая энергия в точке q будет больше, чем в любой близкой точке; если систему слегка вывести из состояния равновесия q, она не сможет уйти далеко от этого состояния, так как при этом ее кинетическая энергия и, следовательно, вектор скорости должны были бы обратиться в нуль. В соответствии с этим мы будем называть q точкой *устойчивого* равновесия. Если движение начнется вблизи такой точки (с достаточно малой начальной скоростью), то система будет оставаться около этой точки в течение всего движения.

Далее, многообразие вблизи каждой точки можно аппроксимировать касательным пространством; если же $\mathcal{M}$ представляет собой линейное пространство, и точка q расположена в начале координат, то T можно аппроксимировать тензором с постоянными коэффициентами, а функцию $\mathcal{V}$ — квадратичной формой, входящей в разложение этой функции по формуле Тейлора. Другими словами „малые“ колебания произвольной системы около точки устойчивого равновесия можно изучать как движение системы со следующими свойствами:

(1) $\mathcal{M}$ — конечномерное векторное пространство,

(2) $\mathcal{V}$ — положительно определенная квадратичная форма,

(3) T_q не зависит от q.

Такую механическую систему мы будем называть *линейной системой*.

Пусть $\mathcal{M}, \mathcal{V}, T$ образуют линейную систему. Тогда V_q в каждой точке q можно естественным образом отождествить с $\mathcal{M}$, и, следовательно, $\mathcal{M}_V = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}$ тоже является

векторным пространством. Аналогично $\mathcal{M}_{V^*} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^*$. Поскольку $\mathcal{M}_{V^*}$ является векторным пространством, оно может быть отождествлено со своим касательным пространством в произвольной точке, и ковариантное тензорное поле dW^0 сопоставляет каждой точке $\mathcal{M}_{V^*}$ некоторый билинейный функционал на $\mathcal{M}_{V^*}$. Нетрудно установить, что dW^0 постоянно и переводит (x_1, l_1, x_2, l_2) в $l_1(x_2) - l_2(x_1)$.

Если принять положительно определенную билинейную форму T за внутреннее произведение, то $\mathcal{M}$ становится конечномерным гильбертовым пространством. Пусть $\mathcal{V}^0(\varphi, \psi)$ — билинейная форма, соответствующая квадратичной форме $\mathcal{V}(\varphi) = \mathcal{V}^0(\varphi, \varphi)$. Мы можем обычным способом привести квадратичную форму $\mathcal{V}^0(\varphi, \varphi)$ „к главным осям“ относительно скалярного произведения $T(\varphi, \psi)$. Для этого заметим, что для каждого фиксированного $\varphi \in \mathcal{M}$ соответствие $\psi \to \mathcal{V}^0(\psi, \varphi)$ — линейный функционал по ψ, поэтому существует вектор φ', для которого $T(\psi, \varphi') = \mathcal{V}^0(\psi, \varphi)$; ясно, что φ' линейно зависит от φ, так что мы можем положить $\varphi' = {}^1/_2 F(\varphi)$, где F — некоторый однозначно определенный линейный оператор из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{M}$. Поскольку

$$\mathcal{V}(\varphi) = \frac{1}{2}\, T(F(\varphi), \varphi) = \frac{1}{2}\, T(\varphi, F(\varphi)),$$

мы видим, что наша система вполне определяется заданием T и оператора F. Далее, поскольку

$$T(F(\varphi), \psi) = T(F(\psi), \varphi) = T(\varphi, F(\psi)),$$

оператор F *самосопряжен* относительно скалярного произведения T. Согласно известной теореме из линейной алгебры, в $\mathcal{M}$ существует базис $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, для которого $T(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_i^j$ и $F(\varphi_j) = \lambda_j \varphi_j$, где λ_j действительны и положительны; положительность, конечно, следует из положительной определенности $T(F(\varphi), \psi)$. В системе координат на $\mathcal{M}$, определенной этим базисом, имеем

$$\mathcal{V}(q_1, \ldots, q_n) = \frac{1}{2}\, \lambda_1 q_1^2 + \ldots + \frac{1}{2}\, \lambda_n q_n^2$$

и

$$\begin{aligned} H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = \\ = \frac{1}{2}\, p_1^2 + \ldots + \frac{1}{2}\, p_n^2 + \frac{1}{2}\, \lambda_1 q_1^2 + \ldots + \frac{1}{2}\, \lambda_n q_n^2 = \\ = \frac{1}{2}\, (p_1^2 + \lambda_1 q_1^2) + \ldots + \frac{1}{2}\, (p_n^2 + \lambda_n q_n^2). \end{aligned}$$

Поэтому уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{p}_i = -\lambda_i q_i, \;\; \dot{q}_i = p_i.$$

Отсюда $\ddot{q}_i = -\lambda_i q_i$ и $q_i = a_i \sin(\sqrt{\lambda_i} t - \theta_i)$, где a_i и θ_i зависят от начальных условий.

Отметим несколько следствий. В любой линейной системе:

(1) координаты q_i изменяются независимо друг от друга; система представляет собой объединение n независимых систем, у каждой из которых пространство конфигураций одномерно;

(2) координата q_i колеблется от $-a_i$ до a_i и обратно с частотой ν_i, не зависящей от начальных условий и равной $\sqrt{\lambda_i}/2\pi$;

(3) изменение начальных условий вызывает изменение только амплитуд a_i, (величин колебаний) и фаз (моментов времени, когда q_i достигает максимума и минимума), но не влияет на форму этих „простых гармонических“ колебаний.

Частоты $\nu_i = \sqrt{\lambda_i}/2\pi$ называются основными, или характеристическими, частотами системы.

Следует подчеркнуть, что „нормальные координаты“, которые совершают независимые простые гармонические колебания, никаким естественным образом не связаны с ортогональными координатами первоначальных частей. С другой стороны, полная энергия первоначальной системы в состоянии с нормальными координатами $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ равна

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(p_j^2 + \lambda_j q_j^2) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\, a_j^2\,[\sin^2(\sqrt{\lambda_j}\,t - \theta_j) + \cos^2(\sqrt{\lambda_j}\,t - \theta_j)] = \sum_{j=1}^{n} 2\pi^2\nu_j^2\, a_j^2$$

и зависит только от амплитуд колебаний нормальных координат. Заметим вдобавок, что на каждой орбите движения постоянна не только полная энергия, но и каждая ее часть $2\pi^2\nu_j^2 a_j^2$, соответствующая определенной нормальной координате. Мы можем говорить поэтому о „спектральном разложении“ энергии системы на каждой определенной орбите (или в определенном состоянии). Это часто выражают с помощью *меры*, заданной на положительной части действительной оси: мера множества E равна

$$\sum_{\nu_j \in E} 2\pi^2\nu_j^2\, a_j^2.$$

Теперь мы хотим вернуться к заданной нам линейной системе и изучить ее движение в целом, не прибегая к помощи нормальных координат. Из уравнений $\dot{q}_i = p_i$, $\dot{p}_i = -\lambda_i q_i$ мы получаем, что $\ddot{q}_i = -\lambda_i q_i$, или, в инвариантной форме, $\ddot{\varphi} = -F(\varphi)$. Это уравнение можно получить, конечно, в любой системе координат или сразу в инвариантной форме. Соответствующее уравнение первого порядка на $\mathcal{M}_V = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}$ имеет вид

$$\frac{d}{dt}(\varphi, \theta) = (\theta, -F(\varphi)).$$

Если векторное пространство рассматривается как многообразие класса C^∞, то контравариантными векторными полями на нем являются просто функции, отображающие это векторное пространство в себя; поэтому можно говорить о линейных контравариантных векторных полях. Из последнего уравнения мы видим, что динамическая группа в $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}$ имеет *линейную* инфинитезимальную образующую $(\varphi, \theta) \to (\theta, -F(\varphi))$. Отсюда сразу же следует, что динамическая группа в $\mathcal{M}_{V^*} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^*$ также линейна (поскольку каноническое отображение $\mathcal{M}_V$ в $\mathcal{M}_{V^*}$ линейно).

Пусть X — конечномерное действительное векторное пространство, и A — произвольное линейное преобразование X в X. Для любого полинома P с действительными коэффициентами мы можем образовать $P(A)$ с помощью формальной подстановки и получим таким образом гомоморфизм $P \to P(A)$ кольца всех полиномов на подкольцо кольца всех линейных преобразований X в X.

Более общим образом для любой действительной функции $f(x)$, разлагающейся во всюду сходящийся степенной ряд $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ соответствующий ряд $a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots$, как нетрудно видеть, также сходится и дает нам вполне определенный оператор $f(A)$. Соответствие $f \to f(A)$ — снова гомоморфизм колец. В частности, e^{tA} имеет смысл для всех действительных t и удовлетворяет тождеству $e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_1 A} \cdot e^{t_2 A}$. Таким образом, $t \to e^{tA}$ — однопараметрическая группа невырожденных линейных преобразований X в X. Она, конечно, является группой класса C^∞, если рассматривать X как многообразие класса C^∞, и ее инфинитезимальной образующей служит *линейное* контравариантное векторное поле $\varphi \to A(\varphi)$.

Таким образом, группа $t \to e^{At}$ дает явное решение дифференциального уравнения, определяемого произвольным линейным контравариантным векторным полем A. Почти очевидно, что любая однопараметрическая группа класса C^∞ невырожденных линейных преобразований имеет линейную инфинитезимальную образующую; на самом деле

можно показать, что любая однопараметрическая группа линейных преобразований, по крайней мере измеримая по t, принадлежит классу C^∞.

В рассматриваемом случае наша динамическая группа сохраняет некоторое положительно определенное скалярное произведение [11]):

$$((\varphi,\theta)|(\varphi,\theta)) = H(\varphi,\theta) = \frac{1}{2}\,T(F(\varphi),\varphi) + \frac{1}{2}\,T(\theta,\theta).$$

Мы можем вообще найти условия, при которых e^{At} сохраняет некоторое скалярное произведение $(\varphi|\psi)$ в X. Из элементарной теории векторных пространств известно, что $(B\varphi|B\psi) = (\varphi|\psi)$ для всех φ и ψ тогда и только тогда, когда $B^* = B^{-1}$; оператор B, обладающий этим свойством, называется ортогональным (относительно заданного скалярного произведения). Далее, как всегда в операторном исчислении, $f(A^*) = (f(A))^*$, так что оператор e^{At} ортогонален тогда и только тогда, когда $e^{A^*t} = (e^{At})^{-1} = e^{(-A)t}$. Итак, $t \to e^{At}$ — однопараметрическая группа ортогональных преобразований тогда и только тогда, когда $A^* = -A$, т. е. когда A *кососимметричен*.

Пусть A — произвольный невырожденный кососимметрический оператор. Тогда A^2 симметричен, т. е. самосопряжен. Более того,

$$(-A^2\varphi|\psi) = (-A\varphi|A^*\varphi) = (A^*\varphi|A^*\varphi) > 0,$$

т. е. $-A^2$ не только самосопряжен, но имеет только положительные собственные значения. Поэтому $-A^2 = B^2$, где B самосопряжен, имеет только положительные собственные значения и коммутирует со всеми операторами, которые коммутируют с A. Положим $J = AB^{-1}$; тогда $J^2 = -I$, $J^* = -J$ и J коммутирует с A. Превратим X в комплексное векторное пространство, положив $i\varphi = J(\varphi)$; тогда A будет линейным оператором в этом комплексном пространстве. Положим

$$(\varphi|\psi)_1 = (\varphi|\psi) - i(J\varphi|\psi);$$

тогда

$$(\varphi|\psi)_1 = (\overline{\psi|\varphi})_1, \quad (\varphi|\varphi)_1 = (\varphi|\varphi) > 0 \text{ для } \varphi \neq 0,$$

и

$$(i\varphi|\psi)_1 = (J\varphi|\psi) - i(J^2\varphi|\psi) = i(\varphi|\psi) + (J\varphi|\psi) = i(\varphi|\psi)_1.$$

Поэтому $(\varphi|\psi)_1$ — скалярное произведение, которое превращает X в *комплексное* конечномерное гильбертово пространство. Поскольку

$$(Je^{At}\varphi|e^{At}\psi) = (e^{At}J\varphi|e^{At}\psi) = (J\varphi|\psi),$$

группа e^{At} оставляет форму $(\varphi|\varphi)_1$ инвариантной и является, таким образом, однопараметрической группой *унитарных преобразований*. Инфинитезимальный оператор A кососопряжен (т. е. $A^* = -A$) относительно $(\varphi|\varphi)_1$, и мы можем положить $A = iB$, где B самосопряжен.

Подведем итог. Инфннитезимальной образующей однопараметрической группы ортогональных преобразований в конечномерном действительном гильбертовом пространстве X является кососимметрический линейный оператор A. Если A невырожден, то можно превратить X в комплексное гильбертово пространство таким образом, что старое действительное скалярное произведение будет действительной частью нового комплексного скалярного произведения, а A по-прежнему будет кососимметричным и линейным. Умножение на i в X можно определить так, что $-iA$ будет положительно определенным самосопряженным оператором, и этим условием комплексная структура определяется однозначно.

[11]) Скалярное произведение векторов ξ и η в гильбертовом пространстве всюду в этой книге обозначается символом $(\xi|\eta)$. — *Прим. перев.*

Мы можем считать, что наша динамическая система определяется заданием конечномерного действительного гильбертова пространства X и самосопряженного оператора F на $\mathcal{M}$, причем гамильтонианом системы служит функция

$$(\varphi, \theta) \to \frac{1}{2}(\theta|\theta) + \frac{1}{2}(F(\varphi)|\varphi) \text{ на } \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}.$$

В действительном векторном пространстве мы можем, конечно, не учитывать разницу между $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^*$. Кососимметричная инфинитезимальная образующая A динамической группы переводит (φ, θ) в $(\theta, -F(\varphi))$, так что A^2 переводит (φ, θ) в $(\theta, -F(\theta))$. Таким образом, $-A^2$ есть в точности оператор F, очевидным образом распространенный с $\mathcal{M}$ на $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}$. Если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — попарно ортогональные векторы в $\mathcal{M}$, для которых $F(\varphi_j) = \lambda_j \varphi_j$, то $B^2(\varphi_j, 0) = \lambda_j(\varphi_j, 0)$ и $B(\varphi_j, 0) = \sqrt{\lambda_j}(\varphi_j, 0)$. Далее, $(\varphi_j, 0)$ ортогональны в пространстве $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}$, рассматриваемом как комплексное гильбертово пространство. Поэтому самосопряженный оператор $-iA$ имеет числа $\sqrt{\lambda_j} = 2\pi\nu_j$ своими собственными значениями. Таким образом, мы можем превратить фазовое пространство нашей системы в комплексное гильбертово пространство так, что

(1) значение гамильтониана на каждом векторе равно половине квадрата нормы;

(2) динамическая группа является однопараметрической группой унитарных преобразований;

(3) если записать эту группу в форме $t \to e^{2\pi i t B}$, то собственными значениями самосопряженного оператора B будут основные частоты системы.

Если бы мы попытались распространить содержание разд. 1.3 на системы с бесконечным числом степеней свободы — колеблющиеся струны, мембраны и т. п., — то мы встретили бы трудности технического характера, возникающие из-за отсутствия достаточно общей теории единственности для уравнений с частными производными, а также из-за отсутствия очевидной „естественной“ топологии в соответствующих бесконечномерных пространствах. С другой стороны, сравнительно высоко развитая теория линейных операторов в бесконечномерных векторных пространствах позволяет провести достаточно полное обобщение результатов, полученных выше в настоящем разделе. Получающаяся при этом теория применима к описанию „малых“ колебаний в сплошных средах, а также электромагнитного поля и, по крайней мере формально, очень близко примыкает к квантовой механике.

Мы начнем с краткого обзора (без доказательств) некоторых основных фактов математической теории линейных операторов в гильбертовом пространстве. Пусть X — вещественное или комплексное гильбертово пространство, которое теперь уже не предполагается обязательно конечномерным. Пусть $(\varphi|\psi)$ — скалярное произведение в X, т. е. функция двух переменных, линейная по первому переменному и такая, что $(\varphi|\varphi) > 0$ для $\varphi \neq 0$ и $(\varphi|\psi) = (\overline{\psi|\varphi})$. Мы будем предполагать, что X — *сепарабельное* гильбертово пространство в том смысле, что оно является полным и сепарабельным метрическим пространством относительно метрики $\rho(\varphi, \psi) = \sqrt{(\varphi - \psi|\varphi - \psi)}$. Эти условия, конечно, автоматически удовлетворяются, если X конечномерно. Нам будут нужны линейные операторы, которые не определены всюду на X и не непрерывны. Однако мы будем обычно рассматривать только такие операторы, область определения которых плотна в X (т. е. имеет своим замыканием все X). Нетрудно проверить, что линейный оператор непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен в том смысле, что отношение $\|T(\varphi)\|/\|\varphi\|$ ограничено, когда φ пробегает все ненулевые элементы X. Если ограниченный линейный оператор определен на плотном множестве, то он имеет единственное ограниченное расширение на все пространство X. Мы будем поэтому предполагать, если не оговорено противное, что все линейные ограниченные операторы определены всюду.

Для фиксированного $\psi \in X$ соответствие $\varphi \to (\varphi|\psi)$ задает непрерывное линейное отображение X во множество комплексных чисел, т. е. непрерывный линейный функционал на X. Можно доказать, обратно, что каждый непрерывный линейный функционал

на X представляется в таком виде, причем соответствующий элемент ψ определяется однозначно. Таким образом, имеется естественное взаимно однозначное отображение X на X^* — множество всех непрерывных функционалов на X. Пусть T — любой ограниченный оператор на X; тогда функция $\varphi \to (T(\varphi)|\psi)$ линейна и непрерывна при каждом фиксированном ψ. Поэтому для каждого ψ существует единственный элемент ψ^*, такой что $(T(\varphi)|\psi) = (\varphi|\psi^*)$ для всех $\varphi \in X$; элемент ψ^* линейно зависит от ψ; это линейное преобразование обозначается через T^* и называется сопряженным к T. Ясно, что оператор T^* ограничен и что $T^{**} = T$. Как и в конечномерном случае T называется самосопряженным, если $T^* = T$, и кососопряженным, если $T^* = -T$. Так же, как и в конечномерном случае, T является взаимно однозначным отображением на все пространство, сохраняющим норму, тогда и только тогда, когда $T^*T = TT^* = I$, т. е. $T^* = T^{-1}$. Такие операторы T называются *унитарными*.

Интересно рассмотреть обобщение понятия самосопряженности (и кососопряженности) на такие операторы, которые не определены на всем X и не ограничены. Пусть T линеен и определен на плотном в X подпространстве D. Тогда произведение $(T(\varphi)|\psi)$ определено для всех ψ в X и всех φ в D, но уже не обязано быть непрерывным по φ при каждом фиксированном ψ, поскольку оператор T не непрерывен. С другой стороны, это произведение может оказаться непрерывным для некоторых ψ даже в том случае, когда оператор T не непрерывен.

Пусть D^* — множество всех ψ, для которых функционал $(T(\varphi)|\psi)$ непрерывен по φ. Для каждого $\psi \in D^*$ этот линейный непрерывный функционал, определенный на D, может быть однозначно продолжен на все пространство и поэтому определяет некоторый элемент ψ^* в X: $(T(\varphi)|\psi) = (\varphi|\psi^*)$. По-прежнему мы принимаем ψ^* за $T^*(\psi)$, но оператор T^* теперь не обязательно определен всюду. Если $D^* = D$ и $T(\varphi) = T^*(\varphi)$ для всех φ из $D = D^*$, мы говорим, что T самосопряжен. Кососопряженность определяется аналогично. Заметим, что выполнения условия $(T(\varphi)|\psi) = (\varphi|T(\psi))$ для всех φ и ψ из D не достаточно для самосопряженности. Из него следует только, что $D \subseteq D^*$ и $T(\varphi) = T^*(\varphi)$ для всех $\varphi \in D$. Такие операторы T называются *симметричными*.

Не всегда бывает возможно расширить область определения симметричного оператора так, чтобы он стал самосопряженным; в тех случаях, когда такое продолжение возможно, оно не всегда единственно. Симметричный оператор, который имеет единственное самосопряженное расширение, называется *существенно самосопряженным*. Если $X = \mathfrak{L}^2(-\infty, +\infty)$, и T — оператор, который ставит в соответствие каждой непрерывно дифференцируемой функции, равной нулю вне конечного интервала, ее производную, умноженную на i, то T симметричен, но не самосопряжен. Он становится самосопряженным, если распространить его на все абсолютно непрерывные функции из $\mathfrak{L}^2(-\infty, +\infty)$, производные которых также принадлежат $\mathfrak{L}^2(-\infty, +\infty)$. Можно доказать, что самосопряженный оператор, определенный на всем X, ограничен.

Под ортогональным дополнением $M^\perp$ замкнутого подпространства $M \subseteq X$ понимается множество всех таких векторов θ, для которых $(\theta|\varphi) = 0$ для всех $\varphi \in M$. Можно показать, что $M^{\perp\perp} = M$ и что каждый вектор $\theta \in X$ можно единственным образом представить в виде $\theta = \theta_1 + \theta_2$, где $\theta_1 \in M$ и $\theta_1 \in M^\perp$. Ясно, что θ_1, „составляющая“ вектора θ в M, линейно зависит от θ. Мы пишем $\theta_1 = P_M(\theta)$. Читатель без труда докажет, что P_M — ограниченный самосопряженный оператор, который является „идемпотентным“, т. е. $P_M^2 = P_M$.

Обратно, пусть P — ограниченный линейный самосопряженный идемпотентный оператор. Тогда множество значений P совпадает с нулевым подпространством оператора $I - P$ и является замкнутым подпространством M пространства X. Поскольку

$$\varphi = P(\varphi) + (\varphi - P(\varphi))$$

и

$$(\varphi - P(\varphi)|P(\theta)) = (P(\varphi) - P^2(\varphi)|\theta) = 0,$$

мы видим, что $P = P_M$. Поэтому имеется естественное взаимно однозначное соответствие между ограниченными самосопряженными идемпотентами, с одной стороны, и замкнутыми подпространствами — с другой. По очевидным причинам самосопряженный идемпотентный оператор, ассоциированный с данным замкнутым подпространством, называется (ортогональным) *проектором* на это подпространство, и произвольный ограниченный самосопряженный идемпотентный оператор называется проектором.

Пусть P_1 и P_2 — проекторы на M_1 и M_2 соответственно. Тогда $M_1 \perp M_2$ (т. е. $M_1 \subseteq M_2^\perp$ и $M_2 \subseteq M_1^\perp$) тогда и только тогда, когда $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$. Мы говорим тогда, что P_1 и P_2 ортогональны. Более общим образом, если $P_1P_2 = P_2P_1$, то $P_1P_2 = P_3, P_1 - P_3, P_2 - P_3$ тоже являются проекторами: эти три проектора попарно ортогональны. Вообще если $P_1, \ldots, P_n$ — проекторы, которые попарно коммутируют между собой, то, образуя всевозможные произведения из P_j и $I - P_k$, мы получаем семейство проекторов $P'_1, \ldots, P'_r$, которые попарно ортогональны, и каждый из проекторов P_j однозначно представляется в виде суммы $P'_{i_1} + \ldots + P'_{i_s}$. Отсюда следует, что каждое семейство коммутирующих проекторов порождает булеву алгебру проекторов, в которой $P_1 \cap P_2 = P_1P_2$, $P_1 \cup P_2 = P_1 + P_2 - P_1P_2$ и $P' = I - P$.

Пусть теперь $P_1, \ldots, P_n$ — попарно ортогональные проекторы, такие что $I = P_1 + \ldots + P_n$. Тогда каждый вектор φ в X можно однозначно представить в виде $\varphi_1 + \ldots + \varphi_n$, где φ_j лежит в подпространстве M_j, на которое проектирует P_j, именно $\varphi_j = P_j(\varphi)$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — произвольные различные действительные числа. Тогда

$$A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j$$

— ограниченный самосопряженный оператор. Нетрудно видеть, что для некоторого комплексного числа λ ненулевой вектор $\theta \in X$, для которого $A(\theta) = \lambda\theta$, существует тогда и только тогда, когда λ равно одному из λ_j, и все соответствующие векторы составляют множество значений P_j. Поэтому для оператора A, представленного в указанной выше форме, λ_j и P_j определены однозначно. Когда X конечномерно, каждый самосопряженный оператор может быть представлен в такой форме, но для бесконечномерного пространства это далеко не так, даже если пользоваться бесконечными суммами. Пусть $X = \mathcal{L}^2(S, \mu)$, где μ — мера на множестве S. Пусть g — некоторая ограниченная измеримая вещественная функция на S и $A_{\mathrm{g}}(f) = \mathrm{g}f$. Тогда A_{g} — ограниченный самосопряженный оператор, причем $A_{\mathrm{g}}(f) = \lambda f$ тогда и только тогда, когда $(\mathrm{g} - \lambda)f = 0$ почти всюду на S. Если g принимает каждое свое значение только на множестве меры нуль, то $f = 0$ почти всюду и является нулевым элементом пространства X. Отсюда сразу видно, что существует много примеров ограниченных самосопряженных операторов, не имеющих ни одного собственного вектора. С другой стороны, нетрудно обобщить разложение $A = \sum \lambda_j P_j$ на любой самосопряженный оператор, если представить его несколько иначе.

Для каждого борелевского [12]) множества E на действительной прямой обозначим через P_E сумму $P_{i_1} + P_{i_2} + \ldots + P_{i_r}$, где $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_r} \in E$, а остальные λ_j не входят в E. Тогда соответствие $E \to P_E$ вполне определяет проекторы P_j и собственные числа λ_j. Действительно, если $\{\lambda\}$ означает множество, состоящее из одной точки λ, то $P_{\{\lambda\}} \neq 0$

[12]) Борелевские множества по определению представляют собой элементы наименьшего семейства множеств, которое содержит все открытые множества и обладает следующими двумя свойствами:

(1) дополнение любого множества из этого семейства принадлежит семейству;

(2) пересечение $A_1 \cap A_2 \cap \ldots$ любой счетной последовательности множеств из этого семейства также принадлежит семейству.

тогда и только тогда, когда $\lambda = \lambda_j$ для некоторого j, и соответствующий проектор $P_{\{\lambda_j\}}$ равен P_j. Далее, это соответствие обладает следующими свойствами:

(1) $P_E P_F = P_{E\cap F}$ для всех E и F;

(2) $P_\varnothing = 0$; $P_R = I$, где R — вся действительная прямая;

(3) $P_E = P_{E_1} + P_{E_2} + \ldots$, если $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots$ и $E_i \cap E_j = 0$ при $i \neq j$.

Здесь $P_{E_1} + P_{E_2} + \ldots$ означает проектор P, определенный равенством $P\varphi = P_{E_1}\varphi + P_{E_2}\varphi + \ldots$ для всех $\varphi \in X$, или, что эквивалентно, проектор на замкнутое линейное пространство, порожденное подпространствами, на которые проектируют $P_1, P_2, \ldots$. Любая функция, которая ставит в соответствие борелевским множествам проекторы в некотором гильбертовом пространстве и обладает свойствами (1)–(3), называется *проекторной мерой*. Пусть $P : E \to P_E$ — произвольная проекторная мера. Тогда для каждого вектора φ из X соответствие $E \to (P_E(\varphi)|\varphi)$ будет обычной неотрицательной мерой на действительной прямой, и мы можем образовать интегралы $\int f(x)\, d\alpha(x)$, где $\alpha(E) = (P_E(\varphi)|\varphi)$. Мы будем записывать этот интеграл так: $\int f(x)\, d(P_x(\varphi)|\varphi)$. Нетрудно видеть, что для рассмотренной выше проекторной меры P, соответствующей оператору $A = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j P_j$,

$$\int x\, d(P_x(\varphi)|\varphi) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (P_j(\varphi)|\varphi) = (A(\varphi)|\varphi).$$

Поскольку оператор A однозначно определяется квадратичной формой $(A(\varphi)|\varphi)$, мы получили формулу, выражающую A непосредственно через проекторную меру P без введения проекторов P_j.

Пусть теперь $P : E \to P_E$ — произвольная проекторная мера, ограниченная в том смысле, что P_J — тождественный оператор для некоторого конечного интервала J. Мы можем задать квадратичную форму $B(\varphi, \varphi)$ на X, положив

$$B(\varphi, \varphi) = \int x\, d(P_x(\varphi)|\varphi)$$

для всех $\varphi \in X$. Далее можно показать, что существует единственный ограниченный самосопряженный оператор в X, такой, что

$$(A^P(\varphi)|\varphi) = B(\varphi, \varphi) = \int x\, d(P_x(\varphi)|\varphi) \text{ для всех } \varphi \text{ из } X.$$

Вообще для любой неограниченной проекторной меры P существует единственный неограниченный самосопряженный оператор A^P, определенный на множестве всех φ, для которых $\int x^2\, d(P_x(\varphi)|\varphi) < \infty$ и такой, что для всех векторов φ из этого множества

$$(A^P\varphi|\varphi) = B(\varphi, \varphi) = \int x\, d(P_x(\varphi)|\varphi).$$

Спектральная теорема представляет собой обращение этого утверждения, а именно: любой самосопряженный оператор имеет вид A^P для некоторой однозначно определенной проекторной меры P (спектральной меры данного оператора). Нетрудно показать, что оператор A^P ограничен тогда и только тогда, когда ограничена мера P. В частном случае, когда X имеет ортогональный базис $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, состоящий из собственных векторов оператора A, т. е. $A(\varphi_j) = \lambda_j \varphi_j$, мера P сосредоточена на множестве $E = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$, т. е. P_E — тождественный оператор в X. Обратно, если существует счетное множество $E = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$, такое, что $P_E = I$, то X имеет базис, состоящий из собственных векторов оператора A с собственными значениями λ_j. В этом случае говорят, что A имеет *чисто точечный спектр*.

Часто бывает полезным представлять себе спектральную теорему несколько иначе. В частном случае, когда $X = \mathcal{L}^2(S, \mu)$ и $A(f) = \mathrm{g}f$, где g — действительная измеримая функция, доказательство спектральной теоремы сравнительно тривиально. Действительно, можно непосредственно убедиться в том, что соответствующая проекторная мера P сопоставляет каждому множеству E проектор $f \to \psi f$, где $\psi(s) = 1$, если $\mathrm{g}(s) \in E$, и $\psi(s) = 0$, если $\mathrm{g}(s) \notin E$. С другой стороны, этот случай не является слишком частным, как это может показаться. Можно доказать, что для заданного самосопряженного оператора A в X существует такая линейная изометрия $V : X \to \mathcal{L}^2(S, \mu)$, что VAV^{-1} имеет вид $f \to f\mathrm{g}$. Это утверждение можно рассматривать как усиленную форму спектральной теоремы, поскольку спектральная теорема непосредственно из него вытекает, но провести доказательство в обратном направлении не так просто. Читателю будет полезно убедиться в справедливости этой формы спектральной теоремы в частном случае, когда оператор A имеет чисто точечный спектр.

Пользуясь спектральной теоремой, нетрудно придать смысл выражению $\mathrm{g}(A)$, где g — действительная борелевская функция действительного переменного и оператор A самосопряжен. Пусть P — проекторная мера, соответствующая оператору A. Для каждого борелевского множества на действительной прямой положим $P'_E = P_{\mathrm{g}^{-1}(E)}$. Тогда $E \to P'_E$ — проекторная мера, и мы определяем $\mathrm{g}(A)$, как соответствующий самосопряженный оператор. Можно показать, что отображение $\mathrm{g} \to \mathrm{g}(A)$ сохраняет суммы и произведения и что оператор $\mathrm{g}(A)$ ограничен тогда и только тогда, когда функция g ограничена на дополнении некоторого множества E, для которого $P_E = 0$. В частности, $\sin tA$ и $\cos tA$ ограничены для всех действительных t и всех самосопряженных A. Поэтому оператор

$$e^{itA} = \cos tA + i \sin tA$$

определен в любом комплексном гильбертовом пространстве. Ясно, что e^{itA} — однопараметрическая группа унитарных операторов, непрерывная в том смысле, что $(e^{itA}(\varphi)|\psi)$ непрерывная функция t для всех φ и ψ из X.

Обратно, пусть $t \to U_t$ — произвольная однопараметрическая унитарная группа. Согласно фундаментальной теореме Стона, существует единственный самосопряженный оператор A, такой, что $e^{itA} = U_t$ для всех t. Итак, в бесконечномерном комплексном гильбертовом пространстве сохраняется взаимно однозначное соответствие между однопараметрическими унитарными группами и самосопряженными операторами (при этом допускаются и неограниченные операторы).

Если X — действительное гильбертово пространство, то умножение на i не имеет смысла, и мы не можем образовать e^{itA}. С другой стороны, если оператор A кососопряжен, то оператор A^2 самосопряжен, и мы можем построить $\mathrm{g}(A)$, где g — любая четная функция. Но поскольку любую функцию можно представить в виде $\mathrm{g}(x) = h_1(x) + xh_2(x)$, где h_1 и h_2 — четные, то мы можем положить $\mathrm{g}(A) = h_1(A) + Ah_2(A)$. В частности, можно построить e^{tA} и показать, что эти операторы образуют однопараметрическую группу ортогональных преобразований.

Обратно, мы можем применить теорему Стона и показать, что каждая непрерывная однопараметрическая группа ортогональных преобразований в действительном гильбертовом пространстве имеет вид e^{tA}, где оператор A кососопряжен. Наконец, если A имеет обратный оператор и самосопряжен, можно, так же как и в конечномерном случае, дополнить X до комплексного гильбертова пространства так, что A будет комплексно линейным кососопряженным оператором, и новая норма векторов будет равна старой.

Возвращаясь к физике, мы начнем изучение систем с бесконечномерным конфигурационным пространством с изучения системы, состоящей из счетного множества независимых систем, рассматриваемых как единая система. Пусть $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots$ — конфигурационные пространства этих независимых систем, которые мы для определенности и для простоты будем считать линейными. Тогда фазовым пространством, соответствующим

каждому $\mathcal{M}_j$, будет $\mathcal{M}_j \oplus \mathcal{M}_j^*$, и динамическая группа U^j будет однопараметрической группой линейных преобразований $t \to U_t^j$ в $\mathcal{M}_j \oplus \mathcal{M}_j^*$. Конфигурационным пространством объединенной системы будет при этом множество $\mathcal{M}$ всех бесконечных последовательностей $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, где $\varphi_j \in \mathcal{M}_j$; движения в $\mathcal{M}$ описываются однопараметрической группой $t \to U_t$ в фазовом пространстве Λ всех бесконечных последовательностей $\varphi_1, l_1, \varphi_2, l_2, \ldots$, где $(\varphi_j, l_j) \in \mathcal{M}_j \oplus \mathcal{M}_j^*$, причем, конечно,

$$U_t(\varphi_1, l_1, \varphi_2, l_2, \ldots) = (U_t^1(\varphi_1, l_1), U_t^2(\varphi_2, l_2), \ldots).$$

До сих пор все обстоит благополучно. Однако, если мы пойдем дальше простого описания движения системы и попытаемся ввести гамильтониан системы или рассматривать Λ как кокасательный пучок над $\mathcal{M}$, мы встретимся с затруднениями. Пространство $\mathcal{M}$ естественным образом является векторным, но $\mathcal{M}^*$ — сопряженное пространство к $\mathcal{M}$ — не совпадает со множеством всех последовательностей $l_1, l_2, \ldots$, где $l_j \in \mathcal{M}_j^*$. Действительно, $l_1(\varphi_1) + l_2(\varphi_2) + \ldots$ имеет смысл для всех $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ из $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда $l_j = 0$ для всех j, кроме конечного числа. Таким образом, Λ, естественное фазовое пространство, не есть $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^*$. Если бы у нас было только конечное число систем $(\mathcal{M}_j, U^j)$, и функция H^j была бы гамильтонианом системы $(\mathcal{M}_j, U^j)$, то функция

$$H(\varphi_1, l_1, \varphi_2, l_2, \ldots, \varphi_n, l_n) = H^1(\varphi_1, l_1) + H^2(\varphi_2, l_2) + \ldots + H^n(\varphi_n, l_n)$$

была бы гамильтонианом системы $(\mathcal{M}, U)$. Однако в нашем случае имеется бесконечное число слагаемых, и ряд, вообще говоря, не будет сходиться. Конечно, функция Гамильтона определена только с точностью до аддитивной постоянной и, подбирая эту постоянную специальным образом для каждой функции H^j, мы можем добиться того, чтобы ряд из H^j сходился на подмножестве Λ, включающем траекторию любой заданной точки. Однако, по-видимому, не существует функции H, которая бы описывала движение всей системы в целом. Лучшее, что мы можем сделать, это разложить Λ на непересекающиеся множества, которые инвариантны относительно движений, и на каждом из которых определена некоторая функция Гамильтона.

Однако теперь, чтобы перейти от одного подмножества Λ, имеющего функцию Гамильтона, к другому, придется менять полную энергию системы на „бесконечную величину“. Это наводит на мысль, что только одно из этих непересекающихся множеств имеет физический смысл и что нужно принять за фазовое пространство подмножество, содержащее $0, 0, 0, \ldots$. Если это сделать, то конфигурационное пространство также сузится и станет подмножеством $\widetilde{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}$, состоящим из всех последовательностей $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, для которых

$$\mathcal{V}^1(\varphi_1, \varphi_1) + \mathcal{V}^2(\varphi_2, \varphi_2) + \ldots < \infty,$$

где $\mathcal{V}^j$ — скалярное произведение в $\mathcal{M}_j$, определяемое потенциальной энергией. Фазовым пространством становится $\widetilde{\mathcal{M}} \oplus \widetilde{\widetilde{\mathcal{M}}}$, где $\widetilde{\widetilde{\mathcal{M}}}$ — множество всех последовательностей $l_1, l_2, \ldots$, для которых

$$T^1(l_1, l_1) + T^2(l_2, l_2) + \ldots < \infty,$$

где T^j — скалярное произведение в M_j^*, определяемое кинетической энергией. При этом $\widetilde{\widetilde{\mathcal{M}}}$ еще нельзя отождествить с сопряженным пространством к $\widetilde{\mathcal{M}}$, и мы не можем без дальнейших изменений провести рассуждения, связанные с функцией Гамильтона в конечномерном случае.

Самым существенным во всех этих рассуждениях является, конечно, тот факт, что они дают алгоритм перехода от единственной функции на фазовом пространстве к инфинитезимальной образующей динамической группы. Мы дадим сейчас такой алгоритм, применимый к некоторому классу линейных систем; этот класс включает рассматриваемый случай, а также все конечномерные линейные системы.

Пусть $\mathcal{M}$ — действительное векторное пространство, которое мы будем считать „плотным“ в нашем пока еще не определенном конфигурационном пространстве. Пусть $\mathcal{V}$ и T — положительно определенные скалярные произведения на $\mathcal{M}$, которые мы считаем потенциальной и кинетической энергией соответственно. Пополняя $\mathcal{M}$ по нормам $\sqrt{\mathcal{V}(\varphi,\varphi)}$, $\sqrt{T(\varphi,\varphi)}$, $\sqrt{\mathcal{V}(\varphi,\varphi)+T(\varphi,\varphi)}$, получим соответственно гильбертовы пространства $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$, $\mathcal{M}_T$, $\overline{\mathcal{M}}$. Поскольку третья норма больше первых двух, каждое из первых двух пространств естественным образом является расширением $\overline{\mathcal{M}}$. Если оба эти расширения положительно определены (мы рассмотрим только этот случай), то $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$ и $\mathcal{M}_T$ можно рассматривать как пополнения $\overline{\mathcal{M}}$.

Пусть $\mathcal{H}$ — действительное гильбертово пространство $\mathcal{M}_{\mathcal{V}} \oplus \mathcal{M}_T$, и пусть оператор J определен следующим образом: $J(\varphi)$ определен, если $\varphi \in \overline{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}_T$, причем $J(\varphi) = \varphi$, где φ в правой части рассматривается как элемент $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$. Таким образом, оператор J имеет плотные область определения и множество значений, лежащие соответственно в $\mathcal{M}_T$ и $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$. Тогда J^* — сопряженный оператор — определен на множестве таких $\theta \in \mathcal{M}_{\mathcal{V}}$, для которых функционал $\varphi \to \mathcal{V}(J(\varphi),\theta)$ непрерывен по норме $\mathcal{M}_T$. Таким образом, $J^*(\theta)$ — единственный вектор $\theta^* \in \mathcal{M}_T$, такой, что $\mathcal{V}(J(\varphi),\theta) = T(\varphi,\theta^*)$. Нетрудно убедиться, что J^* определен на плотном подмножестве $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$ и что $J^{**} = J$. Заметим, что, поскольку скалярные произведения T и $\mathcal{V}$ различны, J^* ни в каком смысле не является тождественным оператором. Легко проверить, что оператор A в $\mathcal{H}$, который переводит (φ,ψ) в $(J(\varphi),-J^*(\psi))$ (если J и J^* определены на этих векторах), кососопряжен. Группа $t \to e^{At}$, действующая в фазовом пространстве $\mathcal{H}$, и является той динамической группой, которую наш алгоритм сопоставляет „лагранжиану“ $\mathcal{V}$, T.

Нетрудно видеть, что для всех φ из $\overline{\mathcal{M}}$ мы имеем $\mathcal{V}(\varphi,\varphi) = T(J^*(\varphi),\varphi)$; поэтому ограничение J^* на $\overline{\mathcal{M}}$ — это тот самый оператор, который позволяет выразить $\mathcal{V}$ через T и который мы в конечномерном случае (см. стр. 32) обозначали через F. Для того чтобы подробнее выяснить связь предложенного выше алгоритма с нашими прежними результатами, нам удобнее будет рассмотреть другой оператор, а именно единственный самосопряженный оператор в $\overline{\mathcal{M}}$, такой, что $(K(\varphi)|\varphi) = \mathcal{V}(\varphi,\varphi)$; скалярное произведение в левой части равенства берется в смысле пространства $\overline{\mathcal{M}}$. Рассмотрим частный случай, когда K имеет чисто точечный спектр. Пусть $\varphi_1,\varphi_2,\dots$ — ортонормированный базис собственных векторов оператора K. Тогда для любого вектора $\varphi = q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + \dots$ из $\overline{\mathcal{M}}$, как нетрудно вычислить,

$$\mathcal{V}(\varphi,\varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_j^2}{\mu_j},$$

где μ_j определяются из условия $K(\varphi_j) = (1/\mu_j)\varphi_j$, и

$$T(\varphi,\varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_j^2}{m_j},$$

где m_j определяются из равенств $1/m_j + 1/\mu_j = 1$. Таким образом, мы можем выбрать базис в $\overline{\mathcal{M}}$, в котором и T и $\mathcal{V}$ приводятся к диагональному виду, и, следовательно, нашу систему можно рассматривать как совокупность независимых гармонических осцилляторов. Можно непосредственно убедиться в том, что динамическая группа, которую мы определили с помощью операторов J и J^*, совпадает с той, которая получается путем соединения динамических групп отдельных осцилляторов и сужения фазового пространства до множества тех точек $(q_1,q_2,\dots)$, в которых полная энергия конечна.

Если $(\varphi,\psi) \in \overline{\mathcal{M}} \oplus \overline{\mathcal{M}}$ и U_t — динамическая группа, то $U_t(\varphi,\psi)$ будет дифференцируема при $t=0$ и

$$\left.\frac{d}{dt}(U_t(\varphi,\psi))\right|_{t=0} = A(\varphi,\psi) = (\psi,-J^*(\varphi)).$$

В более привычной и более краткой форме мы имеем

$$\frac{d}{dt}(\varphi,\psi)=(\psi,-J^*(\varphi)) \text{ или } \frac{d\varphi}{dt}=\psi, \quad \frac{d\psi}{dt}=-J^*(\varphi).$$

Таким образом, „вектор конфигурации“ φ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка: $d^2\varphi/dt^2=-J^*(\varphi)$. В приложениях φ обычно является скалярной или векторной функцией в трехмерном пространстве, а J^* — дифференциальным оператором. Когда φ рассматривается как функция от переменных x, y, z, t, а не как функция от t со значениями в $\mathcal{M}$, уравнение $d^2\varphi/dt^2=-J^*(\varphi)$ становится дифференциальным уравнением в частных производных, принимая вид $\partial^2\varphi/\partial t^2=-J^*(\varphi)$, именно в таком виде обычно формулируются физические законы.

В таком общем виде, в каком мы получили это уравнение, его нельзя считать удовлетворительным. Для того чтобы получить из него вполне определенную динамическую группу, нужно ограничить рассматриваемый класс φ и $\partial\varphi/\partial t$ таким образом, чтобы можно было доказать соответствующие теоремы существования и единственности.

В качестве примера рассмотрим малые колебания струны, скрепленной в двух конечных точках. Здесь $\mathcal{M}$ — пространство всех дважды дифференцируемых функций на $0\leqslant x\leqslant l$. таких, что $f(0)=f(l)=0$; элемент $f\in\mathcal{M}$ описывает отклонение струны от прямой как функцию расстояния от левого закрепленного конца;

$$\mathcal{V}(f,f)=k\int\limits_0^1\left(\frac{df}{dx}\right)^2dx$$

и

$$T(f,f)=\mu\int\limits_0^1 f^2\,dx,$$

где k и μ — положительные константы, зависящие от материала, из которого сделана струна, и от ее натяжения. Эти выражения можно получить из законов механики системы точек, рассматривая струну как предельный случай последовательности материальных точек, расположенных вдоль прямой и определенным образом взаимодействующих между собой. Поскольку

$$\mathcal{V}(f,f)=k\int\limits_0^1\left(\frac{df}{dx}\right)^2dx=-k\int\limits_0^1\frac{d^2f}{dx^2}\cdot f\,dx=-\frac{k}{\mu}\,T\left(\frac{d^2f}{dx^2},f\right),$$

мы видим, что ограничение оператора J^* на $\mathcal{M}$ имеет вид

$$f\to-\frac{k}{\mu}\,\frac{d^2f}{dx^2}.$$

Считая теперь f функцией x и t, получаем классическое уравнение колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=-\frac{k}{\mu}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

При изучении колебаний упругого твердого тела, занимающего конечный объем R в E^3, конфигурационное пространство $\mathcal{M}$ является множеством всех дважды дифференцируемых функций на R с векторными значениями, которые на границе R ортогональны

к нормали к граничной поверхности. Элемент $f = (l_1, l_2, l_3) \in \mathcal{M}$ описывает (векторное) отклонение от положения равновесия или функцию положения точки в R. В этом случае

$$T(f,f) = \mu \int\int\limits_R \int (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)\, dx\, dy\, dz,$$

$$\mathcal{V}(f,f) = c_1 \int\int\limits_R \int \left(\frac{\partial l_1}{\partial x} + \frac{\partial l_2}{\partial y} + \frac{\partial l_3}{\partial z}\right)^2 dx\, dy\, dz +$$

$$+ c_2 \int\int\limits_R \int \left[\left(\frac{\partial l_1}{\partial z} + \frac{\partial l_3}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial l_2}{\partial z} + \frac{\partial l_3}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial l_1}{\partial y} + \frac{\partial l_2}{\partial x}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{\partial l_1}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial l_2}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial l_3}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz,$$

где μ, c_1 и c_2 зависят от материала, из которого состоит тело. Мы предоставляем читателю вывести отсюда классические уравнения колебаний.

Полученные выше формулы очевидным образом образом обобщаются на тот случай, когда имеется несколько соприкасающихся упругих сред или одна, в которой μ, c_1 и c_2 меняются от точки к точке. Аналогичные формулы описывают колебания жидкостей и газов.

Возвращаясь к общей теории, отметим, что точно так же, как в конечномерном случае, мы можем ввести умножение на t в фазовом пространстве таким образом, что динамическая группа $t \to U_t$ станет однопараметрической унитарной группой e^{itB}, где B — самосопряженный оператор.

Когда оператор B имеет чисто точечный спектр, как это обычно бывает для колебаний конечной среды, мы можем решить задачу Коши, т. е. задачу „предсказания“, следующим образом. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — ортогональный базис собственных векторов B:

$$B(\varphi_j) = \lambda_j \varphi_j;$$

тогда

$$U_t(\varphi_j) = e^{i\lambda_j t}\varphi_j.$$

Поэтому, если состояние системы при $t = 0$ задается вектором $\theta \in \mathcal{M}_{\mathcal{V}} \oplus \mathcal{M}_T$, то вектор θ_t, соответствующий состоянию системы в момент времени t, равен $\theta_t = e^{itB}(\theta)$. Разложим вектор θ по базису $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$:

$$\theta = c_1\theta_1 + c_2\theta_2 + \ldots.$$

Тогда θ_t — единственный вектор, коэффициенты разложения которого по этому базису суть $c_1 e^{it_1 t}, c_2 e^{it_2 t}, \ldots$. Конечно, все зависит от того, удается ли на самом деле провести спектральный анализ оператора B и найти φ_j. В ряде классических задач это можно проделать совершенно явно, причем соответствующие φ_j составляют различные известные семейства ортогональных функций. Итак, когда B имеет чисто точечный спектр, движение можно проанализировать, разложив его на независимые простые гармонические колебания, точно так же, как в конечномерном случае. Однако важное отличие состоит в том, что теперь имеется бесконечное множество таких независимых колебаний.

Когда B не имеет чисто точечного спектра, мы можем применить спектральную теорему и считать, что наше гильбертово пространство отображено линейно и изометрично на конкретное пространство $\mathcal{L}^2(S, \mu)$ так, что оператор B перешел в оператор $\mathrm{g}(s) \to \lambda(s)\,\mathrm{g}(s)$, где λ — некоторая действительная функция на S. Оператор U_t при этом перейдет в оператор

$$\mathrm{g}(s) \to e^{i\lambda(s)t}\mathrm{g}(s),$$

и мы можем дать следующее правило для решения задачи Коши. Для заданного вектора θ найдем соответствующий вектор в $\mathcal{L}^2(S,\mu)$ и обозначим его $\hat{\theta}$. Тогда состоянию $U_t(\theta)$ в $\mathcal{L}^2(S,\mu)$ соответствует вектор $\hat{\theta}(s)\,e^{i\lambda(s)t}$. Во многих случаях, представляющих интерес, элементы $\mathcal{M}_T \oplus \mathcal{M}_{\mathcal{V}}$ являются комплексными функциями на E^3 и оператор $\theta \to \hat{\theta}$ имеет обратный „интегральный оператор“, т. е. существует функция K на $E^3 \times S$, такая, что

$$\theta(x,y,z) = \int K(x,y,z,s)\,\hat{\theta}(s)\,d\mu(s)$$

для всех θ на плотном подпространстве $\mathcal{M}_T \oplus \mathcal{M}_{\mathcal{V}}$. Если это имеет место, то многие траектории нашей системы, т. е. функции x, y, z и t вида $U_t(\theta)(x,y,z)$, могут быть записаны в форме

$$\int K(x,y,z,s)\,e^{i\lambda(s)t}\hat{\theta}(s)\,ds$$

и могут рассматриваться как „непрерывные суперпозиции“ функций вида

$$K(x,y,z,s_0)\,e^{i\lambda(s_0)t}.$$

Если T и $\mathcal{V}$ инвариантны относительно переноса вращений пространства, то эти основные функции принимают вид

$$e^{i[ax+by+cz-G(a^2+b^2+c^2)t]};$$

в этом случае S — множество всех троек a, b, c, а функция G зависит от B. С помощью соответствующего поворота функцию

$$e^{i[ax+by+cz-G(a^2+b^2+c^2)t]}$$

можно привести к виду

$$e^{i[lx-G(l^2)t]},$$

где $a^2+b^2+c^2 = l^2$. При фиксированном x это — простое гармоническое колебание с частотой $G(l^2)/2\pi$. При фиксированном t действительная и мнимая части этого выражения — косинусоидальная и синусоидальная „волны“ с длиной волны $2\pi/l$; при изменении t эти „волны“ движутся в направлении возрастания x со скоростью $G(l^2)/l$. В общем случае эти функции

$$e^{i[ax+by+cz-G(a^2+b^2+c^2)t]}$$

называются „плоскими волнами“, распространяющимися в направлении вектора (a,b,c) со скоростью

$$G(a^2+b^2+c^2)/\sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

и имеющими длину волны

$$2\pi/\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Таким образом, движение нашей системы можно представить в виде суперпозиции плоских волн, распространяющихся в различных направлениях и имеющих разную длину волны.

Вообще говоря, скорость будет также меняться с изменением длины волны, но есть несколько важных частных случаев, когда $G(v) = \sqrt{v}$, и, следовательно, имеется единственная „скорость волны“. В этом случае „центр“ локального возмущения рассматриваемой среды будет двигаться с той же самой скоростью. Если скорость распространения зависит от длины волны, то центр локального возмущения может двигаться со скоростью, отличной от скоростей всех волн, входящих в суперпозицию, даже если все эти скорости близки друг к другу. В этом случае „групповая“ скорость w равна

$$w = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda},$$

где $v(\lambda)$ — волновая скорость плоской волны длины λ. Все эти утверждения можно обосновать с помощью строгого анализа, который, однако, увел бы нас слишком далеко в сторону.

Если мы рассматриваем волны в бесконечной упругой среде, то все эти результаты сохраняют силу, но основные плоские волны имеют своими значениями векторы. Оказывается, что здесь возможны два случая. Когда вектор перпендикулярен направлению распространению волны, волна называется *поперечной*, а когда параллелен — *продольной*. Волновая скорость не зависит от длины волны, но различна для продольной и поперечной волн.

В заключение этого раздела мы вкратце расскажем, как следует обобщить эти рассуждения, чтобы включить электромагнитную теорию света. Природа света являлась предметом споров на протяжении всей истории физики. В 1800 г. казалось, что можно большинство явлений объяснить и с помощью гипотезы о свете как о потоке быстро движущихся чрезвычайно малых частиц, и с помощью гипотезы о волновой природе света. С другой стороны, ни одна из гипотез не давала вполне удовлетворительного объяснения всех явлений. Однако главным образом благодаря работе Юнга и Френеля в 1801–1827 гг. все должны были в большей или меньшей степени согласиться с тем, что свет представляет собой поперечные волны в некоторой неизвестной среде.

В следующие сорок лет было потрачено много усилий на то, чтобы определить природу этой среды, которая была названа эфиром. Тот факт, что волны должны были быть поперечными, было очень трудно согласовать с тем фактом, что среда, в которой распространяется свет, совершенно отлична от упругого тела. Далее, в соответствии с теорией распространения волн в упругой среде каждый раз, когда поперечная волна пересекает границу раздела двух сред, должна возникать также продольная волна, но никаких экспериментальных подтверждений существования продольных волн найдено не было. Эта трудность была лишь одной из тех, с которыми столкнулся — по крайней мере с математической точки зрения — Мак-Куллоф в 1839 г. Он показал, что волны будут распространяться в упругой твердой среде так же, как распространяются, судя по наблюдениям, световые волны, если принять, что функция потенциальной энергии имеет вид, отличный от указанного выше, а именно равна

$$a\int\int\int\left[\left(\frac{\partial l_z}{\partial y}-\frac{\partial l_y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial l_x}{\partial z}-\frac{\partial l_z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial l_y}{\partial x}-\frac{\partial l_x}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy\,dz.$$

В частности, в этом случае на поверхности раздела не возникает продольных волн. Однако физические трудности оставались, и работа Мак-Куллофа долгое время не была признана. Мы упомянули ее потому, что по математической форме ее результат совпадает с полученным в окончательной теории. Заметим, что потенциал Мак-Куллофа отличается от потенциала настоящего упругого твердого тела тем, что в нем вместо компонент симметрической части тензора перемещений

$$\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial l_x}{\partial x} & \dfrac{\partial l_x}{\partial y} & \dfrac{\partial l_x}{\partial z}\\ \dfrac{\partial l_y}{\partial x} & \dfrac{\partial l_y}{\partial y} & \dfrac{\partial l_y}{\partial z}\\ \dfrac{\partial l_z}{\partial x} & \dfrac{\partial l_z}{\partial y} & \dfrac{\partial l_z}{\partial z}\end{matrix}\right\|$$

используются компоненты антисимметрической части этого тензора.

Окончательный ответ в девятнадцатом веке на вопрос о природе света был дан только после развития Фарадеем и Максвеллом теории электромагнитного поля.

К 1800 г. были известны факты о притяжении и отталкивании заряженных тел и магнитов и разработаны отдельные математические теории электростатики и магнитостатики. Однако то важнейшее открытие, что изменяющееся электрическое поле индуцирует

магнитное поле и обратно, было еще впереди. Только в 1800 г. Вольта построил электрическую батарею и тем самым дал возможность экспериментаторам пользоваться постоянным электрическим током. Двадцать лет спустя Эрстед открыл, что ток, идущий по проволоке, может вызывать отклонение магнитной стрелки, а в 1825 г. Ампер опубликовал известный мемуар, в котором давалась полная количественная теория этого явления.

Следующий значительный шаг был сделан Фарадеем, который в 1832 г. показал, что в проволоке, передвигаемой вблизи магнита, возбуждается электрический ток. Фарадей играл основную роль в развитии физики в течение длительного последующего периода вплоть до 1855 г., когда этими вопросами начал заниматься Максвелл. И Фарадей и Максвелл рассматривали электромагнитные явления с точки зрения „полей“, т. е. в центре их внимания находились силовые поля, вызываемые зарядами, магнитами и. т. д., а не сами эти объекты. Оказалось, что потенциальную энергию системы, в которой силы вызываются взаимодействием зарядов, можно выразить в виде интеграла

$$\frac{k}{8\pi}\iiint (E_x^2+E_y^2+E_z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

где E_x, E_y, E_z — компоненты электрического поля, а k — диэлектрическая постоянная окружающей среды. Аналогичным образом потенциальную энергию, соответствующую системе магнитов, можно записать в виде интеграла

$$\frac{\mu}{8\pi}\iiint (H_x^2+H_y^2+H_z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

где H_x, H_y, H_z — компоненты магнитного поля, а μ — магнитная проницаемость среды.

Максвелл и Фарадей рассматривали электромагнитное поле как некоторую возмущенную упругую среду и показали, что электромагнитные явления можно описывать как взаимодействие между веществом и полем, причем последнее рассматривается как механическая система с бесконечным числом степеней свободы, подобная упругому твердому телу.

Максвелл сделал чрезвычайно важное теоретическое открытие, предугадав, что так же, как существует магнитное поле, индуцированное электрическим током, должно существовать магнитное поле, индуцированное меняющимся электрическим полем E. Он пришел к выводу, что поле H должно определяться формулой

$$\mathrm{rot}H=\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}.$$

Если добавить это соотношение к уже известным, то получится знаменитая система уравнений Максвелла, определяющая изменение во времени электромагнитного поля. В пустом пространстве, свободном от зарядов и токов, она имеет вид

$$\mathrm{rot}E=-\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t},\qquad \mathrm{rot}H=\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t},$$
$$\mathrm{div}E=0,\qquad \mathrm{div}H=0,$$

где c — константа. Нетрудно исключить E или H из этих уравнений и получить следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 H}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2 H}{\partial^2 z}=\frac{1}{c}\frac{\partial^2 H}{\partial^2 t}$$

и

$$\frac{\partial^2 E}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 E}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2 E}{\partial^2 z}=\frac{1}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial^2 t}.$$

Отсюда нетрудно видеть, что электромагнитное возмущение распространяется волновым образом со скоростью c. Величина c оказалась равной скорости света, и Максвелл

предположил, что свет на самом деле представляет собой колебания электромагнитного поля. Эта точка зрения (с модификациями, обусловленными квантовой механикой) является общепринятой до настоящего времени.

Нетрудно связать теорию Максвелла свободного электромагнитного поля с основным содержанием этого раздела. Обозначим через $\mathcal{M}\{E\}$ векторное пространство всех дважды дифференцируемых функций с векторными значениями на трехмерном пространстве, таких, что

$$\frac{1}{4}\pi\iiint(E_x^2+E_y^2+E_z^2)\,dx\,dy\,dz<\infty \text{ и } \operatorname{div}E=0.$$

Положим

$$\mathcal{V}(E,E)=\frac{1}{4}\pi\iiint(E_x^2+E_y^2+E_z^2)\,dx\,dy\,dz$$

и

$$T(H,H)=\frac{1}{4}\pi\iiint(H_x^2+H_y^2+H_z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

где H — векторное поле, однозначно определяемое следующими условиями:

$$\operatorname{rot}H=\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t},\quad \iiint(H_x^2+H_y^2+H_z^2)\,dx\,dy\,dz<\infty,$$
$$\operatorname{div}H=0,$$

Действительное гильбертово пространство и однопараметрическая группа ортогональных преобразований этого пространства, построенные так же, как на стр. 41, приводят к „законам движения“ для E, которые превращаются в уравнения Максвелла, если при дифференцировании мы по определению примем за H величину

$$\frac{1}{c}\operatorname{rot}^{-1}\frac{\partial E}{\partial t}.$$

В определенной таким образом „механической системе“ энергия электрического поля превращается в потенциальную энергию, энергия магнитного поля — в кинетическую энергию. Вместо того, чтобы принимать за основу E, мы можем выразить все величины через $A=\operatorname{rot}^{-1}(E)$, где $\operatorname{div}A=0$. Тогда кинетическая энергия будет равна

$$\frac{1}{4}\pi\iiint\left[\left(\frac{\partial A_y}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)^2\right]dx\,dy\,dz.$$

Таким образом, мы видим, почему приемлем метод Мак-Куллофа.

Для нас очень важно, что математический анализ динамической группы механической системы оказывается вполне применимым и к изучению электромагнитного поля, поскольку он зависит только от того, что инфинитезимальная образующая этой группы имеет некоторую определенную форму. В частности, мы можем говорить об импульсе и моменте импульса поля и, если поле сосредоточено в конечной области пространства, рассматривать его как систему (бесконечного числа) независимых гармонических осцилляторов.

1.5 Статистическая механика

При изучении механической системы с очень большим числом частиц, например макроскопической физической системы, состоящей из огромного количества чрезвычайно малых „атомов“, движущихся по законам классической механики, невозможно определить состояние системы в обычном смысле слова, т. е. найти все координаты и скорости