Глава 1

ГЕОМЕТРИЯ В ОБЛАСТИ ПРОСТРАНСТВА. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

§ 1. Системы координат

Мы начнем с обсуждения некоторых понятий, лежащих в основе геометрии. Школьная, греческая геометрия изучала различные метрические свойства простейших геометрических фигур. Основные задачи, решаемые в ней,— нахождение соотношений между длинами и углами треугольников и многоугольников. Кроме того, на базе этого были вычислены площади поверхностей и объемы некоторых тел. Центральные понятия школьной геометрии, на основе которых она строилась,— это длина отрезка прямой (или кривой для случая окружности), а также угол между двумя пересекающимися линиями (прямыми или кривыми).

Основная цель аналитической геометрии — описание геометрических фигур формулами в декартовой системе координат на плоскости или в трехмерном пространстве. По сравнению со «школьной» геометрией здесь изменился лишь метод, но предмет остался тем же самым. Равным образом и дифференциальная геометрия — это тот же предмет, но дополнительно здесь будут глубоко использоваться средства дифференциального исчисления и линейной алгебры. При этом дифференциальная геометрия расширяет класс рассматриваемых объектов, вводя в рассмотрение общие гладкие фигуры.

1. Декартовы координаты в пространстве. Итак, наши основные представления о геометрии таковы:

1. Геометрия разворачивается в некотором пространстве, которое состоит из точек P, Q, ...

2. Следуя методу аналитической геометрии, в это пространство можно ввести декартовы координаты. Введение декартовых координат в пространство означает, что каждой точке пространства поставлен в соответствие набор действительных чисел $x^1, \ldots, x^n$, называемых ее *координатами*, причем требуется выполнение следующих свойств:

а) разным точкам пространства соответствуют разные наборы координат; это означает, что две точки P и Q с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$, $(y^1, \ldots, y^n)$ совпадают в том и только том случае, если $x^i = y^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

б) наоборот, каждому набору $(x^1, \ldots, x^n)$, где x^i — любые действительные числа, должна соответствовать какая-то точка P изучаемого пространства.

Определение 1. Пространство, в котором введены декартовы координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ так, что выполняются перечисленные свойства, называется *n-мерным декартовым пространством* *) и обозначается через $\mathbb{R}^n$. Число n называется *числом измерений* или *размерностью* пространства.

Часто мы будем называть сами наборы $(x^1, \ldots, x^n)$ точками декартова пространства. Простейший пример декартова пространства — это числовая прямая, которая является одномерным декартовым пространством. Здесь имеется только одна координата $x^1 (n=1)$. Другие примеры, появляющиеся в аналитической геометрии,— это декартовы координаты на плоскости (двумерное декартово пространство) и в «обычном», т. е. трехмерном, пространстве (рис. 1). Этих примеров было вполне достаточно для решения задач «школьной» геометрии.

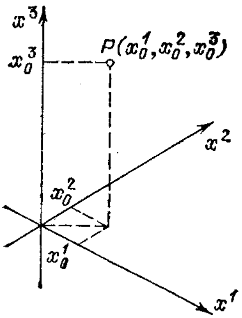

Рис. 1

Укажем менее привычный, но крайне важный пример декартова пространства. Современные физические представления не допускают разделения пространства и времени и сразу апеллируют к четырехмерному пространственно-временно́му континууму. Эта форма математического подхода к упорядочению явлений природы является чрезвычайно удобной.

Точками пространственно-временно́го континуума являются события. Каждому событию поставим в соответствие набор из четырех чисел (t, x^1, x^2, x^3), где t — «момент времени», когда произошло событие, x^1, x^2, x^3 — координаты «места события». Величины (t, x^1, x^2, x^3) и будут декартовыми координатами в пространственно-временно́м континууме. Таким образом, пространственно-временно́й континуум есть четырехмерное декартово пространство. Теперь можно забыть исходную интерпретацию координат (t, x^1, x^2, x^3) как времени и места события. Трехмерное пространство, в котором разворачивается классическая геометрия, тогда будет просто поверхностью уровня $t = \mathrm{const}$. Процесс жизни каждого объекта, который можно в любой момент времени считать одноточечным («точечной частицы»), отождествляется с линией $x^\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, 3$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, в четырехмерном пространстве. Эту линию мы назовем *мировой линией точечной частицы* (рис. 2). Мы также будем рассматривать трехмерный и даже двумерный пространственно-временной континуум с координатами (t, x^1, x^2)

*) Возможно, такая терминология не является общеупотребительной. Мы надеемся, что это не смутит читателя.

и (t, x^1) соответственно, так как в этих случаях легче рисовать.

2. Замена координат. Пусть в n-мерном декартовом пространстве задана числовая функция $f(P)$, т. е. функция от положения точки P в пространстве. Пользуясь декартовыми координатами, мы можем представить функцию f как функцию от n действительных переменных: если $P=(x^1, \ldots, x^n)$, то $f(P)=f(x^1, \ldots, x^n)$. Мы будем рассматривать только непрерывные (и даже непрерывно дифференцируемые) функции $f(x^1, \ldots, x^n)$. Функции f могут быть определены не на всем пространстве $\mathbb{R}^n$, а только на его части — на области пространства.

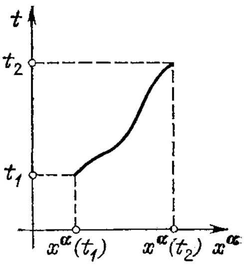

Рис. 2

Определение 2. *Область* или *область без границы* (открытое множество) — это совокупность D точек в $\mathbb{R}^n$ такая, что вместе с любой точкой из этой совокупности ей принадлежат также все достаточно близкие к ней точки пространства.

Более точно, если $P_0=\left(x_0^1, \ldots, x_0^n\right)$ лежит в области D, то найдется такое $\varepsilon>0$, что если для точки $P=(x^1, \ldots, x^n)$ выполняются неравенства

$$|x^i-x_0^i|<\varepsilon, \quad i=1, \ldots, n,$$

то P лежит в области D.

Определение 3. *Область с границей* получается из области без границы добавлением ее предельных точек. *Граница* области состоит из добавленных точек.

Простейший пример области без границы — это все пространство $\mathbb{R}^n$. Другой простой пример области без границы: область состоит из таких точек плоскости (x_1, x_2), что $x_1^2+x_2^2<\rho^2$ (открытый круг). Соответствующая область с границей состоит из таких точек (x_1, x_2), что $x_1^2+x_2^2\leqslant\rho^2$. Этот пример является в определенном смысле типичным. Имеет место простая теорема.

Теорема 1. *Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задан набор непрерывных функций $f_1(P), \ldots, f_m(P)$, $P=(x^1, \ldots, x^n)$. Рассмотрим совокупность D точек P, удовлетворяющих неравенствам*

$$f_1(P)<0, \quad f_2(P)<0, \ldots, f_m(P)<0.$$

Тогда D — область без границы.

Доказательство. Пусть $P_0=\left(x_0^1, \ldots, x_0^n\right)$ лежит в D, т. е. $f_1(P_0)<0, \ldots, f_m(P_0)<0$. Тогда из теоремы о сохранении знака непрерывной функции следует, что при каждом j найдется такое $\varepsilon_j>0$, что неравенства $|x^i-x_0^i|<\varepsilon_j$, $i=1, 2, \ldots, n$, влекут за собой неравенство $f_j(P)<0$. Беря $\varepsilon=\min(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, мы

2*

видим, что D содержит все точки $(x^1, \ldots, x^n)$, у которых $|x^i - x_0^i| < \varepsilon$. Таким образом, D — область без границы.

Замечание. Двигаясь по кривым изнутри области D: $f_j(P) < 0$, $j = 1, \ldots, m$, можно достичь, в силу непрерывности функций f_j, лишь тех точек P, где $f_j(P) \leqslant 0$. Если выполняются простые аналитические ограничения на функции $f_1, \ldots, f_m$ (мы укажем их в части II), то любая точка P такая, что $f_j(P) = 0$ при любом j, достижима. Эти ограничения выполнены во всех встречающихся ниже примерах. Таким образом, при этих ограничениях решения неравенств $f_j(P) \leqslant 0$, $j = 1, \ldots, m$, дают область с границей.

Очень важным и часто встречающимся является понятие *ограниченной области* в пространстве, т. е. такой, что все достаточно далекие от начала координат точки ей не принадлежат.

Декартовы координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ дают, очевидно, координаты и в любой области D, но они принимают не все значения. Для функций $f(x^1, \ldots, x^n)$, определенных в области, можно говорить о непрерывности и дифференцируемости так же, как и для функций во всем пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пусть заданы какие-либо другие координаты $(z^1, \ldots, z^n)$ в той же области. Мы можем написать

$$x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$z^j = z^j(x^1, \ldots, x^n), \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Написанные равенства означают просто, что каждой точке области можно сопоставить как набор декартовых координат $(x^1, \ldots, x^n)$, так и набор новых координат $(z^1, \ldots, z^n)$,— поэтому декартовы координаты можно выразить через новые и наоборот.

Разберем первоначально линейные замены координат в пространстве:

$$x^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i z^j, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

(более краткая запись: $x^i = a_j^i z^j$, где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам). Как известно из линейной алгебры, для того чтобы можно было выразить z через x, необходимо и достаточно, чтобы матрица $A = (a_j^i)$ имела обратную $B = A^{-1} = (b_j^i)$. Обратная матрица определяется так: $b_j^i a_k^j = \delta_k^i$, где

$$\delta_k^i = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k \end{cases}$$

(символ Кронекера), суммирование по j подразумевается. Итак, декартовы координаты $x^1, \ldots, x^n$ точки P выражаются через новый набор чисел $z^1, \ldots, z^n$ с помощью матрицы $A = (a^i_j)$. Равенство (2) можно кратко записать так:

$$X = AZ, \quad X = (x^1, \ldots, x^n), \quad Z = (z^1, \ldots, z^n).$$

Равенство (2) означает, что если точка P соответствовала набору координат $x^1, \ldots, x^n$, то в новых координатах ей соответствует набор $z^1, \ldots, z^n$ такой, что $x^i = a^i_j z^j$. Мы видели, что матрица A должна быть обратимой и, значит, иметь отличный от нуля определитель (быть невырожденной). Тогда можно выразить и новые координаты через старые:

$$Z = BX, \quad z^j = b^j_k x^k \tag{3}$$

(суммирование по k).

Рассмотрим теперь произвольные новые координаты $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n)$, $i = 1, \ldots, n$, где функции $x^i(z^1, \ldots, z^n)$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми (гладкими).

Мы предполагаем, что новые координаты изображают каждую точку изучаемой области пространства,— это значит, что любому набору чисел $(x^1_0, \ldots, x^n_0)$ в изучаемой области соответствует хотя бы один набор $(z^1_0, \ldots, z^n_0)$ такой, что $x^i_0 = x^i(z^1_0, \ldots, z^n_0)$, $i = 1, \ldots, n$.

Определение 4. Точка $P = (x^1_0, \ldots, x^n_0)$ называется *неособой точкой* системы координат $(z^1, \ldots, z^n)$, если матрица

$$A = (a^i_j) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)\Bigg|_{z^1 = z^1_0, \ldots, z^n = z^n_0}, \tag{4}$$

где $z^1_0, \ldots, z^n_0$ таковы, что $x^i(z^1_0, \ldots, z^n_0) = x^i_0$, $i = 1, \ldots, n$, имеет ненулевой определитель (не выраждена).

Матрица A называется *матрицей Якоби* данной замены и обозначается через $\hat{J} = \frac{\partial x}{\partial z}$. Определитель матрицы Якоби называется *якобианом* и обозначается через J:

$$J = \det\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = \det \hat{J}.$$

Из курса математического анализа известна следующая теорема об обратном преобразовании (частный случай общей теоремы о неявных функциях).

Если задан переход к новым координатам $x^i = x^i(z)$, $i = 1, \ldots, n$, причем $x^i_0 = x^i(z^1_0, \ldots, z^n_0)$ и $J = \det\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) \neq 0$ при $z^1 = z^1_0, \ldots, z^n = z^n_0$, то в достаточно малой окрестности точки $(x^1_0, \ldots, x^n_0)$ можно выразить координаты $z^1, \ldots, z^n$ через $x^1, \ldots, x^n$ так, что $z^i = z^i(x)$, причем $z^i_0 = z^i(x^1_0, \ldots, x^n_0)$, $i = 1, \ldots, n$. При этом матрица $(b_j^i) = \left(\frac{\partial z^i}{\partial x^j}\right)$, т. е. матрица Якоби обратного преобразования, будет обратной матрицей по отношению к матрице $(a_l^k) = \left(\frac{\partial x^k}{\partial z^l}\right)$, т. е.

$$\frac{\partial z^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial z^k} = \delta_k^i \tag{5}$$

(напоминаем: подразумевается суммирование по j).

Для $n=1$ это утверждение выглядит так: если $x = x(z)$, $x(z_0) = x_0$ и $\frac{dx}{dz} \neq 0$ при $z = z_0$, то можно выразить z через x, $z = z(x)$, так, что $z_0 = z(x_0)$ и $\frac{dz}{dx}\frac{dx}{dz} = 1$ в достаточно малой окрестности точки x_0.

В разобранном выше случае линейных замен координат $X = AZ$, т. е. $x^i = a_j^i z^j$. В этом случае матрица Якоби $\frac{\partial x}{\partial z}$ совпадает с матрицей A, так как $a_k^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^k}$ и эти числа постоянны. При этом если $\det A \neq 0$, то замена обратима во всем пространстве и $Z = BX$, где B — матрица, обратная к A.

Разберем другие примеры координат на плоскости и в пространстве, известные из аналитической геометрии.

1. На плоскости рассматриваются *полярные координаты* r, φ, для которых

$$x^1 = r\cos\varphi, \quad x^2 = r\sin\varphi. \tag{6}$$

Здесь всегда $r \geqslant 0$. Далее, пары (r, φ) и $(r, \varphi + 2k\pi)$ при целом k изображают одну и ту же точку $P = (x^1, x^2)$. Поэтому φ является однозначной координатой, лишь если потребовать, чтобы $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. При $r = 0$ дополнительно надо сказать, что все пары $(0, \varphi)$ изображают одну и ту же точку (начало координат), так что в начале координат происходит нечто еще худшее. Убедимся, что начало координат есть особая точка полярной системы координат. Составим матрицу Якоби:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial r} & \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x^2}{\partial r} & \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Мы имеем для якобиана

$$J = \det A = r \geqslant 0.$$

Итак, якобиан равен нулю лишь в точке $r = 0$. Если выразить r через x^1, x^2, то $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$. Эта функция не дифференцируема при $x^1=0$, $x^2=0$. В области $\{r>0,\ 0<\varphi<2\pi\}$ новые координаты полностью однозначны и не имеют особых точек.

2. *Цилиндрические координаты* $z^1=r$, $z^2=\varphi$, $z^3=z$ в трехмерном декартовом пространстве с декартовыми координатами x^1, x^2, x^3, где

$$x^1=r\cos\varphi,\quad x^2=r\sin\varphi,\quad x^3=z. \tag{8}$$

Здесь $r=0$ задает прямую, ось z, вдоль которой координатная система «портится». Действительно, матрица Якоби здесь имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{9}$$

и якобиан равен нулю только при $r=0$. В области $r>0$ система координат не имеет особых точек. Как и выше, координата φ однозначна в области $0<\varphi<2\pi$.

3. *Сферические координаты* $z^1=r$, $z^2=\theta$, $z^3=\varphi$ в трехмерном пространстве (рис. 3). Имеем

$$x^1=r\cos\varphi\sin\theta,\quad x^2=r\sin\varphi\sin\theta,\quad x^3=r\cos\theta, \tag{10}$$

$$r\geqslant 0,\quad 0\leqslant\theta<\pi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

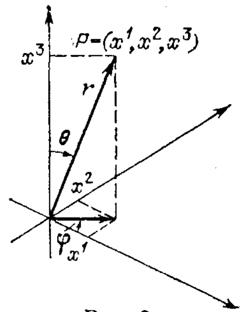

Рис. 3

Для сферических координат матрица Якоби имеет следующий вид:

$$A=\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Якобиан $J=\det A$ имеет вид

$$J=r^2\sin\theta.$$

Мы видим, что в области $r>0$, $\theta\neq 0$, π этот якобиан не обращается в нуль.

Сферическая система координат однозначна и не имеет особых точек в области $r>0$, $0<\theta<\pi$, $0<\varphi<2\pi$. Точки $r=0$ (любые θ, φ) или $\theta=0$, π (любые r, φ) — это особые точки.

§ 2. Евклидово пространство

Кроме перечисленных в предыдущем параграфе понятий, в основе наших представлений о геометрии лежит понятие длины линии в пространстве и понятие угла между двумя пересекающимися линиями, измеренного в точке их пересечения. Эти наши представления основаны на том, что (в некотором приближении)