

причем стрелки указывают направление, в котором двигаются соответствующие возмущения (волны). Через некоторое время эти возмущения „пройдут одно через другое“ и струна придет в состояние, показанное на рис. 2. Еще



Рис. 2.

через некоторое время возмущения отразятся от концов, пойдут обратно и струна придет в состояние, показанное на рис. 3. Если мы будем рассматривать эти два возмущения как отдельные элементы, то нам покажется, что при



Рис. 3.

переходе от состояния, изображенного на рис. 1, к состоянию, изображенному на рис. 3, они поменялись местами. С другой стороны, сама струна находится на рис. 3 точно в том же состоянии, как и на рис. 1.

Оказывается, что все „элементарные частицы“ в физике обладают этим свойством неразличимости и их нужно представлять себе скорее как возмущения струны, чем как отдельные классические частицы. Во многих случаях, однако, индивидуальность частиц обнаруживается благодаря тому, что вместо симметрического подпространства n -кратного тензорного произведения появляется антисимметрическое. В симметрическом случае говорят, что частицы подчиняются статистике Бозе–Эйнштейна, и называют их бозонами; в антисимметрическом случае говорят о статистике Ферми–Дирака и о фермионах.

Возвращаясь к квантованному электромагнитному полю, мы видим, что его можно эквивалентным образом рассматривать как совокупность бесконечного числа независимых неразличимых частиц, подчиняющихся статистике Бозе–Эйнштейна. Эти частицы называются фотонами. Мы подчеркиваем, что эта квантовая система — одновременно и квантованная колеблющаяся среда и квантованная совокупность частиц; все зависит от того, как наблюдаемые рассматриваются. Таким образом, эта математическая система включает и волновые, и корпускулярные аспекты электромагнитной теории излучения, и парадокс возникает только из-за попытки слишком примитивно представить себе физическую картину.

Заметим в заключение, что фотоны отличаются классических частиц в двух других отношениях. При переходе к классическому пределу они не подчиняют законам Ньютона, а двигаются всегда со скоростью света. Кроме того, у них имеется неклассическая наблюдаемая спин. Мы будем говорить о нем подробнее в следующей главе в применении к другим частицам — электронам.

2.8 Статистическая квантовая механика

Статистическая термодинамика, которую мы рассматривали в разд. 1.5, почти полностью переносится на квантовую механику. Для того чтобы найти квантовый аналог канонических состояний Гиббса, мы ищем смешанное состояние, определяемое неотрицательным самосопряженным ядерным оператором Γ , которое соответствует максимальной неопределенности, при условии, что наблюдаемая энергия H_0 имеет фиксированное

среднее значение E . Мы видели, что это среднее значение равно $\text{Tr}(\Gamma H_0)$. Для того чтобы измерять „степень неопределенности“ состояния Γ , мы должны снова обратиться к теории информации.

Если $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ — полная ортонормированная система собственных векторов Γ и $\Gamma(\varphi_j) = \gamma_j \varphi_j$, то $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots = 1$ и состояние, определяемое оператором Γ , есть $\gamma_1 \alpha_{\varphi_1} + \gamma_2 \alpha_{\varphi_2} + \dots$, где α_{φ_j} — чистое состояние, определяемое вектором φ_j . Если принять, что чистые состояния соответствуют нулевой неопределенности, то теория информации рекомендует принять за меру неопределенности Γ величину $\sum_j \gamma_j \log(1/\gamma_j)$. Далее, с помощью операционного исчисления мы можем построить оператор $\Gamma \log \Gamma$ и установить, что

$$(\Gamma \log \Gamma)(\varphi_j) = (\gamma_j \log \gamma_j)(\varphi_j);$$

Следовательно,

$$\sum_j (\gamma_j \log \gamma_j)(\varphi_j) = -\text{Tr}(\Gamma \log \Gamma).$$

Другими словами, мы ищем такой положительный ядерный оператор Γ , что $-\text{Tr}(\Gamma \log \Gamma)$ является максимальным при граничном условии $\text{Tr}(\Gamma H_0) = E$. Используя методы вариационного исчисления в применении к операторам, можно показать (см. книгу фон Неймана), что должен иметь вид $A e^{-H_0/B}$, где A и B — константы. Поскольку $\text{Tr}(\Gamma) = 1$, мы должны иметь

$$A = \left[\text{Tr}(e^{-H_0/B}) \right]^{-1},$$

так что

$$\Gamma = \frac{e^{-H_0/B}}{\text{Tr}(e^{-H_0/B})}.$$

Конечно, для многих H_0 эта задача оказывается неразрешимой. Однако для многих интересующих нас систем H_0 обладает следующими свойствами:

- (a) H_0 имеет чисто точечный спектр, и все собственные значения неотрицательны;
- (b) $P(B) = \text{Tr}(e^{-H_0/B})$ существует при всех $B \geq 0$;
- (c) $\text{Tr}(H_0 e^{-H_0/B})$ существует при всех $B \geq 0$;
- (d) $\text{Tr}(H_0 e^{-H_0/B})/P(B)$ — ограниченная монотонная функция от B . Если для такого

H_0 положить

$$E(B) = \frac{\text{Tr}(H_0 e^{-H_0/B})}{P(B)},$$

то, очевидно, для каждого значения E будет существовать в точности одно значение B , такое, что оператор $e^{-H_0/B}/P(B)$ будет удовлетворять требуемым условиям. Смешанное состояние, определяемое этим оператором является квантовым аналогом канонического состояния Гиббса для заданного значения энергии,

Мы можем придать нашим формулам еще большее сходство с классическими, выразив следы через собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ оператора H_0 . Образуем из собственных значений такую последовательность, чтобы кратные собственные значения повторялись нужное число раз и, кроме того, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$; мы можем это сделать, поскольку ряд $\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j/B}$ сходится. Тогда

$$P(B) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j/B} = \int_0^{\infty} e^{-x/B} d\beta_q(x),$$

где β_q — мера, которая приписывает каждому борелевскому множеству число собственных значений, которые в нем содержатся (с учетом кратности). В частности, $\beta_q([0, x])$

есть число собственных значений, которые меньше x или равны ему. Далее,

$$E(B) = \frac{\int_0^\infty x e^{-x/B} d\beta_q(x)}{P(B)}$$

и, точно так же как в классическом случае, $E(B) = B^2 P'(B)/P(B)$. Мы получаем теорию, совершенно аналогичную классической за одним важным исключением. Непрерывная мера β , где $\beta([0, x])$ — мера множества в фазовом пространстве, на котором классический гамильтониан не превышает x , заменяется дискретной мерой β_q , где $\beta_q([0, x])$ — число собственных значений оператора H_0 , не превышающих x . Это напоминает нам ту произвольную замену непрерывной меры на дискретную, которую мы сделали для того, чтобы получить закон излучения Планка. Теперь у нас есть теоретическое объяснение этой замены.

Действительно, как мы видели в разд. 2.7, собственные значения H_0 для случая простого гармонического осциллятора равны $(2k + 1)\pi\hbar\nu$, где ν — частота осциллятора и $k = 1, 2, \dots$. Вычитая константу $\pi\hbar\nu$ из H_0 , получаем $2\pi\hbar\nu, 4\pi\hbar\nu, \dots$. Таким образом, β_q приписывает меру 1 каждой точке вида $2k\pi\hbar\nu$ и меру 0 произвольному множеству, не содержащему этих точек. Следовательно, если мы еще раз предположим, что $\hbar = h/2\pi$, то увидим, что мера β_q равна мере β_h (введенной на стр. 56), умноженной на h^{-1} . Поскольку умножение меры на константу не меняет $E(B)$, мы, исходя из общих принципов квантовой механики, приходим к формуле, выведенной на стр. 57. Таким образом, квантовая механика позволяет решить проблему, с которой началось развитие старой квантовой теории.

Заметим, что в квантовой механике мы не встречаемся с трудностями, связанными с отсутствием меры Лиувилля в фазовом пространстве нашей бесконечномерной системы. Все системы, конечно- и бесконечномерные, имеют в качестве квантового фазового пространства структуру замкнутых подпространств сепарабельного бесконечномерного гильбертова пространства, где аналогом меры Лиувилля является мера, которая сопоставляет каждому замкнутому подпространству его размерность.

Интересно сравнить в общем случае меру β_q , получающуюся в квантовой механике, с мерой β , получающейся в классической механике. Поскольку известно, что классическая статистическая механика согласуется с экспериментом при высоких температурах и не согласуется при низких, следует ожидать, что β и β_q будут приводить к той же самой формуле удельной теплоемкости при высоких температурах. Эти соображения и теория преобразования Лапласа $\left(\alpha \rightarrow \int_0^\infty e^{-xt} d\alpha(t)\right)$ приводят к предположению, что мера $\beta_q([0, x])$ асимптотически (при больших x) будет кратной мере $\beta([0, x])$, т. е. что предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\beta([0, x])}{\beta_q([0, x])}$$

существует. Это действительно оказывается правильным. В анализе имеются теоремы, которые позволяют получить асимптотические формулы для собственных значений дифференциальных операторов. Применяя их к уравнению Шредингера, находим, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\beta([0, x])}{\beta_q([0, x])} = (2\pi\hbar)^N,$$

где N — размерность конфигурационного пространства. Таким образом, мы имеем, с одной стороны, теоретическое объяснение адекватности классической и квантовой статистической механики при высоких температурах, а с другой стороны — физическое подтверждение теорем об асимптотическом распределении собственных значений.