блюдаемыми $\cos\theta$ и $\sin\theta$ в этом состоянии. В действительности в этом случае полученной наблюдаемой можно поставить в соответствие унитарный оператор в $\mathcal{H}$. Одно обобщение спектральной теоремы устанавливает взаимно однозначное соответствие между проекторными мерами на плоскости и так называемыми „нормальными“ операторами. Нормальные операторы со спектром, лежащим на окружности $|z| = 1$, — это в точности унитарные операторы.

Наблюдаемая импульса в классической механике — это функция g на $\mathcal{M}_{V^*}$, такая, что $\widetilde{d\mathrm{g}}$ является инфинитезимальной образующей некоторой однопараметрической группы на $\mathcal{M}_{V^*}$, порожденной однопараметрической группой на $\mathcal{M}$. Эта однопараметрическая группа на $\mathcal{M}$ порождает однопараметрическую унитарную группу на $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$; инфинитезимальная образующая последней, умноженная на $\hbar/i$, является по определению оператором, задающим соответствующую наблюдаемую импульса в квантовой механике. Это определение естественно и подтверждается тем, что соотношение между скоростью и импульсом в классической механике сохраняется в квантовой механике; наблюдаемая скорости, соответствующая наблюдаемой координаты, определяемой оператором Q_j, задается, конечно, оператором $i(HQ_f - Q_fH)$.

Заметим, что наблюдаемым координаты и импульса соответствуют вполне определенные самосопряженные операторы в $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$. Динамический оператор H (определенный формально) линейно отображает Q_f для достаточно гладких f на некоторое подмножество наблюдаемых импульса, и кинетическая часть H определяется (по крайней мере формально) этим отображением. Было бы интересно довести формальную часть этих соображений до строгой теории.

Естественное гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ удобно использовать для прямого сравнения классической и квантовой механики. Напомним, что в квантовой механике рассматриваются однопараметрические группы автоморфизмов $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$, тогда как в классической — однопараметрические группы автоморфизмов других объектов, естественно связанных с $\mathcal{M}$, а именно кокасательных пучков $\mathcal{M}_{V^*}$. Пусть теперь $\varphi = (\alpha, e^{iS})$ — произвольный элемент $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$, такой, что функция S дифференцируема. Функция S определена только с точностью до слагаемого, кратного 2π, но дифференциал dS определен однозначно и отображает $\mathcal{M}$ в $\mathcal{M}_{V^*}$. Положим $\beta_\varphi = \alpha\left(dS^{-1}(E)\right)$ для любого борелевского множества E в $\mathcal{M}_{V^*}$. Тогда β_φ — конечная мера на $\mathcal{M}_{V^*}$, сконцентрированная на $dS(\mathcal{M})$. Далее, β_φ однозначно определяет φ. Таким образом, $\varphi \to \beta_\varphi$ есть взаимно однозначное отображение плотного подпространства $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ во множество всех конечных мер на $\mathcal{M}_{V^*}$. Под действием динамической группы в $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ меры β_φ движутся в $\mathcal{M}_{V^*}$. Если β_φ сконцентрировано вблизи одной точки, то движение этой точки в $\mathcal{M}_{V^*}$ будет происходить вблизи траектории соответствующей классической системы. Было бы интересно дать строгое доказательство некоторой точной теоремы, относящейся к этим связям $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{M}_{V^*}$ [12]).

2.7 Линейные системы и квантование электромагнитного поля

В разд. 1.4 мы показали, как можно переформулировать классическую механику линейной системы, чтобы применить ее к системам с бесконечным числом степеней свободы. В этом разделе мы покажем, что переход от классической линейной системы к квантовой может быть проведен так, что он будет иметь смысл также для систем с бесконечным числом степеней свободы. Мы покажем затем, что квантованное электромагнитное поле представляет собой такую модель для теории излучения, которая позволяет объединить волновые и корпускулярные аспекты этой теории.

[12]) Такая теорема доказана в работах В. П. Маслова (Успехи матем., наук, **14** (1959), вып. 3, 161–168; **15** (1960), вып. 1, 211–219). — *Прим. ред.*

В этом и в следующих разделах нам придется часто пользоваться понятием „тензорного произведения“ гильбертовых пространств, и мы начнем с короткого обзора необходимых нам свойств этих произведений.

Пусть $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ — гильбертовы пространства. Антибилинейным функционалом на $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ мы будем называть такую комплексную функцию f, что

$$f(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2, \theta) = \overline{a}_1 f(\varphi_1, \theta) + \overline{a}_2 f(\varphi_2, \theta)$$

и

$$f(\varphi, a_1\theta_1 + a_2\theta_2) = \overline{a}_1 f(\varphi, \theta_1) + \overline{a}_2 f(\varphi, \theta_2),$$

где a_1 и a_2 — комплексные числа, а φ_1, φ_2, φ, θ_1, θ_2, θ — элементы $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Для $\varphi \in \mathcal{H}_1$ и $\psi \in \mathcal{H}_2$ *тензорным произведением* φ и ψ (обозначаемым так: $\varphi \otimes \psi$) по определению называется антибилинейный функционал

$$(\varphi \otimes \psi)(\theta_1, \theta_2) = (\varphi|\theta_1)(\psi|\theta_2).$$

Пусть $(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)'$ — множество всех конечных линейных комбинаций антибилинейных функционалов вида $\varphi \otimes \psi$. Нетрудно показать, что в пространстве $(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)'$ можно единственным образом ввести скалярное произведение, которое на элементах вида $\varphi \otimes \psi$ задается формулой

$$((\varphi_1 \otimes \psi_1)|(\varphi_2 \otimes \psi_2)) = (\varphi_1|\varphi_2)(\psi_1|\psi_2).$$

Мы будем называть $(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)'$, снабженное этим скалярным произведением, предтензорным произведением $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Его пополнение является гильбертовым пространством, которое мы будем называть тензорным произведением пространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ и обозначать через $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ Нетрудно показать, что из сходимости по норме на $(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)'$ вытекает простая (поточечная) сходимость соответствующих функционалов на $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ так что каждый элемент $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ можно отождествить с некоторым антибилинейным функционалом на $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — ортонормальный базис в $\mathcal{H}_1$ $\psi_1, \psi_2, \ldots$ — ортонормальный базис в $\mathcal{H}_2$. Тогда, как нетрудно показать, $\varphi_i \otimes \psi_j$ образуют ортонормальный базис в $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Вообще пусть

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{L}^2(\mathcal{M}_1, \alpha_1), \quad \mathcal{H}_2 = \mathcal{L}^2(\mathcal{M}_2, \alpha_2),$$
$$\mathcal{H}_3 = \mathcal{L}^2(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2, \alpha_1 \times \alpha_2).$$

Если

$$f \in \mathcal{L}^2(\mathcal{M}_1, \alpha_1), \quad \mathrm{g} \in \mathcal{L}^2(\mathcal{M}_2, \alpha_2),$$

то

$$f\mathrm{g} \in \mathcal{L}^2(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2, \alpha_1 \times \alpha_2).$$

Простое вычисление показывает, что имеется естественное унитарное отображение $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ на $\mathcal{H}_3$, которое переводит $f \otimes \mathrm{g}$ в $f\mathrm{g}$.

Рассмотрим случай, когда $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$. Замкнутое подпространство $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, порожденное элементами вида $\varphi \otimes \psi + \psi \otimes \varphi$ является, как нетрудно видеть, множество всех тех элементов $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, которым соответствуют функционалы на $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, не меняющиеся при перестановке своих аргументов. Мы будем называть это подпространство *симметрическим тензорным произведением* $\mathcal{H}$ на себя н обозначать его через $\mathcal{H} \circledS \mathcal{H}$. Аналогичным образом мы определим $\mathcal{H} \circledA \mathcal{H}$ — *антисимметрическое тензорное произведение* — как подпространство, порожденное всеми элементами вида $\varphi \otimes \psi - \psi \otimes \varphi$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{H} \circledS \mathcal{H}$ и $\mathcal{H} \circledA \mathcal{H}$ являются ортогональными дополнениями друг друга. Действительно, оператор на $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, который переставляет аргументы у антибилинейных функционалов, одновременно самосопряжен и унитарен и поэтому имеет чисто

точечный спектр, состоящий из двух точек: 1 и -1. Произведения $\mathcal{H} \circledS \mathcal{H}$ и $\mathcal{H} \circledA \mathcal{H}$ являются подпространствами, соответствующими этим собственным значениям.

Очевидным образом обобщая вышеприведенные определения, мы получим антиполилинейные функционалы на $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \times \dots \times \mathcal{H}_n$ и тензорное произведение $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$ — пополнение линейной оболочки произведений $\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \dots \otimes \varphi_n$, причем

$$(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n | \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n) = (\varphi_1 \otimes \psi_1) \dots (\varphi_n \otimes \psi_n)$$

Точно так же существует естественное унитарное отображение

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \dots \times \mathcal{M}_n, \alpha_1 \times \alpha_2 \times \dots \times \alpha_n)$$

на

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{M}_1, \alpha_1) \otimes \mathcal{L}^2(\mathcal{M}_2, \alpha_2) \otimes \dots \otimes \mathcal{L}^2(\mathcal{M}_n, \alpha_n)$$

Заметим, в частности, что гильбертово пространство состояний системы n точек является тензорным произведением пространств состояний отдельных точек. Каждая перестановка n номеров вызывает некоторое унитарное преобразование пространства $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}$ (n множителей). Мы будем обозначать замкнутое подпространство этого пространства, состоящее из всех векторов, которые инвариантны при всех этих преобразованиях, через $\mathcal{H} \circledS \mathcal{H} \circledS \dots \circledS \mathcal{H}$ и называть его симметрическим тензорным произведением n пространств $\mathcal{H}$. Замкнутое подпространство всех векторов, которые меняют знак под действием любого из преобразований, соответствующих нечетной перестановке номеров, мы будем называть антисимметрическим тензорным произведением и обозначать через $\mathcal{H} \circledA \mathcal{H} \circledA \dots \circledA \mathcal{H}$. Утверждение, что $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}$ есть прямая сумма $\mathcal{H} \circledS \mathcal{H} \circledS \dots \circledS \mathcal{H}$ и $\mathcal{H} \circledA \mathcal{H} \circledA \dots \circledA \mathcal{H}$, является, конечно неверным (при $n > 2$).

Пусть $T_1, T_2, \dots, T_n$ — ограниченные линейные операторы в $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_n$ соответственно. Тогда существует единственный ограниченный оператор T в $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$, такой, что

$$T(\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \dots \otimes \varphi_n) = T_1(\varphi_1) \otimes T_2(\varphi_2) \otimes \dots \otimes T_n(\varphi_n).$$

Мы обозначаем его через $T_1 \otimes T_2 \otimes \dots \otimes T_n$ и называем тензорным произведением операторов T_j. Если все T_j унитарны (самосопряжены), то и T будет унитарным (соответственно самосопряженным). Для неограниченных самосопряженных операторов приходится изучать вопрос об области определения, но он оказывается несложным, так что можно всегда определить неограниченный самосопряженный оператор $T_1 \otimes T_2 \otimes \dots \otimes T_n$.

Пусть $t \to U_t^j, \quad j = 1, 2, \dots, n$ — однопараметрические унитарные группы в пространствах $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_n$. Тогда $t \to U_t^1 \otimes U_t^2 \otimes \dots \otimes U_t^n$ — однопараметрическая унитарная группа в пространстве $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$, которую мы будем обозначать через $U^1 \otimes U^2 \otimes \dots \otimes U^n$.

Пусть K^j — инфинитезимальная образующая группы U^j; тогда несложные вычисления показывают, что

$$(K^1 \otimes I \otimes I \otimes \dots \otimes I) + (I \otimes K^2 \otimes I \otimes \dots \otimes I) + \\ + (I \otimes I \otimes K^3 \otimes \dots \otimes I) + \dots (I \otimes I \otimes \dots \otimes K^n)$$

является инфинитезимальной образующей группы

$$U^1 \otimes U^2 \otimes \dots \otimes U^n.$$

Именно такой вид имеет квантовый динамический оператор классической системы n невзаимодействующих частиц.

Если $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \dots = \mathcal{H}_n = \mathcal{H}$ и $U^1 = U^2 = \dots = U^n = V$, то $V \otimes V \otimes \dots \otimes V$ переводит каждое из подпространств $\mathcal{H} \circledS \mathcal{H} \circledS \dots \circledS \mathcal{H}$ и $\mathcal{H} \circledA \mathcal{H} \circledA \dots \circledA \mathcal{H}$ в себя и

определяет там однопараметрические унитарные группы. Мы будем называть их симметрической и антисимметрической n-й степенью V и обозначать через $V \circledS V \circledS \ldots \circledS V$ и $V \circledA V \circledA \ldots \circledA V$ соответственно.

Пусть $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots$ — последовательность гильбертовых пространств и $\mathcal{H}$ — множество последовательностей $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$, таких, что $\varphi_j \in \mathcal{H}_j$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|\varphi_j\|^2 < \infty$. Тогда само $\mathcal{H}$ очевидным и естественным образом является гильбертовым пространством. Мы называем это гильбертово пространство прямой суммой $\mathcal{H}_j$ и обозначаем его через $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \ldots$. Если U^j — однопараметрическая группа в $\mathcal{H}_j$, то унитарную группу $U^1 \oplus U^2 \oplus \ldots$ в $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \ldots$ можно определить следующим образом:

$$(U^1 \oplus U^2 \oplus \ldots)_t(\varphi_1, \varphi_2 \ldots) = (U_t^1 \varphi_1, U_t^2 \varphi_2, \ldots).$$

Мы называем $U^1 \oplus U^2 \oplus \ldots$ прямой суммой групп U^j.

Вернемся теперь к квантовой механике. Один из наиболее важных результатов разд. 1.4 заключался в том, что линейная классическая система определяет на своем фазовом пространстве структуру конечномерного гильбертова пространства $\mathcal{H}_0$, относительно которой динамическая группа является однопараметрической группой унитарных преобразований V. Сейчас при квантовании этой линейной системы в соответствии с принципами, сформулированными в разд. 2.4 и 2.5, мы получим бесконечномерное гильбертово пространство $\mathcal{H}$ и однопараметрическую группу унитарных преобразований U в $\mathcal{H}$. Спрашивается, существует ли какая-либо простая связь между U и V ? Оказывается, что дело обстоит именно так. В частности, будет показано, что имеется естественное унитарное отображение $\mathcal{H}$ на

$$C \oplus \mathcal{H}_0 \oplus (\mathcal{H}_0 \circledS \mathcal{H}_0) \oplus (\mathcal{H}_0 \circledS \mathcal{H}_0 \circledS \mathcal{H}_0) \oplus \ldots,$$

такое, что U переходит в

$$I \oplus V \oplus (V \circledS V) \oplus (V \circledS V \circledS V) \oplus \ldots,$$

Здесь C — одномерное комплексное гильбертово пространство и I — тождественно равная единичному оператору унитарная группа в C.

Пусть $\mathcal{H}^r = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \ldots$ — произвольная прямая сумма конечномерных или бесконечномерных гильбертовых пространств $\mathcal{H}_j$. Если $X_0, X_1, X_2, \ldots$ — произвольная последовательность ограниченных линейных операторов, причем X_j переводит $\mathcal{H}_j$, в $\mathcal{H}_(j+1)$, то мы определяем оператор $X = (X_0, X_1, X_2, \ldots)^r$ в $\mathcal{H}$, полагая

$$X(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots) = (X_0^*(\varphi_1), X_0(\varphi_0) + X_1^*(\varphi_2), X_1(\varphi_1) + X_2^*(\varphi_3), \ldots)$$

при условии, что обе последовательности принадлежат $\mathcal{H}^r$. Нетрудно установить, что оператор X самосопряжен. Рассмотрим теперь частный случай, когда

$$\mathcal{H}_0 = C, \quad \mathcal{H}_n = \mathcal{H}_1 \circledS \mathcal{H}_1 \circledS \ldots \circledS \mathcal{H}_1 \quad (n \text{ множителей})$$

Для каждого $\varphi \in \mathcal{H}_1$ положим

$$X_n^{\varphi}(\theta) = \sqrt{\frac{n+1}{2}}\, P_{n+1}(\varphi \otimes \theta),$$

где через P_{n+1} обозначен проектор пространства

$$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_1 \quad (n+1 \text{ множитель})$$

на его замкнутое подпространство

$$\mathcal{H}_1 \circledS \mathcal{H}_1 \circledS \ldots \circledS \mathcal{H}_1 \quad (n+1 \text{ множитель}).$$

Простое вычисление показывает, что для операторов

$$X_\varphi = (X_0^\varphi, X_1^\varphi, X_2^\varphi, \dots)^r$$

выполняется соотношение

$$X_{\varphi_1} X_{\varphi_2} - X_{\varphi_2} X_{\varphi_1} = \frac{((\varphi_2|\varphi_1) - (\varphi_1|\varphi_2))}{2} I$$

(везде, где левая часть имеет смысл). Кроме того, почти очевидно, что для каждого унитарного оператора W в $\mathcal{H}_1$ мы имеем

$$X_{W(\varphi)} = e^W X_\varphi e^{-W},$$

где e^W — унитарный оператор, переводящий каждое $\mathcal{H}_n = \mathcal{H} \circledS \mathcal{H} \circledS \dots \circledS \mathcal{H}$ в себя и совпадающий на нем с ограничением оператора $W \otimes \dots \otimes W$. В частности, если $\mathcal{H}_1$ — фазовое пространство классической конечномерной линейной системы, а $t \to V_t$ — ее динамическая группа, то

$$X_{V_t(\varphi)} = e^{V_t} X_\varphi e^{-V_t}.$$

Пусть $\mathcal{H}_1 = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^*$, где векторное пространство $\mathcal{M}$ является конфигурационным пространством системы, и T — линейное отображение $\mathcal{M}$ на $\mathcal{M}^*$, определяемое кинетической энергией. Пусть B — оператор, введенный на стр. 34, т. е. $\theta \to {}^1/_2 T(B(\theta), B(\theta))$ есть потенциальная функция системы. Положим для каждого $\varphi_1 = (\theta_1, l_1)$ из $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^*$

$$f_{\varphi_1}(\theta, l) = \hbar\, l_1(\theta) - l(B(\theta_1));$$

тогда f_φ линейно на $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^*$, рассматриваемом как вещественное линейное пространство, и каждый вещественный линейный функционал на $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^*$ однозначно представляется в виде f_φ. Далее, нетрудно вычислить скобку Пуассона $[f_{\varphi_1}, f_{\varphi_2}]$; она оказывается равной

$$\hbar(l_1(B(\theta_2)) - l_2(B(\theta_1))),$$

т. е. мнимой части комплексного скалярного произведения φ_1 и φ_2 в $\mathcal{H}_1$, умноженной на $\hbar$. Следовательно,

$$X_{\varphi_1} X_{\varphi_2} - X_{\varphi_2} X_{\varphi_1} = \frac{\hbar}{i} [f_{\varphi_1}, f_{\varphi_2}] I,$$

и если поставить в соответствие каждой наблюдаемой f_φ самосопряженный оператор X_φ, коммутационные соотношения Гейзенберга удовлетворяются. Из того, что

$$X_{V_t(\varphi)} = e^{V_t} X_\varphi e^{-V_t},$$

мы выводим

$$\frac{1}{i}(H X_\varphi - X_\varphi H) = X_{A(\varphi)},$$

где $-iH$ — кососопряженная инфинитезимальная образующая группы $t \to e^{V_t}$. Но, как показывают вычисления, $f_{A(\varphi)} = A^*(f_\varphi)$, что равняется скобке Пуассона классической энергии с f_φ. Таким образом, $\hbar H$ и X_φ удовлетворяют в точности таким же коммутационным соотношениям, как операторы, получающиеся при каноническом квантовании нашей классической линейной системы и соответствующие энергии и наблюдаемым f_φ. Поскольку операторы X_φ для функций f_φ, равных нулю на $\mathcal{M}$, образуют, как нетрудно видеть, полное коммутирующее семейство, мы можем сослаться на теорему единственности, упомянутую в разд. 2.4. Итак, мы показали, что гильбертово пространство $\mathcal{H}$ квантовой системы, соответствующей нашей классической системе, можно отобразить на

$$\mathcal{H}^r = C \oplus \mathcal{H}_1 \oplus (\mathcal{H}_1 \circledS \mathcal{H}_1) + \dots$$

таким образом, что оператор, соответствующий наблюдаемой f_φ, перейдет в X_φ, а динамическая группа — в группу

$$e^V = I \oplus V \oplus (V \circledS V) \oplus (V \circledS V \circledS V) \oplus \ldots.$$

Иначе говоря, мы имеем следующее эквивалентное обычному правило квантования классической системы, применимое в том случае, когда система линейна. Превратим фазовое пространство в конечномерное гильбертово пространство $\mathcal{H}_1$, так что динамическая группа станет однопараметрической группой V унитарных преобразований, так, как это описано в разд. 1.4. Образуем однопараметрическую группу

$$e^V = I \oplus V \oplus (V \circledS V) \oplus (V \circledS V \circledS V) \oplus \ldots.$$

Это динамическая группа нашей квантовой системы. Для каждого действительного линейного функционала f на $\mathcal{H}_1$ выберем φ так, чтобы $f = f_\varphi$. Тогда X_φ будет самосопряженным оператором, соответствующим наблюдаемой f.

Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ — основные частоты нашей классической системы; тогда собственные значения квантового динамического оператора, которые соответствуют собственным функциям в подпространстве $\mathcal{H}_1$, равны $2\pi\nu_1$, $2\pi\nu_2$, …, $2\pi\nu_k$. Поэтому соответствующие собственные значения оператора энергии равны $2\pi\hbar\nu_1$, $2\pi\hbar\nu_2$, …, $2\pi\hbar\nu_k$, или $\hbar\nu_1, \ldots, \hbar\nu_k$, если мы примем $\hbar = h/2\pi$. Для собственных функций из подпространства $\mathcal{H}_1 \circledS \mathcal{H}_1$ эти значения представляют собой всевозможные суммы $h(\nu_i + \nu_j)$, для подпространства $\mathcal{H}_1 \circledS \mathcal{H}_1 \circledS \mathcal{H}_1$ — всевозможные суммы $h(\nu_i + \nu_j + \nu_k)$ и т. д. Таким образом, общий вид собственного значения энергии задается формулой

$$h(n_1\nu_1 + n_2\nu_2 + \ldots + n_k\nu_k).$$

Читатель может проверить, что эти значения на константу отличаются от тех, которые получились бы в результате канонического квантования в его прежней форме. Это объясняется тем, что коммутационные соотношения определяют энергию только с точностью до аддитивной постоянной. Напомним, что вообще и в классической, и в квантовой механике энергия определяется с точностью до аддитивной постоянной. При нашем новом способе канонического квантования эта постоянная выбирается другим образом — более удачным с точки зрения обобщения на бесконечномерное пространство $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}(V)$.

Преимущество нового способа квантования линейных систем заключается в том, что все построения применимы не только к конечномерному, но и к бесконечномерному пространству $\mathcal{H}(V)$. Единственное отличие состоит в том, что в бесконечномерном случае X_φ будет определен только для некоторого плотного множества функционалов f_φ.

Таким образом, у нас имеется естественный способ квантования бесконечномерных линейных систем. Если нам задана такая система, то мы должны реализовать ее динамическую группу как однопараметрическую унитарную группу на фазовом пространстве, рассматриваемом как гильбертово пространство, и продолжать так, как показано выше. Это построение можно применить, в частности, в том случае, когда роль классической системы играет электромагнитное поле. В этом случае, как и во многих других подобных случаях, удобно ввести самосопряженный оператор N на фазовом пространстве

$$C \oplus \mathcal{H}(V) \oplus (\mathcal{H}(V) \circledS \mathcal{H}(V)) + \ldots,$$

который на каждом подпространстве

$$\mathcal{H}(V) \circledS \mathcal{H}(V) \circledS \ldots \circledS \mathcal{H}(V) \quad (n \text{ множителей})$$

равен тождественному оператору, умноженному на n (оператор N определяется этими условиями однозначно). Соответствующую наблюдаемую мы будем называть наблюдаемой „числа частиц“. Вообще о состоянии, определяемом вектором из $\mathcal{H}(V) \circledS \mathcal{H}(V) \circledS \ldots \circledS \mathcal{H}$ (n множителей), говорят как о состоянии, в котором „имеется n частиц“. Чем это объясняется ? Действительно ли в таких состояниях система ведет себя подобно системе из n частиц ?

Мы уже видели (см. стр. 78 и 83), что операторы, соответствующие наблюдаемым энергии и импульса квантовой системы, можно получить как ннфинитезимальные образующие некоторых однопараметрических групп унитарных операторов. Для системы, состоящей из одной свободной частицы (см. стр. 89), будет верным и более сильное утверждение. Пусть Δ — группа всех движений пространства, θ — группа всех переносов времени и Γ — группа преобразований пространства-времени, порожденная подгруппами Δ, θ и преобразованиями

$$(x, y, z, t) \to (x - ut, y - vt, z - wt, t).$$

Имеется естественное отображение $\gamma \to U_\gamma$ этой группы Γ в группу унитарных операторов в гильбертовом пространстве нашей системы, такое, что для любых γ_1 и γ_2 из Γ оператор $U_{\gamma_1} U_{\gamma_2} U_{\gamma_1\gamma_2}^{-1}$ кратен единичному и при этом наблюдаемые координаты, а также энергии и импульса можно получить как инфинитезимальные образующие некоторых однопараметрических подгрупп группы Γ. В этом смысле можно сказать, что квантовая механика одной свободной частицы вполне описывается отображением $\gamma \to U_\gamma$. Это отображение представляет собой пример того, что мы назовем (см. стр. 117) проективным унитарным представлением группы Γ.

В специальной теории относительности группой симметрий пространства-времени является не Γ, а другая группа L той же размерности, содержащая Δ и θ в качестве подгрупп; ее называют группой Пуанкаре или неоднородной группой Лоренца. Нетрудно построить квантовую механику одной свободной частицы, которая была бы согласована с принципами специальной теории относительности. Получающаяся квантовая система вполне описывается некоторым проективным представлением группы L, причем возникающие таким образом представления оказываются частью некоторой большей системы представлений с аналогичными свойствами.

Эти представления можно использовать для построения квантовых систем, подобных системам, описывающим свободные релятивистские частицы; естественно считать, что эти системы описывают некоторые обобщенные частицы. Обобщенные частицы отличаются от обычных главным образом наличием „внутренних степеней свободы“: у них могут быть наблюдаемые, которые коммутируют со всеми импульсами и тем не менее не являются функциями от импульсов (к таким наблюдаемым относится, например, „спин“, который мы изучим в разд. 3.4). Некоторые из обобщенных частиц отличаются от классических еще больше: они имеют нулевую массу (покоя) и не имеют наблюдаемых координат.

Во всяком случае, уравнения Максвелла инвариантны относительно группы Лоренца, так что группа L естественным образом „действует“ в гильбертовом пространстве $C \oplus \mathcal{H}(V) \oplus (\mathcal{H}(V) \circledS \mathcal{H}(V)) + \ldots$, т. е. мы имеем представление группы L унитарными операторами в этом пространстве. Подпространство $\mathcal{H}(V)$ инвариантно относительно всех операторов этого представления, и определяемое на $\mathcal{H}(V)$ „подпредставление“ группы L оказывается как раз таким, какие описывают обобщенную свободную частицу. Вообще каждое слагаемое

$$\mathcal{H}(V) \circledS \mathcal{H}(V) \circledS \ldots \circledS \mathcal{H}(V)$$

инвариантно относительно операторов представления группы L, и их действие на этом подпространстве индуцируется действием на $\mathcal{H}(V)$.

Заметим теперь, что если $\mathcal{H}(V)$ — гильбертово пространство квантовой системы для одной частицы с динамической группой V, то $\mathcal{H}(V)\otimes\mathcal{H}(V)$ — гильбертово пространство квантовой системы из двух таких независимых частиц и соответствующей динамической группой является $V\otimes V$. Точно так же

$$\mathcal{H}(V)\otimes\mathcal{H}(V)\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}(V)\quad (n \text{ множителей})$$

— гильбертово пространство квантовой системы из n таких же независимых частиц. Таким образом, если бы речь шла о

$$\mathcal{H}(V)\otimes\mathcal{H}(V)\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}(V),$$

а не о

$$\mathcal{H}(V)\circledS\mathcal{H}(V)\circledS\ldots\circledS\mathcal{H}(V),$$

было бы вполне естественно считать, что в состоянии, определяемом вектором из

$$\mathcal{H}(V)\otimes\mathcal{H}(V)\otimes\ldots\otimes\mathcal{H}(V),$$

имеется n частиц, каждая из которых движется независимо от других по законам, определяемым действием группы U_α в $\mathcal{H}(V)$.

В чем состоит значение „симметризации“ — перехода от $\mathcal{H}(V)\otimes\mathcal{H}(V)\otimes\ldots\otimes\mathcal{H}(V)$ к $\mathcal{H}(V)\circledS\mathcal{H}(V)\circledS\ldots\circledS\mathcal{H}(V)$? Что вообще, независимо от квантования электромагнитного поля, означает тот факт, что в некоторой квантовой системе из n одинаковых независимых частиц допустимыми считаются только те состояния, которые составляют симметрическое подпространство тензорного произведения, получающегося в результате канонического квантования ? Поскольку это подпространство инвариантно относительно динамической группы, мы имеем естественно определенную квантовую систему. При этом, однако, многие наблюдаемые теряются; наблюдаемым новой системы соответствуют только те самосопряженные операторы, которые переводят симметрическое подпространство в себя.

Это означает, в частности, что не существует наблюдаемой для координаты x одной определенной частицы, а есть только наблюдаемые для симметрических функций от координат по оси x всех n частиц. Конечно, зная

$$x_1+x_2+\ldots+x_n,\quad x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2,$$
$$x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3,\ldots x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n,$$

мы можем найти $x_1, x_2\ldots, x_n$, но не сможем определить, какое из этих чисел соответствует каждой частице.

Пусть, например, $n=2$. Если мы знаем, что $x_1+x_2=a$ и $x_1^2+x_2^2=b$, то $x_1x_2=(a^2-b)/2$ и, следовательно x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $x^2-ax+(a^2-b)/2=0$. Однако нет никакого способа определить, какой корень равен x_1 и какой — x_2. Физически это означает, что частицы в такой системе вовсе не похожи на биллиардные шары в том смысле, что отдельная частица полностью лишена индивидуальных свойств, которые позволили бы отличить ее от других; поменяв местами две частицы, мы придем к той же самой физической системе, и не имеет смысла говорить о координате x одной определенной из этих частиц.

Пояснить эту ситуацию поможет следующая аналогия. Представим себе струну, натянутую между двумя стенками и находящуюся в состоянии, показанном на рис. 1,

Рис. 1.

причем стрелки указывают направление, в котором двигаются соответствующие возмущения (волны). Через некоторое время эти возмущения „пройдут одно через другое“ и струна придет в состояние, показанное на рис. 2. Еще

Рис. 2.

через некоторое время возмущения отразятся от концов, пойдут обратно и струна придет в состояние, показанное на рис. 3, Если мы будем рассматривать эти два возмущения как отдельные элементы, то нам покажется, что при

Рис. 3.

переходе от состояния, изображенного на рис. 1, к состоянию, изображенному на рис. 3, они поменялись местами. С другой стороны, сама струна находится на рис. 3 точно в том же состоянии, как и на рис. 1.

Оказывается, что все „элементарные частицы“ в физике обладают этим свойством неразличимости и их нужно представлять себе скорее как возмущения струны, чем как отдельные классические частицы. Во многих случаях, однако, индивидуальность частиц обнаруживается благодаря тому, что вместо симметрического подпространства n-кратного тензорного произведения появляется антисимметрическое. В симметрическом случае говорят, что частицы подчиняются статистике Бозе—Эйнштейна, и называют их бозонами; в антисимметрическом случае говорят о статистике Ферми—Дирака и о фермионах.

Возвращаясь к квантованному электромагнитному полю, мы видим, что его можно эквивалентным образом рассматривать как совокупность бесконечного числа независимых неразличимых частиц, подчиняющихся статистике Бозе—Эйнштейна. Эти частицы называются фотонами. Мы подчеркиваем, что эта квантовая система — одновременно и квантованная колеблющаяся среда и квантованная совокупность частиц; все зависит от того, как наблюдаемые рассматриваются. Таким образом, эта математическая система включает и волновые, и корпускулярные аспекты электромагнитной теории излучения, и парадокс возникает только из-за попытки слишком примитивно представить себе физическую картину.

Заметим в заключение, что фотоны отличаются классических частиц в двух других отношениях. При переходе к классическому пределу они не подчиняют законам Ньютона, а двигаются всегда со скоростью света. Кроме того, у них имеется неклассическая наблюдаемая спин. Мы будем говорить о нем подробнее в следующей главе в применении к другим частицам — электронам.

2.8 Статистическая квантовая механика

Статистическая термодинамика, которую мы рассматривали в разд. 1.5, почти полностью переносится на квантовую механику. Для того чтобы найти квантовый аналог канонических состояний Гиббса, мы ищем смешанное состояние, определяемое неотрицательным самосопряженным ядерным оператором Г, которое соответствует максимальной неопределенности, при условии, что наблюдаемая энергия H_0 имеет фиксированное