с исходным набором формулой

$$g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial z^j}\bigg|_{z^s=z_0^s} h_{kl} \frac{\partial x^l}{\partial z^i}\bigg|_{z^s=z_0^s}. \tag{31}$$

В матричной форме это означает, что

$$G = A^{\mathrm{T}} H A.$$

Если в точке P задана квадратичная форма g_{ij}, преобразующаяся при заменах координат по закону (31), то на касательных векторах в точке P можно определить квадратичную (или билинейную) функцию $\{\xi, \xi\}$ (или $\{\xi, \eta\}$), полагая

$$\{\xi, \xi\} = g_{ij}\xi^i\xi^j$$

$$(\{\xi, \eta\} = g_{ij}\xi^i\eta^j).$$

Из закона преобразования (31) следует, что так определенные функции не зависят от выбора системы координат, а зависят только от точки P и вектора ξ (или векторов ξ и η).

§ 3. Римановы и псевдоримановы пространства

1. Риманова метрика. Понятие длины или, как говорят, метрики в пространстве или области пространства уже обсуждалось нами. Длина гладкой кривой $x^i = x^i(t)$ в n-мерном пространстве с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ задается, по определению, формулой (2.5) *)

$$l = \int_a^b |\dot{x}(t)|\,dt, \quad \dot{x} = v = \frac{dx}{dt}, \tag{1}$$

и требует предварительного определения понятия длины вектора скорости кривой в каждой точке пространства.

Риманова метрика предполагает задание длин векторов $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ в виде

$$|\xi|^2 = g_{ij}\xi^i\xi^j \tag{2}$$

в данной системе координат. Это означает, что $|\xi|^2$ есть квадратичная функция от вектора ξ в смысле предыдущего параграфа. Длина вектора должна не зависеть от выбора системы координат, поэтому величины g_{ij} при замене координат должны преобразовываться как компоненты квадратичной формы, т. е. по формуле (2.31). Исходя из этого, введем понятие римановой метрики.

Определение 1. *Римановой метрикой* в области пространства $\mathbb{R}^n$ называется положительная квадратичная форма, задан-

*) Здесь ссылка на формулу (5) из § 2. Такая же система ссылок используется и ниже.

ная на касательных векторах в каждой точке и гладко зависящая от точки.

Используя данное в предыдущем параграфе определение квадратичной формы, можно переформулировать определение римановой метрики в таком виде:

Определение 2. Римановой метрикой в области пространства с произвольными координатами $(z^1, \ldots, z^n)$ называется набор функций $g_{ij} = g_{ji}(z^1, \ldots, z^n)$, $i, j = 1, \ldots, n$, причем матрица (g_{ij}) положительно определена. Если заданы новые координаты $(y^1, \ldots, y^n)$ в той же области и $z^i = z^i(y^1, \ldots, y^n)$, $i = 1, \ldots, n$, то в новых координатах риманова метрика определяется набором функций $g'_{ij} = g'_{ji}(y^1, \ldots, y^n)$, $i, j = 1, \ldots, n$, причем

$$g'_{ij} = \frac{\partial z^k}{\partial y^i} g_{kl} \frac{\partial z^l}{\partial y^j}. \tag{3}$$

Положительная определенность матрицы (g_{ij}) означает, что $g_{ij}\xi^i\xi^j > 0$, если вектор ξ отличен от нулевого.

Если задана риманова метрика, то *длина кривой* $z^i = z^i(t)$ равна

$$l = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(z(t)) \frac{dz^i}{dt} \frac{dz^j}{dt}}\, dt. \tag{4}$$

Если заданы две кривые $z^i = f^i(t)$, $z^i = h^i(t)$, причем они пересекаются при $t = t_0$, то *углом между ними* называется такое число φ $(0 \leqslant \varphi < \pi)$, что

$$\cos\varphi = \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{|\xi||\eta|};$$

здесь $\langle \xi, \eta \rangle = g_{ij}\xi^i\eta^j$, $|\xi| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$, где ξ, η — векторы скорости в точке пересечения $t = t_0$.

Определение 3. *Пусть* $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ и $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^n)$ — два вектора в точке $P = (z_0^1, \ldots, z_0^n)$. Тогда их *скалярным произведением* называется число $\langle \xi, \eta \rangle$, равное

$$\langle \xi, \eta \rangle = g_{ij}(z_0^1, \ldots, z_0^n)\xi^i\eta^j. \tag{5}$$

Законы преобразования (3), (2.20) величин (g_{ij}) и координат векторов (ξ^i) обеспечивают независимость скалярного произведения двух векторов, исходящих из одной точки, от выбора системы координат.

Скалярное произведение двух векторов, исходящих из разных точек, не инвариантно при заменах координат.

Пример. Евклидова метрика.

а) $n = 2$. В евклидовых координатах $x^1 = x$, $x^2 = y$

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j; \end{cases} \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В полярных координатах r, φ

$$x^1 = r\cos\varphi, \quad x^2 = r\sin\varphi \quad (\text{см. § 1}),$$

$$r = z^1, \quad \varphi = z^2, \quad g'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что для кривой $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$,

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\, dt.$$

б) $n = 3$. В евклидовых координатах x^1, x^2, x^3 имеем $g_{ij} = \delta_{ij}$. В цилиндрических координатах ($y^1 = r$, $y^2 = \varphi$, $y^3 = z$, см. § 1)

$$g'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

В сферических координатах ($y^1 = r$, $y^2 = \theta$, $y^3 = \varphi$, см. § 1)

$$g'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix},$$

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Часто также пишут формулы для дифференциала dl или dl^2:

$$dl^2 = g_{ij}dz^i dz^j. \tag{6}$$

Для разобранных примеров получаем:

$$\left.\begin{array}{l} \text{для декартовых координат } dl^2 = \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2, \\ \text{для полярных } dl^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2, \\ \text{для цилиндрических } dl^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2 + (dz)^2, \\ \text{для сферических } dl^2 = (dr)^2 + r^2[(d\theta)^2 + \sin^2\theta\,(d\varphi)^2]. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Определение 4. Говорят, что метрика $g_{ij} = g_{ji}(z)$ *евклидова*, если найдутся координаты $x^1, \ldots, x^n$, $x^i = x^i(z)$, с

$$\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right) \neq 0, \quad g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^k}{\partial z^j}.$$

Тогда в координатах $x^1, \ldots, x^n$

$$g'_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Координаты $x^1, \ldots, x^n$ называются *евклидовыми координатами*.

Все разобранные выше примеры метрик — это евклидовы метрики в разных координатах. В следующей главе мы рассмотрим другие примеры римановых метрик.

2. Метрика Минковского. Пусть величины $g_{ij} = g_{ji}(z)$, $i, j = 1, \ldots, n$, таковы, что матрица g_{ij} невырождена, $\det(g_{ij}) \neq 0$, но форма $g_{ij}\xi^i\xi^j$ неположительна (индефинитна). Тогда мы говорим, что имеется *псевдориманова метрика*.

Мы говорим, что g_{ij} — псевдориманова метрика *типа* (p, q), где $p + q = n$, если p и q — положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы $g_{ij}\xi^i\xi^j$.

Нетрудно видеть (см. задачу в конце параграфа), что числа p и q определены корректно, т. е. индексы инерции не зависят от системы координат.

Если g_{ij} — псевдориманова метрика типа (p, q) и $g^0_{ij} = g_{ij}(z^1_0, \ldots, z^n_0)$, то квадратичную форму $g^0_{ij}\xi^i\xi^j$ заменой $\xi^i = \lambda^i_k\eta^k$ можно привести к виду

$$\eta_1^2 + \ldots + \eta_p^2 - \eta_{p+1}^2 - \ldots - \eta_n^2.$$

В окрестности точки такое приведение уже, вообще говоря, невозможно.

Определение 5. Говорят, что метрика $g_{ij} = g_{ji}(z)$ *псевдоевклидова*, если найдутся новые координаты $x^1, \ldots, x^n$, $x^i = x^i(z)$, $\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right) \neq 0$, такие, что

$$g_{ij} = \frac{\partial x^1}{\partial z^i}\frac{\partial x^1}{\partial z^j} + \ldots + \frac{\partial x^p}{\partial z^i}\frac{\partial x^p}{\partial z^j} - \frac{\partial x^{p+1}}{\partial z^i}\frac{\partial x^{p+1}}{\partial z^j} - \ldots - \frac{\partial x^n}{\partial z^i}\frac{\partial x^n}{\partial z^j}.$$

В этих новых координатах

$$g'_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j,$$
$$g'_{ii} = 1 \quad \text{при} \quad i \leqslant p, \quad g'_{ii} = -1 \quad \text{при} \quad i \geqslant p + 1.$$

Координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ называются *псевдоевклидовыми координатами типа* (p, q), где $q = n - p$. В пространстве $\mathbb{R}^n$ можно ввести псевдоевклидову метрику типа (p, q), определив «скалярное произведение» векторов $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ и $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^n)$ формулой

$$\langle \xi, \eta \rangle_{p,q} = \xi^1\eta^1 + \ldots + \xi^p\eta^p - \xi^{p+1}\eta^{p+1} - \ldots - \xi^n\eta^n; \tag{8}$$

при этом псевдоевклидовыми будут обычные координаты $x^1, \ldots$

..., x^n; пространство $\mathbb{R}^n$ с этой метрикой также называется псевдоевклидовым и обозначается $\mathbb{R}^n_{p,q}$.

Можно считать, что $p \leqslant [n/2]$, поскольку возможна замена $g_{ij} \to -g_{ij}$.

Особенно важен случай пространства $\mathbb{R}^4_{1,3}$. Это — пространство специальной теории относительности («пространство Минковского»). В специальной теории относительности постулируется, что пространственно-временной континуум, определенный в § 1, является пространством Минковского $\mathbb{R}^4_{1,3}$. Напомним, что точка в пространственно-временном континууме задается своими декартовыми координатами (t, x^1, x^2, x^3). Здесь первая координата t имеет размерность времени, а координаты (x^1, x^2, x^3) — размерность длины. Соответствующие псевдоевклидовы координаты таковы: $x^0 = ct$, x^1, x^2, x^3, где c — постоянная, имеющая размерность скорости (длина/время) и являющаяся скоростью света в пустоте.

Квадрат элемента длины dl^2 имеет вид

$$dl^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \tag{9}$$

Если есть две точки (события) $P_1 = (x_1^0, \ldots, x_1^3)$, $P_2 = (x_2^0, \ldots, x_2^3)$ то величина

$$|P_1 - P_2|^2 = (x_1^0 - x_2^0)^2 - (x_1^1 - x_2^1)^2 - (x_1^2 - x_2^2)^2 - (x_1^3 - x_2^3)^2 \tag{10}$$

называется пространственно-временным интервалом между событиями P_1 и P_2. Величина $|P_1 - P_2|^2$ может быть как положительной, так и отрицательной, а также нулем (при несовпадающих точках P_1 и P_2) (см. § 6).

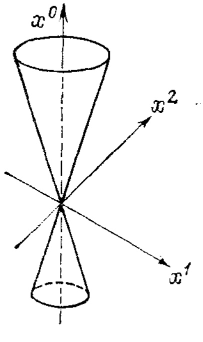

Рис. 4.

В заключение этого параграфа рассмотрим полезный пример координат в пространстве $\mathbb{R}^3_{1,2}$ — *псевдосферические координаты*. Пусть псевдоевклидовы координаты в $\mathbb{R}^3_{1,2}$ суть x^0, x^1, x^2. Определим псевдосферические координаты (ρ, χ, φ), полагая

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= \rho \operatorname{ch} \chi, \\ x^1 &= \rho \operatorname{sh} \chi \cos \varphi, \\ x^2 &= \rho \operatorname{sh} \chi \sin \varphi, \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} -\infty < \rho < \infty, \\ 0 < \chi < \infty, \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{aligned} \tag{11}$$

Тогда

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 = \rho^2 > 0.$$

Следовательно, координаты ρ, χ, φ заданы лишь в области $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 > 0$. В пространстве $\mathbb{R}^3_{1,2}$ эта область — внутренность конуса $(x^0)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$ (рис. 4). Все точки этой области (кроме точек оси x^0) — неособые для псевдосферических координат. Квадрат элемента длины dl^2 в этой области имеет вид

$$dl^2 = d\rho^2 - \rho^2[(d\chi)^2 + \operatorname{sh}^2\chi\,(d\varphi)^2]. \tag{12}$$

Нетрудно ввести псевдосферические координаты и во внешности конуса, задавая их формулами

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= \rho\operatorname{sh}\chi, \\ x^1 &= \rho\operatorname{ch}\chi\cos\varphi, \\ x^2 &= \rho\operatorname{ch}\chi\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \quad \rho > 0. \tag{13}$$

Этот случай менее важен для приложений.

Задача. Доказать, что тип псевдоримановой метрики не зависит от выбора системы координат.

§ 4. Простейшие группы преобразований евклидова пространства

1. Группы преобразований области. Предположим, что в n-мерном пространстве заданы две области: область Ω_x с координатами $x^1, \ldots, x^n$ и область Ω_z с координатами $z^1, \ldots, z^n$. Предположим, далее, что каждой точке области Ω_z поставлена в соответствие точка области Ω_x, так что $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n)$, $i = 1, \ldots, n$. Если координаты $z^1, \ldots, z^n$ можно выразить обратно через $x^1, \ldots, x^n$, т. е. $z^j = z^j(x^1, \ldots, x^n)$, $j = 1, \ldots, n$, то говорят, что задано *преобразование области* Ω_z в область Ω_x. При этом мы, конечно, требуем, чтобы функции $x^i(z^1, \ldots, z^n)$ и обратные им функции $z^j(x^1, \ldots, x^n)$ были гладкими. Тогда якобианы $\det\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)$ и $\det\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ нигде не обращаются в нуль.

Если области Ω_x и Ω_z совпадают, т. е. $\Omega_x = \Omega_z = \Omega$, то говорят, что задано преобразование области Ω. Таким образом, преобразование области Ω — это введение новых координат в этой области такое, что новые координаты можно всюду в области выразить через старые и наоборот:

$$x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n), \quad z^j = z^j(x^1, \ldots, x^n).$$

Напомним, что совокупность элементов G называется *группой*, если в этой совокупности заданы две операции: каждой паре g, h элементов из G ставится в соответствие их произведение $g \circ h$ из G и каждому элементу g из G ставится в соответствие элемент g^{-1} из G. При этом должны иметь место следующие свойства:

1) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$;
2) существует такой элемент $1 \in G$, что $1 \circ g = g \circ 1 = g$;
3) $g \circ (g^{-1}) = 1$.

Все преобразования данной области Ω образуют группу. Операция произведения двух преобразований определяется так: если