за короткое время были упорядочены и поняты, хотя еще совсем недавно эта задача казалась совершенно безнадежной.

Описанный прием сочетания законов классической механики со взятыми с потолка „правилами квантования“, несмотря на его многочисленные успешные применения был, очевидно, неудовлетворительным. Не было не только теоретического обоснования, но даже общего способа получения этих правил. Правила, указывающие, какой дискретный ряд значений может принимать та или иная переменная, становились все более сложными и детализированными по мере усложнения изучавшихся систем. Более того, во многих случаях новые правила вступали в резкое противоречие с классической физикой и в то же время не могли полностью заменить ее. Для объяснения одних явлений приходилось использовать волновую теорию света, для объяснения других — новую корпускулярную теорию. Далее, в соответствии с классической электродинамикой электрон, движущийся по орбите Бора, должен непрерывно излучать энергию и в конце концов упасть на ядро, но этого не происходит.

Наконец в 1925 г. Гейзенберг и Шредингер независимо друг от друга открыли общие правила квантования, которые значительно отличались по форме, но, как скоро выяснилось, были эквивалентны друг другу. Это открытие дало мощный толчок развитию физики, и за какие-нибудь пять лет объединенными усилиями Гейзенберга, Шредингера, Дирака, Бора, Борна, фон Неймана и других ученых была создана новая, более совершенная механика, которая

(a) включала классическую механику в качестве предельного случая для больших масс и расстояний;

(b) устанавливала существование правил квантования и их точную форму;

(c) объясняла, каким образом вещество и излучение могут быть одновременно волнами и частицами, и доказывала стабильность орбит Бора;

(d) позволяла понять много ранее не объяснимых явлений, в частности валентность и законы образования химических соединений.

Эта новая механика называется квантовой механикой. Прежде чем переходить к ее изложению, мы хотели бы подчеркнуть, что правила квантования являются в квантовой механике следствием теории, а не основным средством ее формулировки. В этом смысле название квантовой механики является неудачным. Она является, скорее, измененным вариантом статистической механики, в котором при изучении изменения вероятностных мер во времени уже не предполагается, что движение этих мер порождается движением точек в фазовом пространстве. Законы квантовой механики накладывают некоторые ограничения на возможные одновременно распределения вероятностей различных наблюдаемых, а также дают дифференциальные уравнения, интегрируя которые можно найти изменение этих распределений со временем. Все остальное является следствием этих законов.

## 2.2 Квантомеханический аналог фазового пространства

В классической статистической механике наблюдаемая является борелевской функцией на фазовом пространстве $\mathcal{M}_{V^*}$, состояние — вероятностной мерой на $\mathcal{M}_{V^*}$; тем самым каждой паре $(f, \alpha)$, где $f$ — наблюдаемая и $\alpha$ — состояние, можно поставить в соответствие вероятностную меру $\alpha_f$ на прямой, приписав борелевскому множеству $E$ меру $\alpha(f^{-1}(E))$. Величина $p(f, \alpha, E)$, по определению равная $\alpha(f^{-1}(E))$, есть вероятность того, что измерение наблюдаемой $f$ у системы, находящейся в состоянии $\alpha$, будет принадлежать множеству $E$.

В квантовой механике мы также будем оперировать некоторой функцией $p(A, \alpha, E)$, приписывающей определенную вероятность каждой тройке, состоящей из наблюдаемой

$A$, состояния $\alpha$ и борелевского множества $E$ действительных чисел, но не будем предполагать, что $p$ получается как вероятностная мера на классическом фазовом пространстве.

Развитие квантовой механики привело к необходимости строгого анализа процесса измерения; результатом этого анализа явилось утверждение (в количественной формулировке известное как принцип неопределенности Гейзенберга), согласно которому принципиально не имеет смысла говорить об одновременных *точных* значениях координат и скоростей частицы. Измерения координат и скоростей связаны друг с другом таким образом, что оказываются бесплодными все попытки придумать эксперимент, который позволил бы приписать точный смысл утверждению: в момент времени $t$ частица $P$ находится в точке $x$, $y$, $z$ и имеет скорость $v_x$, $v_y$, $v_z$.

С другой стороны, можно приписать точный смысл утверждению: в момент времени $t$ состояние системы таково, что измерения $x$, $y$, $z$, $v_x$, $v_y$, $v_z$ имеют статистические распределения, соответствующие вероятностным мерам $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ на действительной прямой. Это объясняется тем, что для определения вероятностных распределений можно производить измерения на большом числе копий данной системы, выбирая различные множества экземпляров системы для измерения значений различных наблюдаемых. Процесс измерения, конечно, существенно меняет состояние системы, и полученную информацию можно применять только к тем экземплярам из нашей совокупности, которые не подвергались испытаниям. Подробное обсуждение этой важной особенности квантовой механики читатель может найти в книге фон Неймана.

Поскольку не имеет физического смысла понятие точки фазового пространства, понятие вероятностной меры на фазовом пространстве также теряет смысл. С другой стороны, как мы видели, по-прежнему сохраняет смысл сопоставление каждой наблюдаемой в данном состоянии некоторой вероятностной меры на прямой. Это позволяет перенести с некоторыми уточнениями понятие состояния из классической статистической механики в квантовую механику.

Нам будет удобно ввести основные понятия квантовой механики аксиоматически. Мы построим строго определенную математическую модель и опишем ее физический смысл настолько точно, насколько это возможно. Читатель убедится в том, что наши аксиомы имеют различную степень физической достоверности: пока еще не представляется возможным построить квантовую механику в ее современной форме, основываясь на вполне достоверных и естественных аксиомах.

Пусть $\mathcal{B}$ — множество всех борелевских подмножеств действительной прямой $\mathbb{R}$. Мы предполагаем, что нам заданы два абстрактных множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{S}$, и функция $p$, которая каждой тройке $(A, \alpha, E)$, где $A \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathcal{S}$ и $E \in \mathcal{B}$, ставит в соответствие некоторое действительное число $p(A, \alpha, E)$, $0 \leqslant p(A, \alpha, E) \leqslant 1$. Мы предполагаем, что $p$ обладает некоторыми определенными свойствами, которые мы перечисляем в виде аксиом. Физически $\mathcal{A}$ нужно представить себе как множество всех наблюдаемых нашей физической системы, а $\mathcal{S}$ — как множество всех ее состояний. Величина $p(A, \alpha, E)$ есть вероятность того, что измерение наблюдаемой $A$ в состоянии $\alpha$ будет иметь значение, принадлежащее множеству $E$. Время мы пока считаем фиксированным; изменение состояний в зависимости от времени мы рассмотрим в дальнейшем.

Аксиома 1. $p(A, \alpha, \varnothing) = 0$, $p(A, \alpha, \mathbb{R}) = 1$; $p(A, \alpha, E_1 \cup E_2 \cup \ldots) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} p(A, \alpha, E_j)$, *если $E_j$ — попарно непересекающиеся борелевские множества.*

Положим $\alpha_A(E) = p(A, \alpha, E)$. Аксиома 1 заключается просто в том, что $\alpha_A$ для каждого $A \in \mathcal{A}$ и каждого $\alpha \in \mathcal{S}$ должна быть вероятностной мерой.

Аксиома 2. *Если $p(A, \alpha, E) = p(A', \alpha, E)$ для всех $\alpha$ и $E$, то $A = A'$. Аналогично, если $p(A, \alpha, E) = p(A, \alpha', E)$ для всех $A$ и $E$, то $\alpha = \alpha'$.*

Аксиома 2, таким образом, гласит, что двум различным состояниям должны соответ-

ствовать различные вероятностные распределения хотя бы одной из наблюдаемых, и две различные наблюдаемые должны иметь различные вероятностные распределения хотя бы в одном состоянии.

Аксиома 3. *Пусть $A$ — произвольный элемент $\mathcal{A}$, и $f$ — любая действительная борелевская функция на прямой. Тогда существует наблюдаемая $B \in \mathcal{A}$, такая, что $p(B, \alpha, E) = p(A, \alpha, f^{-1}(E))$ для всех $\alpha \in \mathcal{S}$ и $E \in \mathcal{B}$.*

Из аксиомы 2 следует, что $B$ однозначно определяется по $A$; мы будем обозначать ее через $f(A)$. Физически наблюдаемая $f(A)$ строится следующим образом: чтобы измерить $f(A)$, нужно измерить $A$ и к результату применить функцию $f$. Если изложить этот способ построения наблюдаемой $B$ в терминах вероятностей $p(A, \alpha, E)$, то мы придем к аксиоме 3.

В силу аксиомы 3 все такие выражения, как $A^2$, $A^3 + A$, $1 - A$, $e^A$ и т. д., имеют смысл, если $A$ — наблюдаемая. В частности, если $f(x) \equiv \lambda$, где $\lambda$ — некоторое действительное число, то $f(A)$ не зависит от $A$ и будет называться постоянной наблюдаемой со значением $\lambda$ или просто наблюдаемой $\lambda$.

Аксиома 4. *Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — элементы $\mathcal{S}$, и $t_1 + t_2 + \ldots = 1$, $0 < t_j < 1$, то существует состояние $\alpha \in \mathcal{S}$, такое, что*

$$p(A, \alpha, E) = \sum_{j=1}^{\infty} t_j \, p(A, \alpha_j, E)$$

*для всех $E \in \mathcal{B}$ и $A \in \mathcal{A}$.*

Из аксиомы 2 следует, что состояние $\alpha$ однозначно определяется по $\alpha_j$ и $t_j$; мы будем обозначать его через $\sum\limits_{j=1}^{\infty} t_j \alpha_j$. Физически оно соответствует состоянию, в котором мы знаем, что находимся в состоянии $\alpha_j$ с вероятностью $t_j$. Оно называется *смесью* состояний $\alpha_j$. Если состояние $\alpha$ нельзя получить как смесь двух состояний, отличных от него самого, то $\alpha$ называют *чистым состоянием*. (Мы предупреждаем читателя-физика, что аксиома 4 не является формулировкой „принципа суперпозиции“. В этом принципе речь идет о чистых состояниях, а в аксиоме 4 — о смешанных.)

Прежде чем перечислять дальнейшие аксиомы, нам нужно будет ввести некоторые новые понятия, основанные на уже сформулированных аксиомах. Мы будем называть наблюдаемую $A$ вопросом, если в каждом состоянии $\alpha$ мера $\alpha_A$ сосредоточена в точках 0 и 1, т. е. если $\alpha_A(0, 1) = 1$ для всех $\alpha$. Мы предоставляем читателю убедиться в том, что $A$ является вопросом тогда и только тогда, когда $A^2 = A$. Мы будем обозначать множество всех вопросов $\mathcal{Q}$. В том, что существует огромное количество вопросов, можно убедиться следующим образом. Пусть $E$ — произвольное борелевское подмножество действительной прямой, и $\varphi_E(x)$ — функция, равная 1 при $x \in E$ и 0 при $x \notin E$. Тогда $\varphi_E(A)$, как нетрудно видеть, будет вопросом; мы будем обозначать этот вопрос через $Q_E^A$. Это наблюдаемая, которая принимает значение 1, когда измерение $A$ приводит к значению в $E$, и равна 0 в противном случае. В этом смысле она соответствует вопросу: принадлежит ли измеренное значение $A$ множеству $E$?

Если фиксировать $A$, то $Q_E^A$ будет совокупностью вопросов, параметризованной борелевскими множествами $E$. Для нас будет важно, что эта параметризованная совокупность вопросов однозначно определяет $A$, т. е., как читатель может без труда проверить, из того, что $Q_E^A = Q_E^{A'}$ для всех $E \in \mathcal{B}$, следует, что $A = A'$. Пусть $Q$ — произвольный вопрос, и $\alpha$ — произвольное состояние, причем $\alpha_Q(\{1\}) = s$; тогда $\alpha_Q(\{0\}) = 1 - s$, и для любого множества $E \in \mathcal{B}$ $\alpha_Q(E)$ равно 0, 1, $s$ или $1 - s$ тогда и только тогда, когда ни 0, ни 1 не принадлежат $E$; и 0 и 1 принадлежат $E$; $1 \in E$, а $0 \notin E$; $0 \in E$, а $1 \notin E$ соответственно. Поэтому $\alpha_Q$ вполне определяется числом $s = \alpha_Q(\{1\})$. Мы определим $m_\alpha(Q)$ как $\alpha_Q(\{1\})$. Тогда $m_\alpha$ — некоторая действительная функция на множестве всех вопро-

сов, и читатель без особого труда может убедиться в том, что если $m_{\alpha_1}(Q) = m_{\alpha_2}(Q)$ для всех $Q$, то $\alpha_1 = \alpha_2$.

Функции $m_\alpha$ естественным образом определяют частичную упорядоченность на $\mathcal{Q}$ тогда и только тогда, когда $m_\alpha(Q_1) \leqslant m_\alpha(Q_2)$ для всех состояний $\alpha$. Нетрудно установить, что определенное таким образом отношение удовлетворяет условиям, входящим в определение частичной упорядоченности:

(1) если $Q_1 \leqslant Q_2$ и $Q_2 \leqslant Q_3$, то $Q_1 \leqslant Q_3$;

(2) $Q \leqslant Q$ для всех $Q$;

(3) если $Q_1 \leqslant Q_2$ и $Q_2 \leqslant Q_1$, то $Q_1 = Q_2$.

Для любого вопроса $Q$ наблюдаемая $1 - Q$ также является вопросом. Это вопрос, ответ на который всегда противоположен ответу на вопрос $Q$. Вопросы $Q$ и $1-Q$ в отличие от произвольной пары вопросов являются функциями одной и той же наблюдаемой (а именно $Q$), и поэтому их можно задавать одновременно.

Пусть $Q_1$ и $Q_2$ — вопросы. Если $Q_1 \leqslant 1 - Q_2$ или, что эквивалентно, если $m_\alpha(Q_1) + m_\alpha(Q_2) \leqslant 1$ для всех состояний $\alpha$, то мы будем говорить, что $Q_1$ и $Q_2$ не пересекаются, и писать $Q_1 \mathbin{\dot{\cap}} Q_2$. Физически это означает, что на вопросы $Q_1$ и $Q_2$ невозможно одновременно ответить „да“.

Чтобы глубже понять смысл соотношений $Q_1 \leqslant Q_2$ и $Q_1 \mathbin{\dot{\cap}} Q_2$ рассмотрим случай, в котором $Q_1 = Q^A_{E_1}$, и $Q_2 = Q^A_{E_2}$, где $A$ — некоторая наблюдаемая. Тогда $E_1 \subset E_2$ эквивалентно соотношению $Q^A_{E_1} \leqslant Q^A_{E_2}$, а $E_1 \cap E_2 = 0$ эквивалентно соотношению $Q^A_{E_1} \mathbin{\dot{\cap}} Q^A_{E_2}$.

Теперь мы покажем, что все сформулированные до сих пор аксиомы выполняются в классической механике, и посмотрим, к чему сводятся наши построения в классическом случае. Наблюдаемая в этом случае представляет собой просто борелевскую функцию $\mathrm{g}$ на $\mathcal{M}_{V^*}$. Читатель без труда установит, что наблюдаемая $f(\mathrm{g})$, определенная в аксиоме 3, является обычной композицией функций $f \circ \mathrm{g}$. Вопрос — это борелевская функция, которая принимает только значения 0 и 1; она однозначно определяется борелевским множеством точек, в которых она принимает значение 1, и ее удобно отождествить с этим множеством. Если это сделать, то операция $Q \to 1 - Q$ окажется переходом от множества к его дополнению, $Q_1 \leqslant Q_2$ будет означать теоретико-множественное включение, а $Q_1 \mathbin{\dot{\cap}} Q_2$ будет означать, что множества не пересекаются. Функция $m_\alpha$, отображающая вопросы во множество действительных чисел между 0 и 1, станет мерой $\alpha$ на $\mathcal{M}_{V^*}$, а функция $E \to Q^{\mathrm{g}}_E$, где $\mathrm{g}$ — борелевская функция на $\mathcal{M}_{V^*}$, будет отображением $E \to \mathrm{g}^{-1}(E)$.

Возвращаясь к общему случаю, заметим, что если $A$ — некоторая наблюдаемая, и $E_1, E_2, \ldots$ — непересекающиеся борелевские множества, $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots$, то для каждого состояния $\alpha \in \mathcal{S}$ мы имеем

$$m_\alpha(Q^A_E) = p(A, \alpha, E) = \sum_{j=1}^{\infty} p(A, \alpha, E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} m_\alpha(Q^A_{E_j}).$$

Более того, в силу аксиомы 2, $Q^A_E$ однозначно определяется из следующего условия:

$$m_\alpha(Q^A_E) = \sum_{j=1}^{\infty} m_\alpha(Q^A_{E_j}) \text{ для всех } \alpha.$$

Естественно называть $Q^A_E$ суммой вопросов $Q^A_{E_1}, Q^A_{E_2}, \ldots$ и писать $Q^A_E = Q^A_{E_1} + Q^A_{E_2} + \ldots$. Вообще мы будем говорить, что вопрос $Q$ является суммой непересекающихся вопросов $Q_1, Q_2, \ldots$:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots,$$

если для всех $\alpha$ из $\mathcal{S}$ $m_\alpha(Q) = m_\alpha(Q_1) + m_\alpha(Q_2) + \ldots$. Согласно аксиоме 2, существует не более одного такого вопроса $Q$ для данной последовательности $Q_1, Q_2, \ldots$; однако, вообще говоря, нет никакой гарантии, что $Q$ всегда существует. Мы гарантируем это существование нашей следующей аксиомой.

Аксиома 5. *Пусть $Q_1, Q_2, \ldots$ — произвольная последовательность вопросов, такая что $Q_i \mathbin{\dot{\bigcirc}} Q_j$ при $i \neq j$. Тогда вопрос $Q_1 + Q_2 + \ldots = Q$ существует.*

Этот вопрос $Q$ можно интерпретировать как вопрос, ответ на который утвердителен в том и только в том случае, когда утвердителен ответ хотя бы на один из вопросов $Q_1, Q_2, \ldots$. Полезно также заметить, что $Q$ является наименьшим вопросом, который больше каждого из $Q_i$ или равен ему, так что его можно было определить исходя только из упорядоченности множества вопросов. Этот факт не вполне очевиден, и мы дадим его доказательство (принадлежащее Р. В. Кадисону).

Теорема. *Если $R \geqslant Q_j$ при всех $j$, и $Q_i \mathbin{\dot{\bigcirc}} Q_j$ при $i \neq j$, то $R \geqslant Q_1 + Q_2 + \ldots$.*

Доказательство. Покажем сначала, что если $Q' \mathbin{\dot{\bigcirc}} Q''$, $R \mathbin{\dot{\bigcirc}} Q'$ и $R \mathbin{\dot{\bigcirc}} Q''$, то $R \mathbin{\dot{\bigcirc}} (Q' + Q'')$. Действительно, $R + Q' + Q''$ также должно быть вопросом, который мы обозначим через $Q'''$. Тогда для всех $\alpha$

$$m_\alpha(R) + m_\alpha(Q') + m_\alpha(Q'') = m_\alpha(Q''') \leqslant 1,$$

следовательно,

$$m_\alpha(R) + m_\alpha(Q' + Q'') \leqslant 1,$$

откуда $R \mathbin{\dot{\bigcirc}} (Q' + Q'')$. Далее, поскольку $R \geqslant Q_j$ для всех $j$, то $(1 - R) \mathbin{\dot{\bigcirc}} Q_j$ для всех $j$, и по индукции получаем, что $(1 - R) \mathbin{\dot{\bigcirc}} (Q_1 + \ldots + Q_n)$ для всех $n$. Следовательно, $R \geqslant Q_1 + \ldots + Q_n$ для всех $n$. Поэтому

$$m_\alpha(R) \geqslant m_\alpha(Q_1 + \ldots + Q_n) = m_\alpha(Q_1) + \ldots + m_\alpha(Q_n)$$

для всех $n$ и $\alpha$, т. е.

$$m_\alpha(R) \geqslant m_\alpha(Q_1) + m_\alpha(Q_2) + \ldots$$

для всех $\alpha$. Следовательно, $R \geqslant Q_1 + Q_2 + \ldots$.

Используя понятие суммы непересекающихся вопросов, мы можем записать основные свойства отображения $E \to Q_E^A$ множества $\mathcal{B}$ в $\mathcal{Q}$ и функции $Q \to m_\alpha(Q)$, отображающей $\mathcal{Q}$ во множество действительных чисел. Рассмотрим сначала отображение $E \to Q_E^A$. Для каждого $A$ отображение $Q_E^A$ имеет следующие свойства:

(a) если $E \cap F = \varnothing$, то $Q_E^A \mathbin{\dot{\bigcirc}} Q_F^A$;

(b) если $E_i \cap E_j = \varnothing$ при всех $i \neq j$, то $Q_{E_1 \cup E_2 \cup \ldots}^A = Q_{E_1}^A + Q_{E_2}^A + \ldots$;

(c) $Q_\varnothing^A = 0$, $Q_{\mathbb{R}}^A = 1$.

Произвольную функцию $q : E \to q_E$, отображающую множество $\mathcal{B}$ в $\mathcal{Q}$, удовлетворяющую условиям (a)–(c), мы будем называть *мерой со значениями во множестве вопросов или вопросной мерой*. Из доказанной теоремы следует, что каждая наблюдаемая однозначно определяется соответствующей вопросной мерой $E \to Q_E^A$, так что мы имеем естественное взаимно однозначное соответствие между наблюдаемыми и *некоторыми* вопросными мерами. Наша следующая аксиома позволяет опустить слово „некоторыми“.

Аксиома 6. *Если $q$ — произвольная вопросная мера, то существует такая наблюдаемая $A$, $Q_E^A = q_E$ для всех $E \in \mathcal{B}$.*

Значение этой аксиомы можно объяснить следующим образом. Предположим сначала, что она не выполняется. Пусть $\mathcal{A}'$ — множество всех вопросных мер, и пусть $p'(q, \alpha, E) = m_\alpha(q_E)$ для каждого $q \in \mathcal{A}'$, каждого $\alpha \in \mathcal{S}$ и каждого $E \in \mathcal{B}$. Тогда, как нетрудно видеть, множество $\mathcal{A}'$ (заменяющее $\mathcal{A}$), множество $\mathcal{S}$ и функция $p'$ удовлетворяют аксиомам 1–5, а также аксиоме 6.

Далее, если мы отождествим $A \in \mathcal{A}$ с $Q_E^A \in \mathcal{A}'$, то $\mathcal{A}$ станет частью $\mathcal{A}'$, и функция $p'$, рассматриваемая на $\mathcal{A}$, совпадет с $p$. Другими словами, выполнение аксиомы 6 всегда можно обеспечить, расширив множество $\mathcal{A}$.

Нетрудно пенять физический смысл этого расширения. Если мы имеем множество вопросов $E \to q_E$, поставленных в соответствие борелевским подмножествам действительной прямой так, что выполняются условия (a)–(c), то мы можем задать наблюдаемую, отождествив вопрос $q_E$ с таким вопросом: принадлежит ли измеренное значение наблюдаемой множеству $E$ ?

Рассмотрим теперь функцию $Q \to m_\alpha(Q)$. Для каждого $\alpha \in \mathcal{S}$ функция $m_\alpha$ обладает следующими свойствами:

(a) если $Q_1, Q_2, \ldots$ — вопросы, такие что $Q_i \mathbin{\dot{\cup}} Q_j$ при $i \neq j$, то $m_\alpha(Q_1 + Q_2 + \ldots) = m_\alpha(Q_1) + m_\alpha(Q_2) + \ldots$;

(b) $m_\alpha(0), m_\alpha(1) = 1$;

(c) $0 \leqslant m_\alpha(Q) \leqslant 1$ для всех $Q$.

Произвольную действительную функцию, определенную на множестве $\mathcal{Q}$ всех вопросов и обладающую свойствами (a)–(c), мы будем называть вероятностной мерой на вопросах. Отображение $\alpha \to m_\alpha$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между состояниями и некоторыми вероятностными мерами на вопросах.

Было бы очень соблазнительно добавить аксиому, устанавливающую, что каждая вероятностная мера на вопросах есть $m_\alpha$ для некоторого $\alpha \in \mathcal{S}$. Это утверждение, очевидно, выполняется в классической механике. Оно также выполняется (что уже далеко не очевидно) в той модели квантовой механики, которую мы в конце концов получим. Если бы мы добавили такую аксиому, то наша система вполне определялась бы частично упорядоченным множеством $\mathcal{Q}$ и операцией $Q \to 1 - Q$, мы могли бы тогда отождествить $\mathcal{A}$ со множеством всех вопросных мер, $\mathcal{S}$ — со множеством всех вероятностных мер на вопросах и восстановить $p$ как функцию, переводящую тройку $Q, m, E$ в $m(Q_E)$. Наконец, если бы эта аксиома не выполнялась, мы могли бы расширить $\mathcal{S}$ так, чтобы в полученной системе аксиома была верна. Однако мы все-таки не поддадимся такому соблазну. Дело в том, что состояния нельзя конструировать физически так, как мы это делали с наблюдаемыми, и поэтому было бы очень трудно дать правдоподобное физическое объяснение этой аксиомы.

Во всяком случае, наша система может быть описана теперь заданием трех элементов: частично упорядоченного множества $\mathcal{Q}$, операции $Q \to 1 - Q$ на нем и некоторого подмножества вероятностных мер на $\mathcal{Q}$. Для того чтобы убедиться в этом, проведем обратное построение: построим тройку $\mathcal{A}, \mathcal{S}, p$, отправляясь от абстрактного частично упорядоченного множества, в котором определено „дополнение“, и заданных на нем „вероятностных мер“.

Пусть $\mathcal{L}$ — произвольное частично упорядоченное множество, и $a \to a'$ — инволютивный антиавтоморфизм в $\mathcal{L}$, т. е. отображение $\mathcal{L}$ в $\mathcal{L}$ такое, что $a'' = a$ и из $a_1 \leqslant a_2$ следует $a_2' \leqslant a_1'$. Будем писать $a_1 \mathbin{\dot{\cup}} a_2$, если $a_1 \leqslant a_2'$. Мы будем называть отображение $a \to a'$ *ортогональным дополнением*, если оно обладает следующими дополнительными свойствами:

(a) если $a_1, a_2, \ldots$ — элементы $\mathcal{L}$ такие, что $a_i \mathbin{\dot{\cup}} a_j$ при $i \neq j$, то существует единственный наименьший элемент $a$, такой, что $a \geqslant a_j$ при всех $j$ (мы будем обозначать его через $a_1 \cup a_2 \cup \ldots$);

(b) $a_1 \cup a_1' = a_2 \cup a_2'$ для всех $a_1$ и $a_2$ (мы будем обозначать $a \cup a'$ через 1);

(c) если $a \leqslant b$, то $b = a \cup (b' \cup a)'$.

Ясно, что $Q \to 1 - Q$ есть ортогональное дополнение в $\mathcal{Q}$.

Если $a \to a'$ — произвольное ортогональное дополнение в $\mathcal{L}$, то мы определим вероятностную меру на $\mathcal{L}$ (относительно операции $'$) как функцию $m$, отображающую $\mathcal{L}$ в

отрезок [0,1], для которой $m(1) = 1, m(1') = 0$ и

$$m(a_1 \cup a_2 \cup \ldots) = m(a_1) + m(a_2) + \ldots,$$

если $a_i \mathrel{\overset{|}{\bigcirc}} a_j$ при $i \neq j$.

Если $a_1 \leqslant a_2$, и $m$ — вероятностная мера, то

$$m(a_2) = m(a_1 \cup (a_2' \cup a_1)') = m(a_1) + m((a_2' \cup a_1)') \geqslant m(a_1).$$

Если для некоторого семейства $\mathcal{F}$ вероятностных мер верно обратное, т. е. если из того, что $m(a_1) \leqslant m(a_2)$ для всех $m \in \mathcal{F}$, следует, что $a_1 \leqslant a_2$, то $\mathcal{F}$ называется *полным* семейством. Если для каждой последовательности $m_i \in \mathcal{F}$ мера $\sum\limits_{i=1}^{\infty} t_i m_i$, где $t_i \geqslant 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} t_i = 1$, также принадлежит $\mathcal{F}$, то $\mathcal{F}$ называется строго *выпуклым*. Ясно, что все $m_\alpha$ при $\alpha \in \mathcal{S}$ образуют строго выпуклое полное множество вероятностных мер на $\mathcal{Q}$. Наконец, определим меру $L$ на действительной прямой со значениями в $\mathcal{L}$ как функцию $E \to L_E$, отображающую $\mathcal{B}$ в $\mathcal{L}$ и обладающую следующими свойствами:

(a) если $E \cap F = 0$, то $L_E \mathrel{\overset{|}{\bigcirc}} L_F$;

(b) если $E_i \cap E_j = 0$ при $i \neq j$, то $L_{E_1 \cup E_2 \cup \ldots} = L_{E_1} \cup L_{E_2} \cup \ldots$

(c) $L_\varnothing = 1'$, $L_\mathbb{R} = 1$.

Нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема. *Пусть $a \to a'$ — ортогональное дополнение на произвольном частично упорядоченном множестве $\mathcal{L}$, пусть $\mathcal{S}$ — произвольное полное строго выпуклое семейство вероятностных мер на $\mathcal{L}$ (относительно операции $'$) и пусть $\mathcal{A}$ — множество всех мер на действительной прямой со значениями в $\mathcal{L}$. Для каждой тройки $L, m, E$, где $L \in \mathcal{A}, m \in \mathcal{S}, E \in \mathcal{B}$, положим $p(L, m, E) = m(L_E)$. Тогда $\mathcal{A}, \mathcal{S}$ и $p$ удовлетворяют аксиомам 1–6. Более того, существует взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{L}$ и $\mathcal{Q}$, сохраняющее порядок, при котором операции $a \to a'$ соответствует операция $Q \to 1 - Q$.*

Говоря менее формально, понятие системы $\mathcal{A}, \mathcal{S}, p$, удовлетворяющей аксиомам 1–6, эквивалентно понятию частично упорядоченного множества $\mathcal{L}$ с ортогональным дополнением и с заданным на нем полным строго выпуклым семейством вероятностных мер. Эта замена оправдывается тем, что системы $\mathcal{L}, \mathcal{S}$ проще исследовать, чем системы $\mathcal{A}, \mathcal{S}, p$. Мы будем называть $\mathcal{Q} = \mathcal{L}$ *логикой* нашей системы [1]. Частично упорядоченное множество $\mathcal{L}$ всех вопросов играет такую же роль в нашей системе, как фазовое пространство в классической механике. Эта аналогия станет еще более полной, если мы будем представлять себе классическое фазовое пространство как булеву алгебру всех борелевских подмножеств, а не как множество точек.

До сих пор наши аксиомы были одинаково применимы и к классической, и к квантовой механике. Сейчас, наконец, мы выделим квантовую механику, приняв некоторое предположение относительно структуры $\mathcal{Q}$. Сначала, однако, мы введем некоторые понятия, которые можно обсудить, не делая дополнительных предположений относительно $\mathcal{Q}$.

Пусть $A$ — наблюдаемая, и пусть $E$ — борелевское подмножество действительной прямой. Если $Q_E^A = 0$, т. е. если $\alpha_A(E) = 0$ при всех $\alpha \in S$, мы скажем, что $E$ имеет меру нуль относительно $A$. Обозначим через $\mathcal{O}_A$ объединение всех открытых интервалов, имеющих меру нуль относительно $A$. Доказательство того факта, что $\mathcal{O}_A$ само имеет меру нуль относительно $A$ и содержит любое открытое множество меры нуль относительно $A$, является простым упражнением из теории функций действительного переменного. Замкнутое множество, состоящее из всех действительных чисел, не принадлежащих

---

[1] См. статью Биркгофа и фон Неймана [Birkhoff G., von Neumann J., The Logic of quantum mechanics, *Annals of Math.*,37 (1936), 835].

$\mathcal{O}_A$, мы будем называть *спектром* $A$ и обозначать через $S_A$. Каждая точка $x$, для которой $Q^A_{\{x\}} \neq 0$, конечно, принадлежит $S_A$. Множество всех таких точек будем называть *точечным спектром* $A$. Если точечный спектр $A$ является борелевским множеством, дополнение которого имеет меру нуль относительно $A$, то мы будем говорить, что $A$ имеет *чисто точечный спектр*. Мы увидим, что правила квантования вытекают из того, что некоторые основные наблюдаемые имеют непустой точечный спектр. Мы будем говорить, что наблюдаемая $A$ *ограничена*, если ее спектр $S_A$ содержится в конечном интервале. Наименьшее положительное число $N$ такое, что $|x| \leqslant N$ для всех $x \in S_A$, будет называться *нормой* наблюдаемой $A$ и обозначаться через $\|A\|$.

Пусть $A$ — произвольная ограниченная наблюдаемая, $\alpha$ — произвольное состояние. Тогда $\alpha_A$ — некоторая вероятностная мера, которая сконцентрирована на интервале $-\|A\| \leqslant x \leqslant \|A\|$; поэтому интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, d\alpha_A(x)$$

существует. Мы будем в соответствии с обычной терминологией теории вероятностей называть значение этого интеграла *математическим ожиданием*, или *средним значением* наблюдаемой $A$ в состоянии $\alpha$. Мы будем обозначать его через $m_\alpha(A)$. Если $A$ — вопрос, то $\alpha_A$ сконцентрирована в двух точках 0 и 1 и

$$m_\alpha(A) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, d\alpha_A(x) = 0 \cdot \alpha_A(\{0\}) + 1 \cdot \alpha_A(\{1\}) = \alpha_A\{1\}.$$

Таким образом, $m_\alpha$ в применении к вопросу дает то же значение, что и символ $m_\alpha$ в его прежнем смысле.

Предположим теперь, что в нашей системе выполняется следующая аксиома, связанная с аксиомой 2.

Аксиома 2'. *Если $m_\alpha(A) = m_\alpha(B)$ для всех состояний $\alpha$, то $A = B$.*

Тогда для двух заданных ограниченных наблюдаемых $A_1$ и $A_2$ будет существовать не более одной наблюдаемой $A_3$, такой, что $m_\alpha(A_3) = m_\alpha(A_1) + m_\alpha(A_2)$ для всех состояний $\alpha$. Если наблюдаемая $A_3$ существует, то ее естественно назвать *суммой* $A_1 + A_2$ наблюдаемых $A_1$ и $A_2$. Таким образом, при наличии аксиомы 2 мы можем определить, что мы понимаем под суммой $A_1 + A_2$, хотя эта сумма и не всегда существует. Если $A_1 = f_1(B)$ и $A_2 = f_2(B)$, то нетрудно показать, что $A_1 + A_2$ существует и равна $(f_1 + f_2)(B)$. Не слишком трудно доказать, что всегда, когда $A_1 + A_2$ существует, $\|A_1 + A_2\| \leqslant \|A_1\| + \|A_2\|$. Далее, очевидно, что если соответствующие суммы существуют, то $(A + B) + C = A + (B + C), A + B = B + A$, и, кроме того, выполняются обычные тождества для умножения наблюдаемых на вещественные числа. Поэтому, если $A_1 + A_2$ существует всегда, то ограниченные наблюдаемые образуют нормированное линейное пространство.

Предположение, что $A + B$ существует всегда, является основным при том построении квантовой механики, которое принято Сигалом [2]). Отправным пунктом его теории служит нормированное векторное пространство всех ограниченных наблюдаемых. Из наших аксиом следует, что $m_\alpha(A^2) \geqslant 0$ для каждого состояния $\alpha$ и для всех наблюдаемых $A$, из определения суммы следует, что

$$m_\alpha(\lambda A + \mu B) = \lambda m_\alpha(A) + \mu m_\alpha(B).$$

[2]) Segal I. E. *Annals of Math.*, 48 (1947), 930–948; A mathematical approach to elementary particles and their fields, Lecture notes, University of Chicago, 1955, Ch. 1.

У Сигала состояние по определению есть действительная функция на множестве ограниченных наблюдаемых, которая обладает этими двумя свойствами. С нашей точки зрения, это определение допускает слишком много состояний. Не каждое состояние в смысле Сигала ставит в соответствие каждой ограниченной наблюдаемой некоторое распределение вероятностей. Состояния Сигала — это, по-видимому, все пределы таких состояний, которые действительно ставят в соответствие каждой наблюдаемой вероятностное распределение; в применениях такие идеальные „предельные состояния“ часто бывают удобными.

Если сумма $A + B$ всегда существует, то мы можем определить „симметризованное произведение“ двух ограниченных наблюдаемых, положив $A \circ B = [(A+B)^2 - A^2 - B^2]/2$. В той модели, которую действительно использует квантовая механика, $A \circ B$ дистрибутивно относительно сложения, и множество всех ограниченных наблюдаемых образует коммутативную неассоциативную алгебру такого типа, который алгебраисты называют йордановой алгеброй (Йордан — физик, который начал изучение этих алгебр именно в связи с квантовой механикой). К сожалению, нет никакого известного физического оправдания предположению, что $A \circ B$ всегда дистрибутивно, а Лауденслагер и Шерман привели примеры, показывающие, что дистрибутивность не вытекает из аксиом Сигала.

Пусть $Q_1$ и $Q_2$ — вопросы в классической механике, т. е. борелевские подмножества $\mathcal{M}_{V^*}$. Положим

$$R_1 = Q_1 \setminus Q_1 \cap Q_2, \quad R_2 = Q_2 \setminus Q_1 \cap Q_2, \quad Q_3 = Q_1 \cap Q_2;$$

тогда $R_1, R_2$ и $Q_3$ попарно не пересекаются, и $Q_1 = R_1 + Q_3$, $Q_2 = R_2 + Q_3$. В общем случае может и не существовать трех вопросов $R_1, R_2$ и $Q_3$, таких, что

$$R_1 \mathrel{\overset{|}{\bigcirc}} R_2, \quad R_1 \mathrel{\overset{|}{\bigcirc}} Q_3, \quad R_2 \mathrel{\overset{|}{\bigcirc}} Q_3, \quad Q_1 = R_1 + Q_3, \quad Q_2 = R_2 + Q_3.$$

Если такие вопросы существуют, то мы будем говорить, что $Q_1$ и $Q_2$ совместны или *допускают одновременные ответы*. Оправданием такой терминологии служит легко доказываемая теорема, утверждающая, что $Q_1$ и $Q_2$ допускают одновременные ответы (в этом смысле) в том и только в том случае, когда существует наблюдаемая $A$ и борелевские множества $E_1$ и $E_2$ на прямой, такие, что $Q^A_{E_1} = Q_1$ и $Q^A_{E_2} = Q_2$. Более общим образом, мы назовем две наблюдаемые $A$ и $B$ допускающими одновременное наблюдение, если $Q^A_E$ и $Q^B_F$ допускают одновременные ответы для любой пары $E$ и $F$ из $\mathcal{B}$. В нашей конечной системе аксиом можно будет доказать, что две наблюдаемые $A$ и $B$ допускают одновременное наблюдение тогда и только тогда, когда существуют наблюдаемая $C$ и борелевские функции $f$ и $\mathrm{g}$, такие, что $A = f(C)$ и $B = \mathrm{g}(C)$. Вполне возможно, что это можно получить из уже имеющихся аксиом.

Предположим, что наша система такова, что любые два вопроса $Q_1$ и $Q_2$ допускают одновременные ответы. Тогда, как нетрудно видеть, наша система является *структурой*, т. е. для любых двух вопросов $Q_1$ и $Q_2$ существует наименьший из вопросов, больших каждого из $Q_i$ или равных ему (он обозначается через $Q_1 \cup Q_2$), и наибольший из вопросов, меньших каждого из $Q_i$ или равных ему (он обозначается через $Q_1 \cap Q_2$). Далее, эта структура является булевой алгеброй в том смысле, что на ней задан инволютивный антиавтоморфизм $Q \to 1 - Q$, для которого $Q \cap (1 - Q) = 0$, $Q \cup (1 - Q) = 1$, а также выполняется *дистрибутивный закон*:

$$Q_1 \cap (Q_2 \cup Q_3) = (Q_1 \cap Q_2) \cup (Q_1 \cap Q_3)$$

Обратно, нетрудно видеть, что если наша система является булевой алгеброй, то любые два вопроса допускают одновременные ответы.

Даже если у нас имеются вопросы, не допускающие одновременных ответов, то будет по крайней мере два вопроса — 0 и 1, — совместных с любым вопросом. Мы будем

называть множество всех таких вопросов *центром* $\mathfrak{Q}$, обозначать его через $C(\mathfrak{Q})$. Ясно, что $C(\mathfrak{Q})$ всегда является булевой алгеброй. Предположим, что $C(\mathfrak{Q})$ содержит элемент $Q_0$, отличный от 0 и 1. Тогда $1 - Q_0$ также принадлежит $C(\mathfrak{Q})$, и любой другой вопрос $R \in \mathfrak{Q}$ однозначно представляется в виде $R_1 + R_2$, где $R_1 \leqslant Q_0$ и $R_2 \leqslant 1 - Q_0$. Таким образом, $\mathfrak{Q}$ есть „прямая сумма“ двух частично упорядоченных множеств $\mathfrak{Q}_1$ и $\mathfrak{Q}_2$, где

$$\mathfrak{Q}_1 = \{Q : Q \leqslant Q_0\}, \quad \mathfrak{Q}_2 = \{Q : Q \leqslant 1 - Q_0\}.$$

Множества $\mathfrak{Q}_1$ и $\mathfrak{Q}_2$ удовлетворяют всем нашим аксиомам, и мы можем рассмотреть их центры и разложить их дальше, если это возможно. Мы можем попытаться разложить таким образом $\mathfrak{Q}$ в прямую сумму $\mathfrak{Q}_1 \oplus \mathfrak{Q}_2 \oplus \ldots$, где $\mathfrak{Q}_j$ *неразложимы* в том смысле, что их центры тривиальны. Конечно, как показывает пример классической механики, вообще говоря, может не существовать такого дискретного разложения. С другой стороны, достаточно ясно, что с помощью современной теории непрерывных прямых сумм можно показать, что каждое $\mathfrak{Q}$ является „прямым интегралом“ или „непрерывной прямой суммой“ неразложимых $\mathfrak{Q}_j$. При этом, конечно, такая непрерывная сумма будет булевой алгеброй в том и только в том случае, когда все ее неразложимые компоненты тривиальны, т. е. являются одноточечными множествами.

С точки зрения, принятой в этом курсе, основное различие между классической и квантовой механикой состоит в том, что в квантовой механике имеются вопросы, не допускающие одновременных ответов, т. е. $\mathfrak{Q}$ не является булевой алгеброй. Можно пойти дальше и установить не только то, чем $\mathfrak{Q}$ не является, но и то, чем оно является. Почти все современные теории квантовой механики основываются более или менее явно на следующем предположении, которое мы примем за аксиому.

Аксиома 7. *Частично упорядоченное множество всех вопросов в квантовой механике изоморфно частично упорядоченному по включению множеству всех замкнутых подпространств бесконечномерного сепарабельного комплексного гильбертова пространства.*

Эта аксиома носит совершенно иной характер, чем аксиомы 1—6. Все предыдущие аксиомы были в достаточной степени естественными и физически оправданными; аксиома 7 представляется совершенно произвольной. Почему мы ее приняли ? Можем ли мы оправдать ее появление ? Что еще мы могли бы предположить вместо нее ? Мы обсудим эти вопросы по очереди.

Легче всего ответить на первый из них. Мы приняли эту аксиому, поскольку она „работает“, т. е. приводит к теории, которая объясняет физические явления и успешно предсказывает результаты экспериментов. Возможно, что какое-то совершенно иное предположение было бы ничуть не хуже в этом отношении, но, по-видимому, не найдено ни одного такого предположения [3]).

В идеале хотелось бы иметь некоторый перечень физически правдоподобных предположений, из которых можно было бы вывести аксиому 7, или, за неимением такого, перечень, из которого вытекало бы некоторое множество возможностей для структуры $\mathfrak{Q}$, причем все из них, кроме одной, противоречили бы результатам должным образом поставленных экспериментов. В настоящий момент такого перечня аксиом не существует, и ничто не вынуждает нас принять аксиому 7, как логически неизбежную.

С другой стороны, эта аксиома вовсе не является совершенно случайной, как это представляется с первого взгляда. Если мы заменим вопрос: „Чем должно быть $\mathfrak{Q}$ ?“ более простым вопросом: „Каким мы должны взять $\mathfrak{Q}$, чтобы основные физические законы имели простую и изящную форму ?“, то мы придем к нескольким возможным вариантам аксиомы 7, которые не слишком сильно отличаются от принятой нами формулировки.

[3]) В этом отношении интересны последние работы ряда математиков в Женевском университете (Jauch, Stueckelberg и др.), посвященные вещественным и кватернионным гильбертовым пространствам.

В этой связи мы рассмотрим сейчас, в каких случаях частично упорядоченное множество может быть „почти булевой алгеброй“. Напомним, что булева алгебра — это дистрибутивная структура с дополнением. То, что в нашем частично упорядоченном множестве имеется дополнение, и даже ортогональное дополнение, следует из прежних аксиом. В целях „регулярности“ разумно предположить, что оно является структурой. Мы попытаемся найти некоторое ослабление дистрибутивного закона $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$. В частном случае, когда $a \geqslant c$, этот закон принимает вид $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup c$. Обратное *неверно*: существует много недистрибутивных структур, у которых из условия $a \geqslant c$ вытекает, что $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup c$. Такие структуры называются *модулярными* или *дедекиндовыми* и хорошо изучены.

Дедекиндовы структуры с дополнением можно считать наиболее правильно устроенными частично упорядоченными множествами после булевых алгебр. Во всяком случае, они являются наиболее регулярными из тех, которые серьезно изучались. В частности, если наложены некоторые условия конечности, то известно очень многое о возможной структуре дедекиндовых структур с дополнением.

Пусть $\mathcal{F}$ — произвольное (не обязательно коммутативное) тело, а $V_{\mathcal{F},n}$ — векторное пространство наборов из $n$ элементов $\mathcal{F}$. Тогда частично упорядоченное множество $\mathcal{L}_{\mathcal{F},n}$ всех подпространств $V_{\mathcal{F},n}$ является дедекиндовой структурой с дополнением и имеет место следующая теорема: пусть $\mathcal{L}$ — дедекиндова структура с дополнением, в которой „цепочки“ $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ имеют ограниченную длину; тогда $\mathcal{L}$ является прямой суммой структур вида $\mathcal{L}_{\mathcal{F},n}$ и еще некоторых структур, не содержащих цепочек длины больше 4.

При отсутствии условий, наложенных на цепочки, аналогичной теоремы нет [4]), но по меньшей мере вполне допустимо предположить, что $\mathcal{Q}$ является прямой суммой или прямым интегралом некоторых бесконечномерных обобщений $\mathcal{L}_{\mathcal{F},n}$. Наиболее очевидным из таких обобщений является структура всех замкнутых подпространств некоторого банахова пространства.

Далее, Какутани и автором доказано, что если в структуре всех замкнутых подпространств действительного или комплексного банахова пространства определена операция ортогонального дополнения, то норму банахова пространства можно заменить на эквивалентную так, что пространство превратится в гильбертово пространство с очевидным ортогональным дополнением. Короче говоря, мы естественным образом приходим к тому, что наиболее вероятными „кандидатами“ на участие в прямых суммах и интегралах структур являются $\mathcal{L}^{\mathbb{R}}$ и $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}$, где $\mathcal{L}^{\mathbb{R}}$ — структура всех замкнутых подпространств действительного гильбертова пространства, $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}$ — структура всех замкнутых подпространств комплексного гильбертова пространства. Не учитывая пока более экзотических возможностей выбора слагаемых, мы видим, что произвол в выборе нашей аксиомы 7 заключается лишь в том, что мы предполагаем наличие только *одного* слагаемого, а также в том, что это слагаемое определяется *комплексным* (а не действительным) гильбертовым пространством.

Предположение, что имеется только одно слагаемое, физически соответствует предположению, что каждая непостоянная наблюдаемая не допускает одновременного наблюдения с некоторыми наблюдаемыми, — предположению, что природа устроена достаточно разумно. Кроме того, естественно начать исследование именно с этого случая из-за его математической простоты. С другой стороны, в недавней работе по „высшим правилам отбора“ Уайтмена, Вика и Вигнера принимается, что, по крайней мере в некоторых случаях, $\mathcal{Q}$ является прямой суммой, и существуют непостоянные универсальные (совместные со всеми другими) наблюдаемые.

Несколько сложнее объяснить значение выбора комплексного векторного простран-

[4]) См., однако, статью Капланского [Kaplansky I., Any orthocomplemented complete modular lattice is a continuous geometry, *Annals of Math.*, **61** (1955), 524–541].

ства вместо действительного. В следующем разделе мы увидим, что существование умножения на $i$ дает возможность перенести на квантовую механику одно из наиболее сильных формальных свойств классической механики, а именно естественное соответствие между наблюдаемыми и однопараметрическими группами симметрий.

Структуры $\mathcal{L}^{\mathbb{R}}$ и $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}$ являются, вероятно, наиболее очевидными обобщениями $\mathcal{L}_{\mathcal{F},n}$, но они отнюдь не являются единственно возможными обобщениями. Действительные и комплексные числа не единственные числовые системы, над которыми можно строить гильбертово пространство. Большинство других возможностей придется, скорее всего, отбросить из-за несвязности или других подобных неудобств, однако остаются кватернионы, и мы должны рассматривать структуру замкнутых подпространств кватернионного гильбертова пространства как возможную замену $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}$. Имеются также возможности другого рода.

Структуру $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}$ можно также определить как структуру всех самосопряженных идемпотентов в кольце всех ограниченных линейных операторов в комплексном гильбертовом пространстве. Это кольцо представляет собой пример того, что Мюррей и фон Нейман назвали фактором [5]). В случае конечного числа измерений все факторы имеют такой вид, но в бесконечномерном случае такими являются только факторы типа 1. Для каждого фактора типа $II_1$, $II_\infty$ и $III$ можно образовать структуру всех его самосопряженных идемпотентов, которую также можно рассматривать в качестве возможной модели для $\mathcal{Q}$. В действительности фон Нейман имел в виду именно это применение, развивая теорию факторов. Более того, для фактора типа $II_1$ соответствующая структура будет дедекиндовой, тогда как, несмотря на те соображения, с помощью которых мы мотивировали введение $\mathcal{L}^{\mathbb{R}}$ и $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}$, эти структуры не являются вполне дедекиндовыми. Впрочем, строгий закон модулярности представляется, пожалуй, чересчур сильным в тех случаях, когда отсутствуют сильные условия конечности.

Было бы очень интересно подробно исследовать последствия, к которым привело бы изменение аксиомы 7 в только что указанных направлениях, однако такое исследование пока не проведено. Поэтому мы заканчиваем на этом наши оправдания и продолжаем выводить следствия из аксиомы 7 в том виде, в каком мы ее сформулировали.

Прежде всего, из упомянутой выше теоремы Какутани и автора непосредственно следует, что изоморфизм, о котором говорится в аксиоме 7, можно всегда выбрать так, что если вопрос $Q$ соответствует замкнутому подпространству $M$, то $1-Q$ соответствует замкнутому подпространству $M^{\perp}$ — ортогональному дополнению $M$. Далее, будет удобно отождествить каждое замкнутое подпространство с проектором на это подпространство. Другими словами, мы можем считать, что у нас имеется взаимно однозначное соответствие между элементами $\mathcal{Q}$ и проекторами в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, такое, что если $P \sim Q$, то $1-P \sim 1-Q$, и если $Q_1 \sim P_1$ и $Q_2 \sim P_2$, то $Q_1 \leqslant Q_2$ тогда и только тогда, когда $P_1P_2 = P_2P_1 = P_1$.

Нашей следующей задачей будет установить, какие меры на вопросах должны считаться состояниями, и благодаря одной глубокой теореме Глисона мы увидим, что существует только одно разумное решение этой задачи. Мы начнем с некоторых примеров мер на множестве вопросов.

Пусть $\varphi$ — произвольный вектор в нашем гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Для каждого вопроса $Q$ положим $m_\varphi(Q) = (P(\varphi)|\varphi)$, где $P$ — соответствующий проектор. Очевидно, что $m_\varphi$ есть некоторая вероятностная мера на $\mathcal{Q}$. Другие примеры можно получить, образуя выпуклые линейные комбинации $\gamma_1 m_{\varphi_1} + \gamma_2 m_{\varphi_2} + \ldots$, где $\gamma_i \geqslant 0$, $\sum \gamma_i = 1$, и $\varphi_i$ — единичные векторы. Согласно теореме Глисона, никаких иных примеров не существует: для любой вероятностной меры $m$ на $\mathcal{Q}$ существуют последовательность $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ элементов $\mathcal{H}$ единичной длины (которые можно выбрать ортогональными) и последова-

[5]) Определение факторов и начальные сведения о них изложены в гл. VII книги Наймарка [Наймарк М. А., Нормированные кольца, М., 1956]. — *Прим. ред.*

тельность $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ положительных чисел, удовлетворяющая условию $\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots = 1$, такие, что $m = \gamma_1 m_{\varphi_1} + \gamma_2 m_{\varphi_2} + \ldots$. Доказательство Глисона этой в высшей степени нетривиальной теоремы можно найти в его статье [6]).

Мы должны решить, какие из этих мер соответствуют состояниям. Как отмечалось ранее, нет никаких оснований заранее предполагать, что все меры соответствуют состояниям, однако благодаря теореме Глисона мы сможем доказать это, если примем еще одну вполне правдоподобную аксиому.

Аксиома 8. *Если $Q$ — вопрос, отличный от 0, то существует состояние $\alpha$, для которого $m_\alpha(Q) = 1$.*

Теорема. *Каждая мера на множестве вопросов соответствует некоторому состоянию.*

Доказательство. Пусть $\varphi$ — произвольный единичный вектор в $\mathcal{H}$, и $P$ — проектор на одномерное подпространство, порожденное $\varphi$. Согласно аксиоме 8, существует состояние $\alpha$, для которого $m_\alpha(Q) = 1$, где $Q$ — вопрос, соответствующий проектору $P$. В силу теоремы Глисона,

$$m_\alpha = \gamma_1 m_{\varphi_1} + \gamma_2 m_{\varphi_2} + \ldots$$

при некоторых $\gamma_i$ и $\varphi_i$; поэтому

$$0 = m_\alpha(1 - Q) = \gamma_1[1 - (P(\varphi_1)|\varphi_1)] + \gamma_2[1 - (P(\varphi_2)|\varphi_2)] + \ldots,$$

т. е. $\gamma_j[1 - (P(\varphi_j)|\varphi_j)] = 0$ для всех $j$. Следовательно $P(\varphi_j) = \varphi_j$ для каждого $j$, т. е. для каждого $j$ $\varphi_j = c_j\varphi$, где $|c_j| = 1$. Таким образом,

$$m_{\varphi_j}(P') = (P'(\varphi_j)|\varphi_j) = (P'(c_j\varphi)|c_j\varphi) = (P'\varphi|\varphi)$$

для всех $P'$. Отсюда следует, что $m_{\varphi_j} = m_\varphi$ для всех $j$, поэтому $\sum \gamma_j m_{\varphi_j} = m_\varphi$, т. е. $m_\alpha = m_\varphi$. Следовательно, $m_\varphi$ соответствует некоторому состоянию. Поскольку $\varphi$ — произвольный единичный вектор, и каждая мера на вопросах имеет вид $\sum \gamma_j m_{\varphi_j}$, то, применяя аксиому 4, мы получаем, что любая мера на $\mathcal{Q}$ соответствует некоторому состоянию.

Нетрудно видеть, что все состояния, которым соответствуют меры на $\mathcal{Q}$ вида $m_\varphi$, где $\varphi$ — единичный вектор из $\mathcal{H}$, являются чистыми состояниями. Очевидно, что все остальные состояния не являются чистыми. Поэтому $\varphi \to m_\varphi$ — отображение единичной сферы гильбертова пространства на множество чистых состояний нашей системы. Это отображение не взаимно однозначно, но мы можем непосредственно убедиться в том, что $m_\varphi = m_\psi$ тогда только тогда, когда $\varphi = c\psi$ для некоторого комплексного числа $c$, равного по модулю 1. Поэтому, если мы отождествим $\varphi$ с $e^{ix}\varphi$, то получим взаимно однозначное соответствие между единичными векторами в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и чистыми состояниями.

Теперь посмотрим, как выглядят в свете аксиомы 7 наблюдаемые нашей системы. Согласно общей теории, наблюдаемые взаимно однозначно соответствуют мерам со значениями в множестве всех вопросов. С другой стороны, мы отождествили теперь вопросы с проекторами в гильбертовом пространстве. Таким образом, наблюдаемые соответствуют взаимно однозначным образом проекторным мерам в нашем гильбертовом пространстве. Но, согласно спектральной теореме, существует естественное взаимно однозначное соответствие между проекторными мерами и (не обязательно ограниченными) самосопряженными операторами. Объединяя эти два соответствия, мы устанавливаем взаимно однозначное соответствие между наблюдаемыми и самосопряженными операторами.

Пусть $A$ — произвольный самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$, $\varphi$ —произвольный единичный вектор, и $E$ — борелевское множество. Какова вероятность того, что в чистом

[6]) Gleason A.M., *J. Math. Mechanics*, **6** (1953), 885–893.

состоянии, определяемом $\varphi$, измерение наблюдаемой, определяемой $A$, будет давать результат из множества $E$ ? Для того чтобы ответить на этот вопрос, нужно сначала перейти к проекторной мере $P^A$, определяемой оператором $A$ согласно спектральной теореме. Тогда проектором, соответствующим вопросу: „Лежит ли значение нашей наблюдаемой в $E$?“ — будет $P_E^A$, а искомая вероятность будет равна $(P_E^A\varphi|\varphi)$. Мы можем теперь кратко сформулировать основные положения квантовой механики.

*Наблюдаемые взаимно однозначно соответствуют самосопряженным операторам в сепарабельном бесконечномерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Чистые состояния взаимно однозначно соответствуют одномерным подпространствам $\mathcal{H}$. Вероятностное распределение, которое соответствует наблюдаемой, определяемой оператором $A$, в чистом состоянии, определяемом одномерным подпространством, порожденным единичным вектором $\varphi$, задается формулой*

$$E \to (P_E^A(\varphi)|\varphi),$$

*где $P_E^A$ — проекторная мера, соответствующая оператору $A$ согласно спектральной теореме. Каждое состояние представляет собой некоторую (вообще говоря, бесконечную) выпуклую комбинацию чистых состояний.*

Введение самосопряженных операторов в этом месте могло показаться искусственным, поскольку мы тут вернулись обратно к основной проекторной мере для того, чтобы получить статистическое распределение наблюдаемой. Однако, как мы сейчас увидим, операторы сами по себе играют очень важную роль во всей теории; в приложениях бывают известны именно операторы и требуется найти их спектральное разложение.

В качестве первого примера непосредственного применения операторов мы вычислим среднее значение наблюдаемой, определяемой оператором $A$, в состоянии, определяемом $\varphi$. Оно будет равно

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, d\alpha(x),$$

где $\alpha$ — соответствующая вероятностная мера, т. е. $E \to (P_E^A(\varphi)|\varphi)$. Но, согласно спектральной теореме,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, d(P_x^A(\varphi)|\varphi) = (A\varphi|\varphi);$$

поэтому искомое среднее значение равно $(A\varphi|\varphi)$, т. е. может быть выражено непосредственно через $A$ и $\varphi$ без обращения к $P^A$. Конечно, если оператор $A$ неограничен, то вектор $A_\varphi$ не всегда определен, но, поскольку неограниченная наблюдаемая не обязана иметь среднее значение во всех состояниях, мы и не должны были ожидать, что $(A\varphi|\varphi)$ будет определено при всех $\varphi$.

Пусть $A_1$ и $A_2$ — ограниченные самосопряженные операторы, причем $(A_1\varphi|\varphi) = (A_2\varphi|\varphi)$ при всех $\varphi$. Тогда, заменяя $\varphi$ на $\theta + c\psi$ и заставляя $c$ пробегать всевозможные комплексные значения, мы без труда получим, что $(A_1\theta|\psi) = (A_2\theta|\psi)$ для всех $\theta$ и $\psi$ и, следовательно, $A_1 = A_2$. Поскольку, как легко видеть, ограниченные наблюдаемые соответствуют в точности ограниченным самосопряженным операторам, аксиома 2' выполняется, и поэтому мы можем выяснить, всегда ли существует сумма двух наблюдаемых. Из тождества

$$((A + B)\varphi|\varphi) = (A\varphi|\varphi) + (B\varphi|\varphi)$$

мы сразу же заключаем, что для любых двух ограниченных наблюдаемых существует сумма, и что оператор, соответствующий этой сумме, является суммой операторов, соответствующих данным наблюдаемым. Поскольку два неограниченных самосопряжен-

ных оператора могут иметь непересекающиеся области определения, мы, за исключением специальных случаев, ничего не можем сказать о сумме двух неограниченных наблюдаемых.

Пусть $A'$ — некоторая наблюдаемая, и $A$ — самосопряженный оператор, который ей соответствует; пусть, далее, $f(x)$ — произвольная борелевская функция на прямой. Мы можем определить наблюдаемую $f(A')$ в соответствии с аксиомой 3, и самосопряженный оператор $f(A)$ так, как мы это делали при обсуждении спектральной теоремы. Будет ли оператор $f(A)$ соответствовать наблюдаемой $f(A')$ ? Легко показать, что будет. Действительно, проекторная мера, соответствующая $f(A)$, есть $E \to P^A_{f^{-1}(E)}$, а вопросная мера, соответствующая $f(A')$, есть $E \to Q^{A'}_{f^{-1}(E)}$. Поскольку $Q^{A'}_F$ и $P^A_F$ соответствуют друг другу при всех $F$, наше утверждение верно.

Пусть $\varphi$ — собственный вектор самосопряженного оператора $A$, и $\lambda$ — соответствующее собственное значение; тогда $P^A_{\{\lambda\}}\varphi = \varphi$, т. е. $(P^A_E\varphi|\varphi) = 1$, если $\lambda \in E$, и $(P^A_E\varphi|\varphi) = 0$ в противном случае. Другими словами, собственный вектор самосопряженного оператора определяет состояние, в котором соответствующая наблюдаемая имеет с вероятностью единица соответствующее собственное значение. Обратно, если $(P^A_{\{\lambda\}}\varphi|\varphi) = 1$ для некоторых $\varphi, A$ и $\lambda$, то $P^A_{\{\lambda\}}(\varphi) = \varphi$ и, как нетрудно показать, $A(\varphi) = \lambda\varphi$. Если $A$ имеет чисто точечный спектр, и $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — базис из собственных векторов с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ соответственно, то каждый единичный вектор $\varphi$ можно однозначным образом представить в виде $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots$. Нетрудно подсчитать, что в состоянии, определяемом вектором $\varphi$, наблюдаемая, соответствующая $A$, принимает значение $\lambda_j$ с вероятностью $|c_j|^2$ и принимает значение на дополнении к множеству $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ с вероятностью нуль.

Если $\lambda$ — точка непрерывного спектра оператора $A$, то не будет состояний, в которых значение $\lambda$ принимается с положительной вероятностью. С другой стороны, при любом $\varepsilon > 0$ проектор $P^A_{[\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]}$ будет отличен от нуля, и любой единичный вектор из подпространства, соответствующего этому проектору, определяет чистое состояние, в котором наблюдаемая с вероятностью единица принимает значение между $\lambda-\varepsilon$ и $\lambda+\varepsilon$. Мы предоставляем доказательство этих утверждений читателю.

Пусть $A$ и $B$ — самосопряженные операторы. В теории операторов есть теорема, утверждающая, что если $A$ и $B$ ограничены, то $AB = BA$ тогда и только тогда, когда $P^A_E P^B_F = P^B_F P^A_E$ при всех $E$ и $F$. Поскольку последнее условие имеет смысл независимо от того, ограничены ли операторы $A$ и $B$, мы примем его за определение коммутирования в общем случае. Мы будем, таким образом, говорить, что $A$ и $B$ коммутируют, тогда и только тогда, когда соответствующие наблюдаемые допускают одновременное наблюдение в определенном выше смысле. На самом деле теперь мы можем дать более удовлетворительное объяснение нашего определения „одновременной наблюдаемости“. Если $A$ и $B$ коммутируют, то, как это следует из общей теоремы, существует самосопряженный оператор $C$ и борелевские функции $f$ и g, такие, что $A = f(C)$ и $B = \mathrm{g}(C)$. Поэтому наблюдаемые $A'$ и $B'$ являются функциями одной и той же наблюдаемой $C'$ и действительно допускают одновременное наблюдение. Обратно, если $A'$ и $B'$ ограничены и допускают одновременное наблюдение, то мы можем говорить об их произведении; оператор, соответствующий этому произведению, должен быть равен

$$\frac{(A+B)^2 - A^2 - B^2}{2} = \frac{AB + BA}{2}.$$

Оператор, соответствующий ${A'}^2B'$, с одной стороны, должен быть равен

$$\frac{1}{2}\left[\frac{A(AB+BA)}{2} + \frac{(AB+BA)A}{2}\right] = \frac{A^2B + 2ABA + BA^2}{4}$$

а с другой — равен $(A^2B + BA^2)/2$; поэтому $ABA = (A^2B + BA^2)/2$, и то же самое верно для $f(A)$ и $g(B)$ при любых функциях $f$ и $g$. Таким образом,

$$P_E^A P_F^B P_E^A = \frac{P_E^A P_F^B + P_F^B P_E^A}{2}$$

для всех $E$ и $F$. Умножая это равенство на $P_E^A$ сначала слева, а затем справа, получаем два уравнения; вычитая одно из них из другого, находим, что $P_E^A P_F^B = P_F^B P_E^A$, т. е. что $A$ и $B$ действительно коммутируют.

Если $A$ и $B$ не коммутируют, то имеются некоторые ограничения на степень, с которой вероятностные распределения этих наблюдаемых могут одновременно концентрироваться около отдельных точек. Мы можем получить количественную характеристику степени дисперсии или „размазанности“ $\delta$ некоторой наблюдаемой в данном состоянии, извлекая квадратный корень из среднего значения квадрата разности между наблюдаемой и ее средним значением. Если $A$ — соответствующий оператор, и $\varphi$ — единичный вектор, определяющий состояние, то дисперсия $\delta(A, \varphi)$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}\delta^2(A,\varphi) = ((A - (A\varphi|\varphi)I)^2(\varphi)|\varphi) = ((A^2 - 2(A\varphi|\varphi)A + (A\varphi|\varphi)^2 I)\varphi|\varphi) = \\ = (A^2\varphi|\varphi) - 2(A\varphi|\varphi)^2 + (A\varphi|\varphi)^2 = (A^2\varphi|\varphi) - (A\varphi|\varphi)^2.\end{aligned}$$

Пусть теперь $A$ и $B$ — два самосопряженных оператора, а $\varphi$ — вектор из пересечения их областей определения, такой что $AB(\varphi)$ и $BA(\varphi)$ определены. Найдем нижнюю границу для произведения $\delta(A, \varphi)\,\delta(B, \varphi)$; мы имеем

$$2\Im(A\varphi|B\varphi) = (A\varphi|B\varphi) - (B\varphi|A\varphi) = (BA(\varphi)|\varphi) - (AB(\varphi)|\varphi) = ((BA - AB)(\varphi)|\varphi),$$

следовательно,

$$|((BA - AB)(\varphi)|\varphi)| \leqslant 2|(A\varphi|B\varphi)| \leqslant 2\,\|A\varphi\| \cdot \|B\varphi\|.$$

Заменяя здесь $A$ на $A - aI$ и $B$ на $B - bI$, где $a$ и $b$ — произвольные числа, и пользуясь тем, что

$$(B - bI)(A - aI) - (A - aI)(B - bI) = BA - AB,$$

мы получаем

$$|((BA - AB)(\varphi)|\varphi)| \leqslant 2\,\|A\varphi - a\varphi\| \cdot \|B\varphi - b\varphi\|.$$

Но

$$\delta^2(A,\varphi) = (A^2\varphi|\varphi) - (A\varphi|\varphi)^2 = ((A - (A\varphi|\varphi)I)\varphi|(A - (A\varphi|\varphi)I)\varphi) = \|(A - (A\varphi|\varphi)I)\varphi\|^2,$$

т. е.

$$\delta(A,\varphi) = \|(A - (A\varphi|\varphi)I)\varphi\| = \|A\varphi - (A\varphi|\varphi)\varphi\|,$$

поэтому

$$|((BA - AB)(\varphi)|\varphi)| \leqslant 2\,\delta(A,\varphi) \cdot \delta(B,\varphi).$$

и произведение двух дисперсий ограничено снизу числом

$$\frac{|(BA - AB)(\varphi)|\varphi)|}{2}.$$

Мы увидим далее, что если $A$ — оператор, соответствующий прямоугольной координате, а $B$ — оператор, соответствующий производной этой координаты по времени, то $i(AB - BA)$ только некоторым скалярным множителем $c$ отличается от тождественного оператора, причем скаляр $c$ обратно пропорционален массе, ассоциированной с соответствующей координатой; поэтому для каждого состояния $\delta(A, \varphi)\,\delta(B, \varphi) \geqslant c/2$. Для

обычных масс величина $\sqrt{c/2}$ значительно меньше, чем дисперсия, происходящая из-за ошибок эксперимента. Поэтому для любых практических целей можно считать, что обе наблюдаемые имеют вероятностные распределения, одновременно сконцентрированные в точках. Однако для масс атомного размера $\sqrt{c/2}$ имеет гораздо большее значение, и становится невозможным сделать одну из дисперсий достаточно малой, не слишком увеличивая вторую. Соотношение $\delta(A,\varphi)\,\delta(B,\varphi) \geqslant c/2$ является точной формой известного принципа неопределенности Гейзенберга. Величина $c$ оказывается равной $h/(2\pi m)$, где $h$ — постоянная Планка.

В заключение этого раздела мы приведем более изящное описание смешанных состояний при помощи операторов. Пусть $A$ — ограниченный самосопряженный оператор с чисто точечным спектром, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — полная ортонормальная система собственных векторов и $A(\varphi_j) = \lambda\varphi_j$. Если $|\lambda_1|+|\lambda_2|+\ldots < \infty$, то мы будем говорить, что $A$ — *ядерный* оператор, или оператор *с конечным следом*, и будем называть $\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1+\lambda_2+\ldots$ *следом* оператора $A$. Более общим образом, пусть $C$ — произвольный ограниченный оператор, $A = (C+C^*)/2$ и $B = (C-C^*)/2i$. Тогда $A$ и $B$ ограничены, самосопряжены, и $C = A + Bi$. Мы скажем, что $C$ ядерный оператор, если таковыми являются $A$ и $B$, и положим $\mathrm{Tr}(C) = \mathrm{Tr}(A)+i\mathrm{Tr}(B)$. Легко показать, что если $C$ — произвольный ядерный оператор, то для любого ортонормированного базиса $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ в $\mathcal{H}$ будет иметь место разложение

$$\mathrm{Tr}(C) = (C(\varphi_1)|\varphi_1) + (C(\varphi_2)|\varphi_2) + \ldots,$$

причем ряд сходится абсолютно. Отсюда непосредственно следует, что $\mathrm{Tr}(C_1 + C_2) = \mathrm{Tr}(C_1) + \mathrm{Tr}(C_2)$, если все три следа существуют. Нетрудно также доказать, что $C_1 + C_2$, $C_1S$ и $SC_1$ будут ядерными операторами, если $C_1$ и $C_2$ — ядерные операторы, а $S$ — любой ограниченный линейный оператор; более того, $\mathrm{Tr}(SC_1) = \mathrm{Tr}(C_1S)$.

Пусть теперь $\varphi$ — единичный вектор в $\mathcal{H}$, и $P_\varphi$ — оператор $\psi \to (\psi|\varphi)\varphi$, т. е. проектор на одномерное подпространство, состоящее из векторов, кратных $\varphi$, следовательно, ядерный оператор со следом 1. Вообще проектор на *конечномерное* подпространство будет ядерным оператором, след которого равен размерности соответствующего подпространства. Если $S$ — любой ограниченный линейный оператор, то

$$(P_\varphi S(\varphi)|\varphi) = (S(\varphi)|\varphi),$$

и для $\varphi'$, ортогональных к $\varphi$, $(P_\varphi S(\varphi')|\varphi') = 0$. Поэтому, рассматривая $\varphi$ как часть полной ортонормальной системы, мы получаем $\mathrm{Tr}(P_\varphi S) = (S(\varphi)|\varphi)$; следовательно,

$$m_\varphi(P) = \mathrm{Tr}(P_\varphi P) = \mathrm{Tr}(PP_\varphi)$$

для каждого проектора $P$. Далее, пусть $A$ — произвольный ограниченный самосопряженный ядерный оператор с неотрицательным спектром и со следом 1; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — его собственные векторы. Тогда $A(\varphi_j) = \gamma_j\varphi_j$, где $\gamma_j \geqslant 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots = 1$, и для любого проектора

$$\mathrm{Tr}(PA) = \mathrm{Tr}(AP) = \gamma_1 m_{\varphi_1}(P) + \gamma_2 m_{\varphi_2}(P) + \ldots;$$

поэтому для любого оператора $A$ с указанными выше свойствами $P \to \mathrm{Tr}(AP)$ есть мера на множестве вопросов, т. е. состояние.

Обратное тоже верно. Если $\alpha$ — любое состояние, то

$$m_\alpha = \gamma_1 m_{\varphi_1} + \gamma_2 m_{\varphi_2} + \ldots;$$

где $\gamma_j \geqslant 0$ и $\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots = 1$. Векторы $\varphi_j$ не обязательно ортогональны, однако

$$A = \gamma_1 P_{\varphi_1} + \gamma_2 P_{\varphi_2} + \ldots$$

представляет собой ограниченный неотрицательный самосопряженный оператор со следом 1, и $\mathrm{Tr}(AP) = m_\alpha(P)$ для всех проекторов $P$.

Итак, мы доказали, что состояния можно поставить во взаимно однозначное соответствие с неотрицательными самосопряженными ядерными операторами со следом 1 таким образом, что для соответствующих друг другу наблюдаемой $\alpha$ и оператора $A$ будет выполняться равенство $m_\alpha(P) = \mathrm{Tr}(PA)$ для всех проекторов $P$.

Заметим, что среднее значение ограниченной наблюдаемой, определяемой самосопряженным оператором $B$, в смешанном состоянии $\gamma_1\alpha_{\varphi_1} + \gamma_2\alpha_{\varphi_2} + \ldots$ равно

$$\gamma_1(B\varphi_1|\varphi_1) + \ldots = \gamma_1\mathrm{Tr}(BP_{\varphi_1}) + \ldots = \mathrm{Tr}(B(\gamma_1 P_{\varphi_1} + \ldots)) = \mathrm{Tr}(BA),$$

где $A$ — оператор, определяющий состояние.

Интересно, что, описывая состояния операторами, мы получили точное взаимно однозначное соответствие в отличие от того, что мы имели при представлении чистых состояний единичными векторами. Это объясняется тем, что при $|c| = 1$ операторы $P_\varphi$ и $P_{c\varphi}$ совпадают; неоднозначность возникла из-за того, что мы пытались описывать проекторы на одномерные подпространства некоторыми векторами в этих подпространствах.

Смешанные состояния и операторы, описывающие их, были введены в квантовую механику фон Нейманом. Они играют центральную роль в статистической квантовой механике. Матрица оператора, определяющего смешанное состояние (относительно некоторого подходящего базиса), известна физикам как матрица плотности фон Неймана.

## 2.3 Квантовая динамика и уравнение Шредингера

До этого момента мы занимались квантовой статикой — взаимоотношениями между состояниями и наблюдаемыми в некоторый фиксированный момент времени. В этом разделе мы будем рассматривать квантовую динамику — законы, по которым состояния меняются с течением времени. Несмотря на „недетерминированный“ характер квантовой механики, проявляющийся в том, что в ней возможны только статистические утверждения об ожидаемых результатах измерения наблюдаемых, оказывается, что связь состояний в различные моменты времени строго детерминирована; другими словами, состояние в момент времени $t_2 > t_1$ однозначно определяется отрезком времени $t_2 - t_1$ и состоянием в момент времени $t_1$. Точно так же как в классической механике, мы получаем здесь однопараметрическую полугруппу $t \to V_t$ преобразований $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$, такую, что если состояние системы при $t = t_1$ было $\alpha$, то при $t = t_2$ оно будет $V_{t_2-t_1}(\alpha)$.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — состояния, а $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ — положительные числа, сумма которых равна 1. Предположим, что при $t = 0$ мы находимся в состоянии $\alpha_j$ с вероятностью $\gamma_j$; тогда при $t = t_0$ мы с вероятностью $\gamma_j$ находимся в состоянии $V_{t_0}(\alpha_j)$. Таким образом, если при $t = 0$ мы находимся в состоянии $\gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_1 + \ldots$, то при $t = t_0$ мы находимся в состоянии $\gamma_1 V_{t_0}\alpha_1 + \gamma_2 V_{t_0}\alpha_2 + \ldots$. Другими словами, каждое $V$ сохраняет выпуклую комбинацию состояний. Эти физические соображения в совокупности с естественным предположением, что для каждой фиксированной тройки $A, \alpha, E$ из $\mathcal{A} \times \mathcal{S} \times \mathcal{B}$ вероятность $p(A, \alpha, E)$ должна мало меняться за короткий промежуток времени, приводят к следующему дополнению нашей системы аксиом.

Аксиома 9. *Задана некоторая однопараметрическая полугруппа $t \to V_t$ преобразований $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$ такая, что для каждой последовательности элементов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ из $\mathcal{S}$, каждой последовательности $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ неотрицательных чисел с суммой 1 и для всех $t \geqslant 0$ справедливо равенство*

$$V_t(\gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \ldots) = \gamma_1 V_t(\alpha_1) + \gamma_2 V_t(\alpha_2) + \ldots$$

*и для каждой тройки $(A, \alpha, E) \in \mathcal{A} \times \mathcal{S} \times \mathcal{B}$ вероятность $p(A, V_t(\alpha), E)$ является непрерывной функцией $t$.*