руема при $x^1 = 0$, $x^2 = 0$. В области $\{r > 0,\ 0 < \varphi < 2\pi\}$ новые координаты полностью однозначны и не имеют особых точек.

2. *Цилиндрические координаты* $z^1 = r$, $z^2 = \varphi$, $z^3 = z$ в трехмерном декартовом пространстве с декартовыми координатами x^1, x^2, x^3, где

$$x^1 = r\cos\varphi, \quad x^2 = r\sin\varphi, \quad x^3 = z. \tag{8}$$

Здесь $r = 0$ задает прямую, ось z, вдоль которой координатная система «портится». Действительно, матрица Якоби здесь имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

и якобиан равен нулю только при $r = 0$. В области $r > 0$ система координат не имеет особых точек. Как и выше, координата φ однозначна в области $0 < \varphi < 2\pi$.

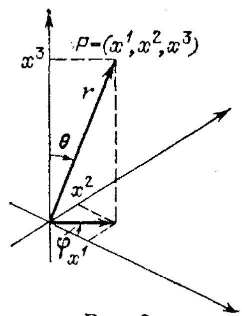

Рис. 3

3. *Сферические координаты* $z^1 = r$, $z^2 = \theta$, $z^3 = \varphi$ в трехмерном пространстве (рис. 3). Имеем

$$x^1 = r\cos\varphi\sin\theta, \quad x^2 = r\sin\varphi\sin\theta, \quad x^3 = r\cos\theta, \tag{10}$$

$$r \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \theta < \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Для сферических координат матрица Якоби имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Якобиан $J = \det A$ имеет вид

$$J = r^2 \sin\theta.$$

Мы видим, что в области $r > 0$, $\theta \neq 0, \pi$ этот якобиан не обращается в нуль.

Сферическая система координат однозначна и не имеет особых точек в области $r > 0$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$. Точки $r = 0$ (любые θ, φ) или $\theta = 0, \pi$ (любые r, φ) — это особые точки.

§ 2. Евклидово пространство

Кроме перечисленных в предыдущем параграфе понятий, в основе наших представлений о геометрии лежит понятие длины линии в пространстве и понятие угла между двумя пересекающимися линиями, измеренного в точке их пересечения. Эти наши представления основаны на том, что (в некотором приближении) мы живем в евклидовом трехмерном пространстве, в котором существуют декартовы координаты со специальными свойствами.

1. Кривая в евклидовом пространстве. Пусть декартовы координаты в трехмерном пространстве таковы, что если точке P соответствуют три ее координаты (x^1, x^2, x^3), а точке Q — координаты (y^1, y^2, y^3), то квадрат длины прямолинейного отрезка, соединяющего точки P и Q, равен $l^2=(x^1-y^1)^2+(x^2-y^2)^2+(x^3-y^3)^2$. Тогда пространство называется *евклидовым*, а декартовы координаты с такими свойствами называются *евклидовыми координатами.*

Из курса линейной алгебры известно, что с точками евклидова пространства удобно связывать векторы. У нас имеется начало координат — точка O; назовем вектор, ведущий из точки O в изучаемую точку P, *радиус-вектором* этой точки. Декартовы координаты (x^1, x^2, x^3) точки P мы будем называть координатами вектора. Два вектора $\xi=(x^1, x^2, x^3)$, $\eta=(y^1, y^2, y^3)$, ведущих из точки O в точки P и Q соответственно, можно складывать покоординатно и получить вектор $\xi+\eta$ с координатами $(x^1+y^1, x^2+y^2, x^3+y^3)$. Можно также умножить вектор на число. Единичные векторы e_1, e_2, e_3 с координатами $e_1=(1, 0, 0)$, $e_2=(0, 1, 0)$, $e_3=(0, 0, 1)$ имеют длину, равную 1. Далее будет видно, что они вдобавок взаимно перпендикулярны. Любой вектор ξ с координатами (x^1, x^2, x^3) имеет вид $\xi=x^1e_1+x^2e_2+x^3e_3$. Здесь все пространство трехмерно и $n=3$. Для любых n, разумеется, все аналогично. Поэтому евклидово пространство зачастую рассматривается как линейное (или векторное) пространство, в котором квадрат расстояния между точками (концами радиус-векторов) $\xi=(x^1, \ldots, x^n)$ и $\eta=(y^1, \ldots, y^n)$ измеряется как $l^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2$. В трехмерном евклидовом пространстве мы имеем $n=3$, для плоскости $n=2$, а случай $n>3$ является их простым обобщением.

В евклидовом пространстве имеется важная операция, называемая *скалярным произведением векторов.*

Определение 1. Если заданы вектор $\xi=(x^1, \ldots, x^n)$ и вектор $\eta=(y^1, \ldots, y^n)$, то их *евклидовым скалярным произведением* называется число

$$\langle\xi, \eta\rangle=\sum_{i=1}^{n}x^iy^i. \tag{1}$$

Это скалярное произведение обладает следующими важными свойствами:

а) $\langle\xi, \eta\rangle=\langle\eta, \xi\rangle$;

б) $\langle\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2, \eta\rangle=\lambda_1\langle\xi_1, \eta\rangle+\lambda_2\langle\xi_2, \eta\rangle$,

где λ_1, λ_2 — любые действительные числа;

в) $\langle\xi, \xi\rangle>0$, если $\xi\neq0$.

Декартовы координаты $x^1, \ldots, x^n$, в которых это скалярное произведение имеет вид (1), называются *евклидовыми*.

Используя понятие скалярного произведения, можно сказать, что квадрат длины прямолинейного отрезка, ведущего из точки P с радиус-вектором $\xi=(x^1, \ldots, x^n)$ в точку Q с радиус-вектором $\eta=(y^1, \ldots, y^n)$, есть скалярный квадрат вектора $\xi-\eta$, а длина любого вектора $\zeta=(z^1, \ldots, z^n)$ равна $\sqrt{\langle\zeta, \zeta\rangle}$. Часто длину вектора ζ обозначают через $|\zeta|=\sqrt{\langle\zeta, \zeta\rangle}$. Свойство в) означает, что все ненулевые векторы ζ имеют положительную длину.

Из аналитической геометрии известно, что для двух векторов $\xi=(x^1, \ldots, x^n)$, $\eta=(y^1, \ldots, y^n)$ угол между ними тоже выражается через скалярное произведение:

$$\cos\varphi=\frac{\langle\xi, \eta\rangle}{\sqrt{\langle\xi, \xi\rangle\langle\eta, \eta\rangle}}=\frac{\langle\xi, \eta\rangle}{|\xi||\eta|}. \tag{2}$$

Таким образом, длины и углы тесно связаны с понятием скалярного произведения между векторами. В дальнейшем именно скалярное произведение будет взято за основное, первичное понятие, на котором строится геометрия.

Пусть теперь имеется кривая линия в евклидовом пространстве, заданная в параметрической форме:

$$x^1=f^1(t), \ \ldots, \ x^n=f^n(t), \tag{3}$$

где параметр t пробегает отрезок от a до b и $f^i(t)$ — гладкие функции параметра t, $i=1, \ldots, n$. *Касательным вектором* или *вектором скорости* кривой в момент t называется вектор

$$v(t)=\left(\frac{df^1}{dt}, \ldots, \frac{df^n}{dt}\right). \tag{4}$$

Определение 2. *Длиной линии* называется число

$$l=\int_a^b \sqrt{\langle v(t), v(t)\rangle}\,dt=\int_a^b |v(t)|\,dt. \tag{5}$$

Иначе говоря, длиной линии называется интеграл от длины ее вектора скорости*).

Если есть линия $x^i=f^i(t)$, $i=1, \ldots, n$, и другая линия $x^i=g^i(t)$, $i=1, \ldots, n$, пересекающиеся при $t=t_0$ (т. е. $f^i(t_0)=g^i(t_0)$, $i=1, \ldots, n$), то можно говорить об угле между этими линиями в точке пересечения. Обозначим касательные векторы

*) Авторы не претендуют на аксиоматическое изложение понятия длины. Мы не пытаемся выводить единственность этого определения из каких-либо аксиом. Это определение само есть аксиома.

скорости к линиям при $t=t_0$ соответственно через

$$v=\left(\frac{df^1}{dt},\ \ldots,\ \frac{df^n}{dt}\right)\Big|_{t=t_0},$$
$$w=\left(\frac{dg^1}{dt},\ \ldots,\ \frac{dg^n}{dt}\right)\Big|_{t=t_0}. \tag{6}$$

Определение 3. *Углом между линиями* в точке их пересечения при $t=t_0$ называется такой угол φ $(0\leqslant\varphi<\pi)$, что имеет место равенство

$$\cos\varphi=\frac{\langle v,\ w\rangle}{|v|\,|w|}. \tag{7}$$

Два последних определения можно рассматривать как важные факты, которые должны доказываться в курсе математического анализа. Но в действительности их можно рассматривать и как первичные определения. Нужно только проверить соответствие этих определений наглядным понятиям о длинах и углах между кривыми в евклидовом пространстве. Из школьного курса геометрии известно, что длина окружности радиуса R равна $2\pi R$. Далее, из аналитической геометрии известно, что длина прямолинейного отрезка — вектора ξ с координатами $y^1,\ \ldots,\ y^n$ — равна $\sqrt{(y^1)^2+\ldots+(y^n)^2}$ (по теореме Пифагора). Проведем вычисление для отрезка и окружности и убедимся, что наше определение длины дает те же числа.

1) *Отрезок.* Для простоты пусть он выходит из начала координат. Тогда он задается формулой $x^i=y^it$, где $i=1,\ \ldots,\ n$, $0\leqslant t\leqslant 1$. При $t=0$ все координаты $x^i=0$, а при $t=1$ все координаты $x^i=y^i$, т. е. мы попадаем в конец вектора ξ. Длина нашего отрезка прямой равна

$$l=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2+\ldots+\left(\frac{dx^n}{dt}\right)}\,dt=\sqrt{(y^1)^2+\ldots+(y^n)^2},$$

т. е. мы получили известную формулу для длины отрезка.

2) *Окружность.* Она задается формулой (на плоскости) $x^1=R\cos t$, $x^2=R\sin t$, где $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Вектор скорости здесь имеет вид $v(t)=(-R\sin t,\ R\cos t)$, и длина равна

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}\,dt=2\pi R. \tag{8}$$

Для окружности мы также имеем нужный ответ.

Кроме того, наше определение длины удовлетворяет тому требованию, что длина кривой, составленной из двух кусков, равна сумме длин этих кусков.

Заметим, однако, что формула (5) для длины кривой относится к параметризованным кривым $x^i = f^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, $a \leqslant t \leqslant b$. Попросту говоря, мы бежим вдоль линии вместе с параметром t, меняющимся между a и b со скоростью $v(t) = \left(\frac{df^1}{dt}, \ldots, \frac{df^n}{dt}\right)$, и эта скорость $v(t)$ бега по кривой явным образом входит в нашу формулу

$$l = \int_a^b |v(t)|\, dt. \tag{9}$$

Что будет, если мы побежим по той же самой кривой с другой скоростью? Мы движемся от точки $P = (f^1(a), \ldots, f^n(a))$ до точки $Q = (f^1(b), \ldots, f^n(b))$. Получим ли мы то же самое число, если будем двигаться по той же самой линии от точки P до точки Q, но с другой скоростью?

Точная постановка этого вопроса такова. Пусть задан новый параметр τ, меняющийся от a' до b' $(a' \leqslant \tau \leqslant b')$, и параметр t представлен в виде функции от τ, $t = t(\tau)$, $t(a') = a$, $t(b') = b$, причем $\frac{dt}{d\tau} > 0$. Последнее неравенство означает просто, что мы бежим по параметру τ в ту же сторону по кривой, что и по параметру t. Тогда наша кривая представлена в виде

$$x^i = f^i(t) = f^i(t(\tau)) = g^i(\tau), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Скорость движения по параметру τ имеет вид

$$w(\tau) = \left(\frac{dg^1}{d\tau}, \ldots, \frac{dg^n}{d\tau}\right), \qquad a' \leqslant \tau \leqslant b'. \tag{11}$$

Длина кривой в новой параметризации равна

$$l' = \int_{a'}^{b'} |w(\tau)|\, d\tau. \tag{12}$$

Покажем, что

$$l' = \int_{a'}^{b'} |w(\tau)|\, d\tau = l = \int_a^b |v(t)|\, dt.$$

Вычислим длину вектора $w(\tau)$:

$$|w(\tau)| = \\ = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dg^i}{d\tau}\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{df^i}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right)^2} = \left|\frac{dt}{d\tau}\right| \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{df^i}{dt}\right)^2} = \frac{dt}{d\tau}|v(t)|,$$

так как $\frac{dt}{d\tau} > 0$. Поэтому

$$l' = \int_{a'}^{b'} |w(\tau)|\, d\tau = \int_{a'}^{b'} |v(t(\tau))| \frac{dt}{d\tau}\, d\tau = \int_{a}^{b} |v(t)|\, dt,$$

что и требовалось доказать.

Вывод. *Длина отрезка на кривой не зависит от скорости пробегания этого отрезка кривой.*

Таким образом, наше определение длины удовлетворяет всем необходимым требованиям для обслуживания наших интуитивных представлений об этой величине.

Пример. Пусть кривая на плоскости задана как график функции $x^2 = f(x^1)$. Тогда в качестве параметра t можно взять просто x^1: $x^1 = t$, $x^2 = f(t)$. Вектор скорости имеет вид $v = \left(1, \frac{df}{dx^1}\right)$, и длина кривой равна

$$l = \int_a^b |v|\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx^1}\right)^2}\, dx^1. \tag{13}$$

На любой гладкой кривой (такой кривой, что параметр скорости v не обращается в нуль) можно выбрать параметр l (размерности длины) так, чтобы вектор скорости был единичным: $|v| = 1$. Такой параметр l называется *натуральным*. Для него $\int_a^b |v|\, dl = b - a$. Следовательно, натуральный параметр имеет простой геометрический смысл — он равен длине отрезка кривой, который мы пробежали.

Пусть теперь в евклидовом пространстве с евклидовыми координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ задана другая система координат $(z^1, \ldots, z^n)$, так что $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n)$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть кривая задается параметрически в новых координатах $z^i = z^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда в исходных, евклидовых координатах та же самая кривая имеет вид

$$x^j = x^j(z(t)) = h^j(t), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Назовем *вектором скорости кривой в координатах* $(z^1, \ldots, z^n)$ вектор $v_z(t) = (v_z^1, \ldots, v_z^n)$, где

$$v_z^j = \frac{dz^j}{dt}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{14}$$

В исходных координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ вектор скорости $v = v_x = \left(\frac{dh^1}{dt}, \ldots, \frac{dh^n}{dt}\right)$. Это — вектор, взятый в точке $P = (h^1(t), \ldots, h^n(t))$, тот же самый вектор, что и v_z, но взятый в точке $P =$

$=(z^1(t), \ldots, z^n(t))$. Точка P одна и та же, и вектор один и тот же, но записанный в двух разных системах координат (z) и (x). Выясним, как преобразуются координаты вектора скорости при замене координат. Имеем

$$v_x^i = \frac{dh^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial z^j}\frac{dz^j}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial z^j} v_z^j \tag{15}$$

(напоминаем: суммирование по j). Квадрат длины вектора скорости имеет вид

$$|v_x|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dh^i}{dt}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j} v_z^j\right)^2 = g_{jk}v_z^j v_z^k, \tag{16}$$

где введено обозначение

$$g_{jk} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\frac{\partial x^i}{\partial z^k}. \tag{17}$$

Вывод. *В произвольных координатах* $(z^1, \ldots, z^n)$, *где* $x = x(z)$, *скалярный квадрат вектора* $v_z = \left(\frac{dz^1}{dt}, \ldots, \frac{dz^n}{dt}\right)$ *скорости кривой задается формулой*

$$|v_z|^2 = |v_x|^2 = g_{jk}\frac{dz^j}{dt}\frac{dz^k}{dt}, \tag{18}$$

где $g_{jk} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\frac{\partial x^i}{\partial z^k}$.

2. Квадратичные формы и векторы. Мы видели в предыдущем пункте, что координаты вектора скорости кривой при замене координат $x = x(z)$ преобразуются по правилу

$$v_x^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^j} v_z^j \tag{19}$$

или, кратко,

$$v_x = Av_z,$$

где $A = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)$ — определенная в предыдущем параграфе матрица Якоби замены, причем мы даже не пользовались здесь тем, что координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ евклидовы. Закон преобразования (19) можно положить в основу общего определения вектора.

Определение 4. *Вектором* в точке $P = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ называется набор чисел $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$, отнесенный к системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Если две системы координат $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(z^1, \ldots, z^n)$ связаны заменой $x = x(z)$, причем $x^i(z_0^1, \ldots, z_0^n) = x_0^i$, $i = 1, \ldots, n$, то для новой системы координат z этот же вектор в точке

$z_0^1, \ldots, z_0^n$ задается другим набором чисел $\zeta^1, \ldots, \zeta^n$, который связан с исходным формулой

$$\xi^i = \left.\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right|_{z^k=z_0^k} \zeta^j. \tag{20}$$

Следует обратить внимание, что главным в определении вектора является вид закона преобразования (20).

Рассмотрим другой часто встречающийся геометрический объект — градиент функции. Мы привыкли говорить, что градиент числовой функции $f(x^1, \ldots, x^n)$ (например, для случая $n=3$) в декартовых координатах $x^1, \ldots, x^n$ — это вектор с компонентами

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right). \tag{21}$$

Положим $\xi_j = \frac{\partial f}{\partial x^j}$, $j = 1, \ldots, n$. Посмотрим, как выглядит градиент той же функции в других координатах $z^1, \ldots, z^n$, где $x = x(z)$. Имеем

$$\operatorname{grad} f(x^1(z), \ldots, x^n(z)) = \left(\frac{\partial f}{\partial z^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z^n}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z^i} = \frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial z^i}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Обозначив через η_i компоненты $\frac{\partial f}{\partial z^i}$ градиента в новой системе координат, получим

$$\eta_i = \frac{\partial x^j}{\partial z^i}\xi_j. \tag{22}$$

Мы видим, что градиент функции при заменах координат преобразуется иначе, чем вектор. Такая величина будет ниже называться *ковектором*.

Пусть теперь система координат $x^1, \ldots, x^n$ евклидова, а $\xi_1 = (\xi_1^1, \ldots, \xi_1^n)$ и $\xi_2 = (\xi_2^1, \ldots, \xi_2^n)$ — два вектора, которые выходят из одной точки $P = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$. В системе координат $(z^1, \ldots, z^n)$ такой, что $x = x(z)$, $x(z_0) = x_0$, эти же векторы имеют соответственно координаты $(\eta_1^1, \ldots, \eta_1^n)$ и $(\eta_2^1, \ldots, \eta_2^n)$, связанные с прежними координатами формулами

$$\xi_1^i = a_j^i \eta_1^j, \quad \xi_2^i = a_j^i \eta_2^j,$$

где (a_j^i) — матрица Якоби, вычисленная при $z^k = z_0^k$, $k = 1, \ldots, n$. Скалярное произведение векторов ξ_1 и ξ_2 в исходной системе координат имеет вид

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \sum_{i=1}^n \xi_1^i \xi_2^i = \delta_{ij}\xi_1^i \xi_2^j. \tag{23}$$

В новой системе координат оно равно

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left(a_j^i \eta_1^j\right)\left(a_k^i \eta_2^k\right) = g_{jk}\eta_1^j \eta_2^k, \tag{24}$$

где матрица

$$g_{jk} = \sum_{i=1}^{n} a_j^i a_k^i = \delta_{sq} a_j^s a_k^q \tag{25}$$

— та самая матрица, которая появилась в предыдущем пункте при решении задачи о вычислении длины кривой в произвольных координатах. Поэтому скалярное произведение векторов в новых координатах определяется той же самой матрицей $G = (g_{ij})$. Формула (25) на алгебраическом языке означает, что

$$G = A^{\mathsf{T}} A, \tag{26}$$

где $^{\mathsf{T}}$ обозначает транспонирование матрицы. Выясним, как преобразуются компоненты g_{ij} матрицы G при переходе к новым координатам. Пусть заданы новые координаты $y^1, \ldots, y^n$ в той же области, и $z^j = z^j(y^1, \ldots, y^n)$, $j = 1, \ldots, n$. Положим $B = \left(b_j^i\right) = \dfrac{\partial z^i}{\partial y^j}$. Мы знаем, что тогда векторы ξ_1, ξ_2 в координатах $y^1, \ldots$ $\ldots, y^n$ имеют компоненты $\left(\zeta_1^1, \ldots, \zeta_1^n\right)$, $\left(\zeta_2^1, \ldots, \zeta_2^n\right)$, причем

$$\eta_1^i = b_j^i \zeta_1^j, \quad \eta_2^i = b_j^i \zeta_2^j. \tag{27}$$

Пусть матрица, дающая выражение для скалярного произведения в координатах (y), равна h_{ij}. Это означает, что

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = h_{kl}\zeta_1^k \zeta_2^l = g_{ij}\eta_1^i \eta_2^j. \tag{28}$$

Используя равенство (27), получаем

$$h_{kl}\zeta_1^k \zeta_2^l = \left(b_k^i g_{ij} b_l^j\right)\left(\zeta_1^k \zeta_2^l\right), \tag{29}$$

откуда

$$h_{kl} = b_k^i g_{ij} b_l^j. \tag{30}$$

Итак, $H = B^{\mathsf{T}} G B$.

Определение 5. *Квадратичной формой (на векторах)* в точке $x_0^1, \ldots, x_0^n$ называется набор чисел g_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, с $g_{ij} = g_{ji}$, отнесенный к системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Если две системы координат $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(z^1, \ldots, z^n)$ связаны заменой $x = x(z)$, причем $x^i\left(z_0^1, \ldots, z_0^n\right) = x_0^i$, $i = 1, \ldots, n$, то для новой системы координат $(z^1, \ldots, z^n)$ эта же квадратичная форма задается набором чисел h_{kl}, $k, l = 1, \ldots, n$, с $h_{kl} = h_{lk}$, который связан с исходным набором формулой

$$g_{ij} = \left.\frac{\partial x^k}{\partial z^j}\right|_{z^s=z_0^s} h_{kl} \left.\frac{\partial x^l}{\partial z^i}\right|_{z^s=z_0^s}. \tag{31}$$

В матричной форме это означает, что

$$G = A^{\mathrm{T}} H A.$$

Если в точке P задана квадратичная форма g_{ij}, преобразующаяся при заменах координат по закону (31), то на касательных векторах в точке P можно определить квадратичную (или билинейную) функцию $\{\xi, \xi\}$ (или $\{\xi, \eta\}$), полагая

$$\{\xi, \xi\} = g_{ij}\xi^i\xi^j$$

$$(\{\xi, \eta\} = g_{ij}\xi^i\eta^j).$$

Из закона преобразования (31) следует, что так определенные функции не зависят от выбора системы координат, а зависят только от точки P и вектора ξ (или векторов ξ и η).

§ 3. Римановы и псевдоримановы пространства

1. Риманова метрика. Понятие длины или, как говорят, метрики в пространстве или области пространства уже обсуждалось нами. Длина гладкой кривой $x^i = x^i(t)$ в n-мерном пространстве с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ задается, по определению, формулой (2.5) *)

$$l = \int_a^b |\dot{x}(t)|\, dt, \quad \dot{x} = v = \frac{dx}{dt}, \tag{1}$$

и требует предварительного определения понятия длины вектора скорости кривой в каждой точке пространства.

Риманова метрика предполагает задание длин векторов $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ в виде

$$|\xi|^2 = g_{ij}\xi^i\xi^j \tag{2}$$

в данной системе координат. Это означает, что $|\xi|^2$ есть квадратичная функция от вектора ξ в смысле предыдущего параграфа. Длина вектора должна не зависеть от выбора системы координат, поэтому величины g_{ij} при замене координат должны преобразовываться как компоненты квадратичной формы, т. е. по формуле (2.31). Исходя из этого, введем понятие римановой метрики.

Определение 1. *Римановой метрикой* в области пространства $\mathbb{R}^n$ называется положительная квадратичная форма, задан-

*) Здесь ссылка на формулу (5) из § 2. Такая же система ссылок используется и ниже.