имеет вид

$$dl^2 = d\rho^2 - \rho^2[(d\chi)^2 + \operatorname{sh}^2\chi\,(d\varphi)^2]. \tag{12}$$

Нетрудно ввести псевдосферические координаты и во внешности конуса, задавая их формулами

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= \rho \operatorname{sh}\chi, \\ x^1 &= \rho \operatorname{ch}\chi \cos\varphi, \\ x^2 &= \rho \operatorname{ch}\chi \sin\varphi, \end{aligned}\right\} \quad \rho > 0. \tag{13}$$

Этот случай менее важен для приложений.

Задача. Доказать, что тип псевдоримановой метрики не зависит от выбора системы координат.

§ 4. Простейшие группы преобразований евклидова пространства

1. Группы преобразований области. Предположим, что в n-мерном пространстве заданы две области: область Ω_x с координатами $x^1, \ldots, x^n$ и область Ω_z с координатами $z^1, \ldots, z^n$. Предположим, далее, что каждой точке области Ω_z поставлена в соответствие точка области Ω_x, так что $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n)$, $i = 1, \ldots, n$. Если координаты $z^1, \ldots, z^n$ можно выразить обратно через $x^1, \ldots, x^n$, т. е. $z^j = z^j(x^1, \ldots, x^n)$, $j = 1, \ldots, n$, то говорят, что задано *преобразование области* Ω_z в область Ω_x. При этом мы, конечно, требуем, чтобы функции $x^i(z^1, \ldots, z^n)$ и обратные им функции $z^j(x^1, \ldots, x^n)$ были гладкими. Тогда якобианы $\det\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)$ и $\det\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ нигде не обращаются в нуль.

Если области Ω_x и Ω_z совпадают, т. е. $\Omega_x = \Omega_z = \Omega$, то говорят, что задано преобразование области Ω. Таким образом, преобразование области Ω — это введение новых координат в этой области такое, что новые координаты можно всюду в области выразить через старые и наоборот:

$$x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n), \quad z^j = z^j(x^1, \ldots, x^n).$$

Напомним, что совокупность элементов G называется *группой*, если в этой совокупности заданы две операции: каждой паре g, h элементов из G ставится в соответствие их произведение $g \circ h$ из G и каждому элементу g из G ставится в соответствие элемент g^{-1} из G. При этом должны иметь место следующие свойства:

1) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$;
2) существует такой элемент $1 \in G$, что $1 \circ g = g \circ 1 = g$;
3) $g \circ (g^{-1}) = 1$.

Все преобразования данной области Ω образуют группу. Операция произведения двух преобразований определяется так: если

φ — преобразование

$$x = x(z), \tag{1}$$

ψ — преобразование

$$z = z(y), \tag{2}$$

то $\varphi \circ \psi$ — суперпозиция этих преобразований

$$x = x(z(y)). \tag{3}$$

Обратное преобразование φ^{-1} определяется так:

$$z = z(x) \tag{4}$$

(т. е. координаты z^j из равенства (1) выражаем обратно через $x^1, \ldots, x^n$). Роль элемента 1 играет тождественное преобразование

$$x^i = z^i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Свойства 1), 2), 3) проверяются без труда.

В дальнейшем мы из группы G всех преобразований будем выделять некоторые подгруппы, важные для геометрии. Пусть в области Ω имеется некоторая метрика (риманова или псевдориманова), задаваемая в координатах $x^1, \ldots, x^n$ симметрической невырожденной матрицей $g_{ij} = g_{ji}(x^1, \ldots, x^n)$. Если задано преобразование $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n)$, то в координатах $z^1, \ldots, z^n$ эта же метрика задается матрицей $g'_{ij} = g'_{ij}(z^1, \ldots, z^n)$, где

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial z^i} g_{kl} \frac{\partial x^l}{\partial z^j}. \tag{6}$$

Определение 1. Преобразование $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n)$ называется *движением* данной метрики*), если

$$g'_{ij}(z^1, \ldots, z^n) = g_{ij}(x^1(z), \ldots, x^n(z)). \tag{7}$$

Таким образом, движение метрики точно сохраняет вид скалярного произведения (g_{ij}). Имеет место следующее простое утверждение.

Лемма 1. *Все движения данной метрики образуют группу.*

Действительно, если два преобразования φ и ψ сохраняют вид метрики, то и их суперпозиция будет сохранять вид метрики, обратное преобразование φ^{-1} также сохраняет вид метрики. Кроме того, тождественное преобразование сохраняет вид метрики по определению.

Эта группа называется *группой движений* данной метрики.

2. Преобразования плоскости. а) Пусть x^1, x^2 — декартовы координаты в плоскости. Простейшим примером преобразования плоскости является *сдвиг* (или *трансляция*) плоскости как целого вдоль какого-либо вектора $\xi = (\xi^1, \xi^2)$. В координатах это пре-

*) Мы часто будем так говорить, подразумевая под этим движение пространства, сохраняющее данную метрику.

образование имеет вид

$$x^1 = z^1 + \xi^1, \quad x^2 = z^2 + \xi^2. \tag{8}$$

Произведение двух таких сдвигов на векторы ξ и η имеет вид

$$x^1 = z^1 + (\xi^1 + \eta^1), \quad x^2 = z^2 + (\xi^2 + \eta^2),$$

т. е. опять есть сдвиг на вектор $\xi + \eta$. Преобразование, обратное преобразованию (8), имеет вид

$$z^1 = x^1 - \xi^1, \quad z^2 = x^2 - \xi^2. \tag{9}$$

Это также есть сдвиг на вектор $-\xi$. Тождественное преобразование есть сдвиг на нулевой вектор. Таким образом, сдвиги плоскости образуют группу. Каждому сдвигу соответствует вектор ξ в плоскости, причем произведению сдвигов соответствует сумма векторов, а обратному сдвигу — вектор $-\xi$. Это означает, что группа всех сдвигов плоскости и з о м о р ф н а группе векторов в плоскости. Эта группа коммутативна (абелева), так как $\xi + \eta = \eta + \xi$.

б) Следующий пример — *растяжения* (*гомотетии*) плоскости, не являющиеся, вообще говоря, движениями. В координатах растяжение определяется формулами

$$x^1 = \lambda z^1, \quad x^2 = \lambda z^2, \tag{10}$$

где λ — произвольное вещественное число, отличное от нуля. Произведение двух растяжений — в λ раз и в μ раз — имеет вид

$$x^1 = \lambda\mu y^1, \quad x^2 = \lambda\mu y^2. \tag{11}$$

Растяжение, обратное к (10), имеет вид

$$z^1 = \frac{x^1}{\lambda}, \quad z^2 = \frac{x^2}{\lambda}. \tag{12}$$

Таким образом, растяжения плоскости образуют группу. Эта группа также абелева и изоморфна группе отличных от нуля действительных чисел по умножению.

в) *Сдвиги вместе с растяжениями*. Речь идет о преобразованиях, задаваемых формулами

$$x^1 = \lambda z^1 + \xi^1, \quad x^2 = \lambda z^2 + \xi^2, \quad \lambda \neq 0. \tag{13}$$

Если $z^1 = \mu y^1 + \eta^1$, $z^2 = \mu y^2 + \eta^2$ — другое такое преобразование, то суперпозиция этих двух преобразований имеет вид

$$\begin{aligned} x^1 &= (\lambda\mu) y^1 + (\xi^1 + \lambda\eta^1), \\ x^2 &= (\lambda\mu) y^2 + (\xi^2 + \lambda\eta^2). \end{aligned} \tag{14}$$

Таким образом, первое преобразование определялось парой (λ, ξ), где λ — отличное от нуля вещественное число, ξ — вектор на плоскости, второе — парой (μ, η), а их суперпозиция $(\lambda, \xi)\circ(\mu, \eta)$ — парой $(\lambda\mu, \xi + \lambda\eta)$. Таким образом, если мы отождествим преобразование (13) с парой (λ, ξ) (где λ — отличное от нуля вещественное число, а ξ — вектор на плоскости), то суперпозиция $(\lambda, \xi)\circ(\mu, \eta)$ определяется формулой

$$(\lambda, \xi)\circ(\mu, \eta)=(\lambda\mu, \xi+\lambda\eta). \tag{15}$$

Преобразование, обратное к преобразованию (λ, ξ), запишется в виде $\left(\frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda}\xi\right)$. Следовательно, сдвиги вместе с растяжениями образуют группу. Эта группа неабелева. Действительно, из формулы (15) следует, что суперпозиция $(\mu, \eta)\circ(\lambda, \xi)$ равна

$$(\mu, \eta)\circ(\lambda, \xi)=(\lambda\mu, \eta+\mu\xi)\neq(\lambda, \xi)\circ(\mu, \eta).$$

Замечание. Группа сдвигов и растяжений плоскости имеет нормальный делитель (сдвиги), причем факторгруппа изоморфна группе растяжений. Формула (15) является определением полупрямого произведения группы сдвигов плоскости и группы ненулевых действительных чисел по умножению, состоящей из растяжений.

г) *Линейные преобразования плоскости.* Эти преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} x^1 &= az^1 + bz^2, \\ x^2 &= cz^1 + dz^2 \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Такое преобразование определяется матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Чтобы преобразование (16) было обратимым, т. е. чтобы из уравнений (16) можно было выразить z^1, z^2 через x^1, x^2, нужно, чтобы определитель $\Delta=ad-bc$ был отличен от нуля, т. е. чтобы матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ была невырожденной. Если имеется другая невырожденная матрица $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ и

$$\begin{aligned} z^1 &= a'y^1 + b'y^2, \\ z^2 &= c'y^1 + d'y^2 \end{aligned} \tag{17}$$

— соответствующее линейное преобразование, то суперпозиция преобразований (16) и (17) имеет вид

$$\begin{aligned} x^1 &= (aa'+bc')y^1+(ab'+bd')y^2, \\ x^2 &= (ca'+dc')y^1+(cb'+dd')y^2. \end{aligned} \tag{18}$$

Это преобразование также линейно и оно отвечает произведению матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Таким образом, группа линейных преобразований плоскости изоморфна группе невырожденных матриц второго порядка. Эта группа также неабелева.

д) *Аффинная группа* получается из линейной добавлением трансляций. Каждое преобразование из этой группы определяется парой (A, ξ), где A — невырожденная матрица, ξ — вектор в плоскости. Вид аффинного преобразования таков:

$$\begin{aligned} x^1 &= az^1 + bz^2 + \xi^1, \\ x^2 &= cz^1 + dz^2 + \xi^2 \end{aligned} \qquad \text{или} \qquad x = Az + \xi, \tag{19}$$

где

$$\Delta = ad - bc \neq 0.$$

Закон суперпозиции в аффинной группе имеет следующий вид:

$$(A, \xi) \circ (B, \eta) = (AB, \xi + A\eta). \tag{20}$$

Аффинная группа является полупрямым произведением группы невырожденных матриц второго порядка и группы векторов на плоскости.

е) Пусть на плоскости задана евклидова метрика, и x^1, x^2 — евклидовы координаты на плоскости. Метрика g_{ij} в координатах имеет вид

$$g_{ij} = \delta_{ij}.$$

Выясним, какие из аффинных преобразований (19) являются движениями евклидовой метрики. В координатах (z^1, z^2) метрика задается матрицей g'_{ij}, где

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \delta_{kl} \frac{\partial x^l}{\partial z^j} = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^k}{\partial z^j}. \tag{21}$$

Матрица Якоби $\left(\frac{\partial x^k}{\partial z^i}\right)$ аффинного преобразования совпадает с матрицей $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Если аффинное преобразование (19) есть движение, то $g'_{ij} = \delta_{ij}$ и это равенство превращается в систему трех уравнений

$$a^2 + c^2 = 1, \quad ab + cd = 0, \quad b^2 + d^2 = 1 \tag{22}$$

или в матричное уравнение

$$A^{\mathrm{T}} A = 1.$$

Это означает, что матрица A ортогональна.

Таким образом, (19) есть движение евклидовой метрики тогда и только тогда, когда матрица A ортогональна. Уравнение (22) можно решить явно. Так как $a^2 + c^2 = 1$, то можно выбрать такой угол φ, что $a = \cos\varphi$, $c = \sin\varphi$. Тогда

$$d = \cos\varphi, \quad b = -\sin\varphi \quad \text{или} \quad d = -\cos\varphi, \quad b = \sin\varphi.$$

При каждом φ получаем два типа ортогональных матриц:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Матрицы первого типа задают поворот плоскости как целого на угол φ вокруг начала координат. Определитель такой матрицы равен единице. Преобразование второго типа сводится к суперпозиции поворота на угол φ и отражения в оси абсцисс:

$$z^1 = y^1,$$
$$z^2 = -y^2.$$

Определитель матрицы A в этом случае равен -1. Движения первого типа, где определитель матрицы равен $+1$, образуют подгруппу в группе всех движений. Такие движения (т. е. движения без отражений) мы будем называть *собственными*.

Лемма 2. а) *Любое собственное движение плоскости есть вращение вокруг некоторой точки или сдвиг.*

б) *Любое движение вида $z \mapsto Az + \xi$, где определитель матрицы A равен -1, есть суперпозиция отражения в некоторой прямой и сдвига вдоль оси отражения (скользящее отражение).*

Доказательство. Пусть движение имеет вид

$$x = Az + \xi, \quad A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \tag{25}$$

т. е. $z \mapsto Az + \xi$. Если $\varphi = 0$, то $A = 1$, и мы получаем чистый сдвиг. Пусть $A \neq 1$. Найдем центр вращения для этого движения. Этот центр будет неподвижной точкой преобразования (25), т. е. такой точкой z_0, что

$$z_0 = Az_0 + \xi. \tag{26}$$

Из равенства (26) получаем

$$(1 - A) z_0 = \xi. \tag{27}$$

Если матрица A вида (25) отлична от 1, то матрица $1 - A$ не вырождена, поэтому из уравнения (27) однозначно определяется центр вращения z_0. Утверждение а) доказано.

Рассмотрим теперь полную группу движений плоскости. Пусть $\det A = -1$. Тогда поворотом осей можно добиться (см. формулу (24)), что

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

т. е. A есть матрица отражения в оси абсцисс. Преобразование

$z \mapsto Az + \xi$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z^1 + \xi^1 \\ -z^2 + \xi^2 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Сделаем перенос начала координат, полагая

$$z^1 = y^1, \quad z^2 = y^2 + \frac{1}{2}\xi^2. \tag{30}$$

После сдвига наше движение примет вид

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y^1 + \xi^1 \\ -y^2 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Это и есть скользящее отражение. В частности, при $\xi^1 = 0$ получаем чистое отражение. Лемма доказана.

Мы получаем, таким образом, три типа движений плоскости: сдвиги, вращения и скользящие отражения (в частности, отражения).

ж) В заключение этого пункта рассмотрим группу движений и растяжений. Выясним, что происходит с евклидовой метрикой при преобразованиях

$$x = \lambda Bz + \xi, \text{ где } B^{\mathrm{T}}B = 1. \tag{32}$$

Здесь матрица Якоби $A = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)$ имеет вид $A = \lambda B$, где B — ортогональная матрица. Тогда в координатах (z^1, z^2) евклидова метрика примет вид

$$g'_{ij} = \lambda^2 g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}. \tag{33}$$

Таким образом, при этих преобразованиях метрика g_{ij} умножается на число. Такие аффинные преобразования называются *конформными*. Выясним, какие из аффинных преобразований (19) конформны. Рассуждая, как в предыдущем пункте, получаем для матрицы A условие конформности

$$\left(\frac{1}{\lambda} A^{\mathrm{T}}\right)\left(\frac{1}{\lambda} A\right) = 1. \tag{34}$$

Следовательно, матрица $B = \frac{1}{\lambda} A$ ортогональна. Таким образом, конформная подгруппа состоит из аффинных преобразований вида

$$x = \lambda Bz + \xi, \tag{35}$$

где матрица B ортогональна.

Пусть определитель матрицы B равен $+1$, т. е. B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Введем комплексные переменные $v = z^1 + iz^2$, $w = x^1 + ix^2$. Тогда из равенства (35) получаем

$$w = (x^1 + ix^2) = \lambda(\cos\varphi - i\sin\varphi)(z^1 + iz^2) + (\xi^1 + i\xi^2),$$

т. е.

$$w = \alpha v + \beta, \tag{36}$$

где комплексные числа α и β имеют вид

$$\alpha = \lambda e^{-i\varphi}, \quad \beta = \xi^1 + i\xi^2. \tag{37}$$

Формула (37) означает, что собственные ($\det B = 1$) конформные преобразования плоскости суть комплексно линейные преобразования комплексной прямой $\mathbb{C} = \mathbb{C}^1$

$$v = z^1 + iz^2 \mapsto w = x^1 + ix^2.$$

Пусть теперь определитель матрицы B равен -1. Мы видели (см. в примере выше), что такие преобразования получаются из вращений добавлением отражения в оси абсцисс:

$$x^1 = z^1,$$
$$x^2 = -z^2.$$

На языке комплексных переменных v и w преобразование устроено так:

$$w = \bar{v} = z^1 - iz^2. \tag{38}$$

Таким образом, общий вид конформного аффинного преобразования евклидовой метрики на плоскости таков:

$$w = \alpha v + \beta \quad \text{или} \quad w = \alpha\bar{v} + \beta, \tag{39}$$

где α и β — произвольные комплексные числа, $\alpha \neq 0$. Если $|\alpha| = 1$, то преобразования (39) являются движениями евклидовой метрики. Если α — вещественное число, то мы получаем разобранные в примере в) сдвиги с растяжениями.

3. Движения трехмерного евклидова пространства. Рассмотрим сначала движение, являющееся линейным преобразованием и оставляющее неподвижным начало координат. Оно задается матрицей $A = (a^i_j)$ третьего порядка:

$$\begin{aligned} x &= Az, \\ x^i &= a^i_j z^j. \end{aligned} \tag{40}$$

В координатах x^1, x^2, x^3 метрика является евклидовой, т. е. имеет вид $g_{ij} = \delta_{ij}$. Здесь матрица Якоби $\dfrac{\partial x^i}{\partial z^j} = a^i_j$ совпадает с матрицей A. Поэтому в координатах z^1, z^2, z^3 метрика имеет вид g'_{ij}, где

$$g'_{ij} = a^k_i \delta_{kl} a^l_j = \sum_{k=1}^{3} a^k_i a^k_j.$$

Если $g'_{ij} = \delta_{ij}$, т. е. преобразование (40) есть движение, то имеем

$$\sum_{k=1}^{3} a_i^k a_j^k = \delta_{ij}. \tag{41}$$

Равенство (41) попросту означает, что если базисные векторы $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ были ортонормированы, т. е. $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, то векторы $Ae_i = a_i^k e_k$ тоже ортонормированы.

Матричная запись равенства (41) такова:

$$A^{\mathrm{T}} A = 1. \tag{42}$$

Стало быть, матрица A ортогональна. Так как $\det A^{\mathrm{T}} = \det A$, то определитель матрицы A равен ± 1:

$$\det A = \pm 1. \tag{43}$$

Группа ортогональных матриц совпадает с группой преобразований, оставляющих инвариантной форму $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$, т. е. таких матриц A, что

$$\langle x, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle. \tag{44}$$

При этих условиях имеет место

Лемма 3. *Преобразование A имеет инвариантную прямую, на которой A либо неподвижно, либо является отражением.*

Доказательство. Если v — направляющий вектор такой прямой, то мы должны иметь

$$Av = \lambda v, \tag{45}$$

где λ — действительное число. Поэтому v — собственный вектор с собственным значением λ. Здесь λ есть корень характеристического многочлена матрицы A:

$$\det(A - \lambda \cdot 1) = 0. \tag{46}$$

Уравнение (46) является кубическим относительно λ с вещественными коэффициентами. Поэтому оно имеет хотя бы один вещественный корень λ_0. Корню λ_0 отвечает хотя бы один собственный вектор v_0. Тогда

$$\langle v_0, v_0 \rangle = \langle Av_0, Av_0 \rangle = \lambda_0^2 \langle v_0, v_0 \rangle.$$

Значит, $\lambda_0 = \pm 1$. Лемма доказана.

Пусть вектор w ортогонален собственному вектору v_0: $\langle w, v_0 \rangle = 0$. Тогда вектор Aw тоже ортогонален v_0:

$$\langle v_0, Aw \rangle = \pm \langle Av_0, Aw \rangle = \pm \langle v_0, w \rangle = 0. \tag{47}$$

Вывод. *Плоскость, ортогональная вектору v_0 и проходящая через начало координат, инвариантна относительно преобразования A.*

Выберем в пространстве евклидовы координаты (x^1, x^2, x^3) так, что ось x^3 идет вдоль вектора v_0. Тогда в этих координатах матрица A будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Из уравнения (42) вытекает, что матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ортогональна. Поэтому она имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{49}$$

В зависимости от знаков λ_0 и $ad-bc$ получаем следующие типы движений.

а) *Вращение вокруг некоторой оси.* Матрица этого преобразования такова (x^3 — ось вращения):

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = \lambda_0(ad-bc) = 1. \tag{50}$$

В случае $\lambda_0 = -1$, $ad-bc = -1$ выбором координат (x^1, x^2) можно добиться, чтобы матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ приняла вид $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда $A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$ есть матрица вращения на угол π вокруг оси x^1.

б) *Зеркальное вращение.* Это преобразование есть результат двух последовательных преобразований: вращения вокруг некоторой оси и отражения в плоскости, ортогональной этой оси. Матрица здесь приводится к виду

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det A = -1. \tag{51}$$

Мы видим, что если $\det A = +1$, то соответствующее ортогональное преобразование всегда есть вращение вокруг некоторой оси. Ортогональные матрицы A образуют группу, которая обозначается $O(3)$. Ортогональные матрицы с определителем $+1$ образуют подгруппу в $O(3)$, которая обозначается $SO(3)$. Всякая матрица из $SO(3)$ имеет хотя бы одно собственное значение 1. В силу проведенных рассуждений группа $SO(3)$ состоит из вращений относительно всевозможных прямых, проходящих через начало координат.

Разберем теперь случай произвольных движений трехмерного пространства. Эти движения являются аффинными преобразованиями

$$z \to Az + \xi. \tag{52}$$

Так же, как и для случая плоскости, убеждаемся в том, что матрица A ортогональна. Сделаем сдвиг начала координат: пусть $z = y + y_0$. Тогда после сдвига движение запишется так:

$$y \to Ay + (A - 1)y_0 + \xi. \tag{53}$$

Пусть A имеет вид (51), т. е. задает зеркальное вращение. Тогда матрица $A - 1$ невырождена. Можно найти вектор y_0 такой, что

$$(1 - A)y_0 = \xi, \quad y_0 = (1 - A)^{-1}\xi. \tag{54}$$

Тогда в координатах y отображение будет просто зеркальным вращением:

$$y \to Ay, \quad A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin & \varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos & \varphi & 0 \\ 0 & 0 & & -1 \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Пусть теперь матрица $A \neq 1$ имеет вид (50) и задает вращение относительно некоторой оси. Тогда матрица $A - 1$ вырождена. Уравнение (54) для вектора y_0 запишется так:

$$(1 - A)y_0 = \xi \leftrightarrow \begin{cases} (1 - \cos\varphi)\,y_0^1 - \sin\varphi\, y_0^2 = \xi^1, \\ \sin\varphi\, y_0^1 + (1 - \cos\varphi)\,y_0^2 = \xi^2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \xi^3. \end{cases} \tag{56}$$

Эта система решений не имеет (если $\xi^3 \neq 0$). Но из первых двух уравнений однозначно находятся y_0^1 и y_0^2 (если $\varphi \neq 0$, т. е. преобразование (52) не есть чистый сдвиг). Тогда при произвольном выборе третьей координаты y_0^3 движение (52) будет иметь вид

$$y \to Ay + (0, 0, \xi^3), \quad A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{57}$$

где $\eta = (0, 0, \xi^3)$ направлен вдоль оси вращения A, $A\eta = \eta$. Следовательно, это движение винтовое.

Вывод. *Собственные движения* ($\det A = +1$) *трехмерного пространства — это винтовые движения (в частности, сдвиги и вращения).*

Полная группа движений получается добавлением зеркальных вращений и скользящих отражений.

4. Другие примеры групп преобразований. а) По аналогии с п. 3 рассмотрим группу движений n-мерного евклидова пространства, сохраняющих начало координат. Эта группа обозначается $O(n)$. Каждый элемент из $O(n)$ задается ортогональной матрицей A n-го порядка

$$x = Az, \quad A^{\mathrm{T}}A = 1, \quad \det A = \pm 1. \tag{58}$$

Преобразование вида (58), где $\det A = 1$, образуют подгруппу

$SO(n)\subset O(n)$. Эта группа также называется группой n-мерных вращений. Название это, однако, условно, так как n-мерное вращение при $n\geqslant 3$ не является, вообще говоря, плоским вращением.

Группа $SO(n)$ *связна*. Это означает следующее: если A_0 и A_1 — любые два вращения, A_0, $A_1\in SO(n)$, то в $SO(n)$ найдется кривая $A(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$ (т. е. непрерывное семейство ортогональных матриц с определителем 1), такая, что $A(0)=A_0$, $A(1)=A_1$. Достаточно доказать это утверждение для случая, когда A_0 — единичная матрица $1\in SO(n)$.

Из линейной алгебры известно, что любую ортогональную матрицу можно привести к ящичному виду:

$$\begin{pmatrix} \square & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \square & & & \\ & & & \pm 1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \pm 1 \end{pmatrix}, \qquad (59)$$

где i-й ящик имеет вид

$$\square = \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & \sin\varphi_i \\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix} \qquad (60)$$

(мы получили такое приведение в случае $n=2$, 3 в предыдущих пунктах).

Рассмотрим семейство матриц $A(t)$, заменяя в каждом ящике (60) угол φ_i на $t\varphi_i$. Тогда при $t=1$ мы имеем исходную матрицу A, а при $t=0$ получаем матрицу, на диагонали которой стоят только ± 1. Так как $\det A=1$, то количество минус единиц четно. Перенумеровав координаты, приведем матрицу к такому виду:

$$A(0)=\begin{pmatrix} \square & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \square & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad (61)$$

где каждый ящик имеет вид

$$\boxed{} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (62)$$

Такую матрицу можно уже связать кривой с единичной матрицей: заменим каждый ящик (62) на такой:

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}. \qquad (63)$$

При $t=\pi$ мы получаем исходную матрицу, при $t=0$ — единичную.

Ясно, что группа $O(n)$ несвязна: если матрицы A_0 и A_1 таковы, что $\det A_0 = 1$, $\det A_1 = -1$, то в группе $O(n)$ эти матрицы нельзя связать кривой. Действительно, если такая кривая $A(t)$ существует, то $\det A(t)$ — непрерывная функция t. Но $\det A_0 = \det A(0) = 1$, $\det A(1) = -1$.

б) *Группа Галилея.* Известный из классической механики принцип относительности Галилея состоит в следующем утверждении: если покоящуюся систему отсчета (x^1, x^2, x^3) заменить на любую другую систему отсчета (x'^1, x'^2, x'^3), которая движется относительно первой прямолинейно и равномерно, то все законы классической механики сохранят свой вид. Это означает, что законы классической механики инвариантны относительно преобразований Галилея:

$$x'^1 = x^1 - vt,$$
$$x'^2 = x^2, \qquad (64)$$
$$x'^3 = x^3, \quad t' = t.$$

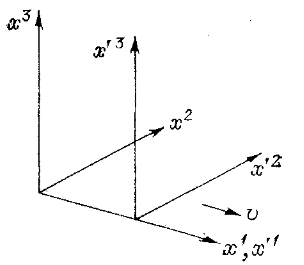

Рис. 5. Система (x^1, x^2, x^3) покоится, система (x'^1, x'^2, x'^3) движется с постоянной скоростью v вдоль первой оси.

Здесь v есть скорость движущейся системы относительно покоящейся (рис. 5). Системы отсчета, получающиеся из покоящейся преобразованием (64), называются инерциальными. Сделаем важное замечание: в классической механике время t (как и вмещающее пространство $\mathbb{R}^3$) носит абсолютный характер, т. е. величина промежутка времени Δt между событиями A и B не зависит от того, в какой инерциальной системе отсчета этот промежуток измеряется. Иными словами, время течет одинаково для всей Вселенной; в каждой точке пространства находятся синхронизированные часы. С чисто геометрической точки зрения преобразования Галилея являются просто формулами перехода от одной системы координат (t, x^1, x^2, x^3) к другой (t', x'^1, x'^2, x'^3), где $t'=t$. Общий вид преобразований из группы Галилея, сохраняющей вид законов классической механики, таков:

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ x' &= Ax + x_0 - vt, \end{aligned} \tag{65}$$

где A — матрица вращения.

Определение 2. *Группой Галилея* называется группа преобразований вида (65).

Менее очевидный пример группы преобразований, возникающей в механике:

$$\begin{aligned} t &\to \beta t, \\ x &\to \alpha x; \end{aligned} \qquad \alpha^3 = \beta^2. \tag{66}$$

Группа преобразований (66) связана с третьим законом Кеплера. Этот закон утверждает, что квадраты периодов обращения планет относятся, как кубы их расстояний от Солнца (в перигелиях). Фактически третий закон Кеплера следует из того, что эта механическая система — движение частицы в ньютоновом поле тяготения с потенциалом $\varphi = \mathrm{const}/r$ — инвариантна относительно преобразований (66): эти преобразования переводят траекторию движения в траекторию движения.

Задачи. 1. Пусть $Q(x) = b_{ij}x^i x^j$, где $b_{ij} = b_{ji}$,— квадратичная форма, $B(x, y) = b_{ij}x^i y^j$ — соответствующая билинейная форма. Доказать, что линейное преобразование A сохраняет билинейную форму $B(Ax, Ay) = B(x, y)$ в том и только том случае, если оно сохраняет квадратичную форму $Q(Ax) = Q(x)$ (векторы x и y любые).

2. Любое движение евклидова пространства задается аффинным преобразованием (доказать).

3. Аффинная группа в n-мерном пространстве изоморфна группе матриц порядка $n+1$ вида

$$\begin{pmatrix} A & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где A есть невырожденная $n \times n$-матрица, ξ есть n-мерный вектор-столбец.

4. Найти матричную реализацию группы Галилея.

§ 5. Формулы Френе

1. Кривизна плоских кривых. Рассмотрим евклидову плоскость с евклидовыми координатами (x, y) и базисными ортами e_1, e_2. Любая точка P с координатами (x, y) изображается радиус-вектором $r = xe_1 + ye_2$, идущим из начала координат O в точку P.