ПРИЛОЖЕНИЕ.

1. Высшие правила отбора. Возрастающий интерес к этому вопросу побуждает нас остановиться на нем несколько подробнее, не ограничиваясь кратким замечанием сделанным на стр. 69. Мы видели, что квантовая механика в ее классической форме, идущей от фон Неймана является следствием семи более или менее естественных аксиом (1–6 и 8) и одной более или менее произвольной аксиомы 7. Аргументы, которые приводились для оправдания этой аксиомы 7, вполне позволяли нам принять ее в более общем виде.

Было бы интересно посмотреть, как изменится теория фон Неймана, если ослабить аксиому 7, предположив, что логика может иметь нетривиальный центр. Для всех систем, удовлетворяющих аксиомам 1–6, центр логики является σ-полной булевой алгеброй, и простейшим случаем (кроме тривиального) является тот, когда эта алгебра дискретна, т. е. когда каждый элемент алгебры является объединением минимальных элементов. При этом минимальные элементы определяются однозначно и вся логика в целом однозначно представляется в виде прямой суммы своих компонент, имеющих тривиальные центры. Таким образом, естественное небольшое ослабление аксиомы 7 состоит в следующем.

Аксиома 7'. *Логика $\mathfrak{L}$ системы имеет дискретный центр, и каждая компонента центрального разложения изоморфна структуре замкнутых подпространств сепарабельного бесконечномерного гильбертова пространства.*

Пусть $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2 \oplus \dots$ — такое разложение и $\mathcal{H}_j$ — гильбертово пространство, соответствующее $\mathfrak{L}_j$. Положим $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots$; тогда $\mathfrak{L}$ изоморфна подструктуре $\mathfrak{L}_0$ структуры всех замкнутых подпространств $\mathcal{H}$, замкнутое подпространство $M \subseteq \mathcal{H}$ принадлежит $\mathfrak{L}_0$ тогда и только тогда, когда M является замкнутой линейной оболочкой подпространств $M_1, M_2, \dots$, где $M_j \subseteq \mathcal{H}_j$. Пусть α — вероятностная мера на $\mathfrak{L}$ и α'_j — ее ограничение на $\mathfrak{L}_j$. Тогда $\alpha'_j = \gamma_j\,\alpha_j$, где $\gamma_j > 0$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \gamma_j = 1$ — вероятностная мера на $\mathfrak{L}_j$. Обратно, если α_j — вероятностная мера на $\mathfrak{L}_j$, где $j = 1, 2, \dots$, и γ_j — неотрицательные действительные числа с суммой 1, то существует единственная вероятностная мера α на $\mathfrak{L}$, такая, что

$$\alpha(M_1, M_2, \dots) = \gamma_1\,\alpha_1 + \gamma_2\,\alpha_2 + \dots$$

Соображения, аналогичные приведенным на стр. 71 и использующие аксиому 8 и теорему Глисона, сразу же приводят к заключению, что каждая вероятностная мера на $\mathfrak{L}$ определяет некоторое состояние.

Ясно, что мера α может определять чистое состояние только в том случае, когда $\alpha(\mathcal{H}_j) = 0$ для всех j, кроме одного. Таким образом, наиболее общее чистое состояние мы получим, выбирая произвольный единичный вектор φ в некотором $\mathcal{H}_j$ и полагая

$$\alpha(M_1, M_2, \dots) = (P_{M_j}(\varphi)|\varphi),$$

где P_{M_j} — проектор на M_j. Соображения, приведенные на стр. 72, позволяют нам, как и прежде, отождествлять наблюдаемые с самосопряженными операторами в $\mathcal{H}$. Однако теперь наблюдаемую определяет уже не любой самосопряженный оператор A в $\mathcal{H}$, а только такой, у которого все операторы P_E^A, входящие в его спектральное разложение,

являются проекторами на элементы $\mathfrak{L}_0$. Это имеет место в том и только в том случае, когда A переводит каждое $\mathcal{H}_j$, в себя. Итак, мы имеем в точности ту же ситуацию, которая описана на стр. 72: чистые состояния соответствуют единичным векторам в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а наблюдаемые — самосопряженным операторам в $\mathcal{H}$. Однако теперь встречаются уже не все единичные векторы и не все самосопряженные операторы. Вектор φ встречается только в том случае, когда он лежит в одном из замкнутых подпространств $\mathcal{H}_j$, а самосопряженный оператор A встречается в том и только в том случае, когда $A(\mathcal{H}_j) \subseteq \mathcal{H}_j$, для всех j. По терминологии Уайтмена, Вика и Вигнера [Wightman, Wick, Wigner, *Phys. Rev.*. **88** (1952), 101-105] между $\mathcal{H}_j$ и $\mathcal{H}_k$ при $j \neq k$ действуют „высшие правила отбора". В только что упомянутой статье приводятся физические подтверждения того, что эти высшие правила отбора должны существовать. Эквивалентность факта существования высших правил отбора и замены аксиомы 7 аксиомой 7' независимо заметил Генри Митчел.

Эквивалентная формулировка аксиомы 7' звучит следующим образом: логика $\mathfrak{L}$ эквивалентна структуре всех замкнутых подпространств гильбертова пространства $\mathcal{H}$, проекторы на которые принадлежат некоторой алгебре фон Неймана, имеющей дискретный центр и не содержащей конечных компонент. Если мы отбросим ограничения на алгебру фон Неймана, то придем к новому ослаблению аксиомы 7, при котором центр $\mathfrak{L}$ уже не обязан быть дискретным и допускает „бесконечно малые" компоненты в центральном разложении; в этом случае логика $\mathfrak{L}$ изоморфна множеству всех проекторов в факторе фон Неймана — Мюррея типа II или III. Мы не будем пытаться дать полный анализ этого более общего случая, а ограничимся только двумя замечаниями; 1) если центр имеет недискретную часть, то чистые состояния не могут существовать; 2) если центр недискретен, то могут существовать однопараметрические группы автоморфизмов, которые эффективно действуют на центре; инфинитезимальные образующие таких групп не соответствуют никаким наблюдаемым.

Обсуждение высших правил отбора и близких вопросов с несколько иной точки зрения читатель найдет в работах швейцарских ученых [Lauch, *Helv. Phys. Acta*, **33** (1960), 711–726; Lauch, Misra, там же, **34** (1961), 669–709].

2. Дополнительные библиографические указания. Читатель найдет подробное систематическое изложение теории бесконечно дифференцируемых многообразий в книгах Ленга [Lang S., Introduction to differentiable manifolds, Wiley-Interscience, New York, 1962] и Хелгасона [Helgason S., Differential geometry and symmetric spaces Academic, Press New York, 1962; русский перевод: Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, изд-во „Мир", М., 1964].

Идея использования теории информации для объяснения роли канонических состояний Гиббса (разд. 1.5) возникла у автора независимо, но впервые появилась в литературе, по-видимому, у Джейнеса [Jaynes E. T., *Phys. Rev.*, **106** (1957), 620-630].

Вопрос о разложении в прямой интеграл, поднятый на стр. 68, был изучен Арланом Ремси в его гарвардской диссертации. По-видимому, получить здесь достаточно общий результат будет значительно сложнее, чем предполагал автор, когда писал эту страницу.

Утверждение относительно вопросов, допускающих одновременные ответы, сделанное на стр. 67, было доказано Варадараджаном [Varadarajan V. S., *Comm. Pure Appl. Math.*, **16** (1962), 189-217]. Доказательство облечено в достаточно изящную форму „некоммутативной теории вероятностей" и ее связей с квантовой механикой.

Понятие „естественного гильбертова пространства", использованное в разд. 2.6 для обобщенных координат, было, по-видимому, впервые опубликовано Шварцем Schwartz L., Publications de l'Institute Statistique Univ. Paris, **6** (1957), 241-256], который также ввел естественные пространства L^p. Автор пришел к этому понятию независимо, и оно встречалось в неопубликованном варианте этих заметок 1956 г.

Другие подходы к квантованию в обобщенных координатах можно найти в следую-

щей литературе:

1. Brillouin L., Les tenseurs en mechanique et en elasticité Chap. IX, Dover, New York, 1946.

2. de Witt B. S., *Phys. Rev.*, **85** (1952), 653–661

3. Segal I. E., *J. Math. Phys.*, **1** (1960), 468–488

Страницы 171–175, где идет речь о бесконечномерных линейных системах, были написаны под сильным влиянием статьи Кука [Cook J. M., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **74** (1953), 222-245]. Развитие этой темы и дальнейшие ссылки можно найти в книге Сигала [Segal I. E., Mathematical problems of relativistic physics, American Mathematical Society, 1963; готовится к печати русский перевод].