преобразований из группы Галилея, сохраняющей вид законов классической механики, таков:

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ x' &= Ax + x_0 - vt, \end{aligned} \tag{65}$$

где A — матрица вращения.

Определение 2. *Группой Галилея* называется группа преобразований вида (65).

Менее очевидный пример группы преобразований, возникающей в механике:

$$\begin{aligned} t &\to \beta t, \\ x &\to \alpha x; \end{aligned} \qquad \alpha^3 = \beta^2. \tag{66}$$

Группа преобразований (66) связана с третьим законом Кеплера. Этот закон утверждает, что квадраты периодов обращения планет относятся, как кубы их расстояний от Солнца (в перигелиях). Фактически третий закон Кеплера следует из того, что эта механическая система — движение частицы в ньютоновом поле тяготения с потенциалом $\varphi = \mathrm{const}/r$ — инвариантна относительно преобразований (66): эти преобразования переводят траекторию движения в траекторию движения.

Задачи. 1. Пусть $Q(x) = b_{ij}x^i x^j$, где $b_{ij} = b_{ji}$,— квадратичная форма, $B(x, y) = b_{ij}x^i y^j$ — соответствующая билинейная форма. Доказать, что линейное преобразование A сохраняет билинейную форму $B(Ax, Ay) = B(x, y)$ в том и только том случае, если оно сохраняет квадратичную форму $Q(Ax) = Q(x)$ (векторы x и y любые).

2. Любое движение евклидова пространства задается аффинным преобразованием (доказать).

3. Аффинная группа в n-мерном пространстве изоморфна группе матриц порядка $n+1$ вида

$$\begin{pmatrix} A & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где A есть невырожденная $n \times n$-матрица, ξ есть n-мерный вектор-столбец.

4. Найти матричную реализацию группы Галилея.

§ 5. Формулы Френе

1. Кривизна плоских кривых. Рассмотрим евклидову плоскость с евклидовыми координатами (x, y) и базисными ортами e_1, e_2. Любая точка P с координатами (x, y) изображается радиус-вектором $r = xe_1 + ye_2$, идущим из начала координат O в точку P.

Длина вектора r дается евклидовой формулой

$$|r|=\sqrt{\langle r,\ r\rangle}=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{1}$$

Пусть задана гладкая кривая

$$r=r(t),\quad x=x(t),\quad y=y(t), \tag{2}$$

где радиус-векторы точек кривой имеют вид $x(t)e_1+y(t)e_2$. Длина кривой имеет вид

$$l=\int_a^b\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}\,dt=\int_a^b dl,\quad \text{где } \dot{x}=\frac{dx}{dt},\quad \dot{y}=\frac{dy}{dt}; \tag{3}$$

здесь дифференциал длины имеет вид $dl=|v|dt$, $|v|=\sqrt{\langle v,\ v\rangle}$, $v=\dot{x}e_1+\dot{y}e_2$ — вектор скорости. Мы будем писать $v_t=\frac{dr}{dt}$, явно отмечая внизу значком t, что вектор скорости отнесен к параметру t. Нам часто будет удобно рассматривать кривую, заданную через натуральный параметр — длину l (см. § 2, конец п. 1):

$$x=x(l),\quad y=y(l). \tag{4}$$

Тогда $v=v_l=\frac{dx}{dl}e_1+\frac{dy}{dl}e_2$, $|v|=1$. Если на кривой был задан произвольный параметр t, $x=x(t)$, $y=y(t)$, то мы имеем связь: $dl=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$. Существенную роль будут играть два вектора — скорости и ускорения —

$$\frac{dr}{dt}=v_t,\quad \frac{d^2r}{dt^2}=w_t. \tag{5}$$

Если параметр натурален, $t=l$, то $|v_l|=1$. Имеет место простая, но часто используемая

Лемма 1. *Если задан зависящий от времени вектор $v=v(t)$ и $|v|\equiv 1$, то векторы v и $\dot{v}$ ортогональны.*

Доказательство. Так как $v=v^1e_1+v^2e_2$ и $|v|^2=(v^1)^2+(v^2)^2$, то

$$\frac{d}{dt}\langle v,\ v\rangle=\langle\dot{v},\ v\rangle+\langle v,\ \dot{v}\rangle=2\langle v,\ \dot{v}\rangle=\frac{d}{dt}|v|^2=0;$$

поэтому $\langle v,\ \dot{v}\rangle=0$. Лемма доказана.

Замечание. Если имеются два любых вектора $v(t)$ и $w(t)$, то в евклидовой геометрии имеет место формула $\frac{d}{dt}\langle v,\ w\rangle=\langle\dot{v},\ w\rangle+\langle v,\ \dot{w}\rangle$.

Применяя нашу лемму к кривой, наделенной натуральным параметром $l=t$, $r=r(t)=x(t)e_1+y(t)e_2$, и полагая $v=\frac{dr}{dt}$, получаем

Следствие. *Векторы скорости $v(t)$ и ускорения $w(t)=\frac{dv}{dt}$ ортогональны, если параметр натурален.*

Определение 1. *Кривизной* кривой $r(t)$ называется величина вектора ускорения $k = |w(t)|$, если $t = l$ (натуральный параметр). *Ориентированной кривизной* называется величина $\hat{k} = \pm k$, где знак совпадает со знаком определителя, составленного из координат векторов v и w (знаком ориентации репера (v, w)).

Вывод.

$$\frac{dv}{dt} = kn = \frac{d^2r}{dl^2}, \tag{6}$$

где n — единичный вектор, нормальный к кривой:

$$n = \frac{w}{|w|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dl^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dl^2}\right)^2}} \left(\frac{d^2x}{dl^2} e_1 + \frac{d^2y}{dl^2} e_2\right). \tag{7}$$

Радиусом кривизны R называется число $1/k$.

Соответствует ли это понятие кривизны нашим наглядным представлениям?

Свойства кривизны:

1) *Кривизна прямой равна нулю.*

Доказательство. Пусть $x = x_0 + al$, $y = y_0 + bl$ (прямая), причем параметр l натурален; это значит, что

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dl}\right)^2 = 1.$$

Тогда $w = \frac{d^2r}{dl^2} = 0$ и $k = 0$, $R = \infty$.

2) *Кривизна окружности радиуса R постоянна и равна R^{-1}.*

Доказательство. Пусть

$$x = x_0 + R\cos(l/R), \quad y = y_0 + R\sin(l/R),$$

где $R = \text{const}$; тогда

$$\frac{d^2x}{dl^2} = -\frac{\cos(l/R)}{R}, \quad \frac{d^2y}{dl^2} = -\frac{\sin(l/R)}{R}$$

и $|w| = \frac{1}{R} = k$.

Имеет место важная

Теорема 1. *Если кривая $r = r(l)$ с нигде не обращающейся в нуль кривизной задана через натуральный параметр l, то имеют место формулы Френе*

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dl} &= w = kn, \\ \frac{dn}{dl} &= -kv, \end{aligned} \tag{8}$$

где $n = \frac{w}{|w|}$ *— единичный вектор нормали.*

Доказательство. Так как n — единичный вектор и векторы n и v ортогональны, мы имеем:

а) $\left\langle n, \frac{dn}{dl} \right\rangle = 0$ (из леммы 1);

б) $\frac{dn}{dl} = \alpha v$ ($n \perp v$, и размерность пространства равна 2).

Так как $|v| = 1$, то $|\alpha| = \left|\frac{dn}{dl}\right|$. Чему равно α? Так как $\langle v, n\rangle = 0$, мы имеем

$$0 = \frac{d}{dl}\langle v, n\rangle = \left\langle \frac{dv}{dl}, n \right\rangle + \left\langle v, \frac{dn}{dl} \right\rangle = k + \alpha \langle v, v\rangle = k + \alpha.$$

Итак, $\alpha = -k$. Теорема доказана.

Замечание. Если кривизна кривой в некоторых ее точках обращается в нуль, то можно определить вектор нормали n к кривой, так что $n \perp v$, и репер (v, n) положительно ориентирован. В этом случае формулы Френе (8) остаются справедливыми с заменой кривизны k на ориентированную кривизну $\widehat{k}$ (проверьте!).

Каков геометрический смысл формул Френе? Так как $\frac{dv}{dl} = kn$, $\frac{dn}{dl} = -kv$, и (v, n) — единичный ортонормированный репер, то

$$\begin{aligned} v + \Delta v &= v + (\Delta l)\frac{dv}{dl} + O(\Delta l^2) = v + k(\Delta l)\, n + O(\Delta l^2), \\ n + \Delta n &= n + (\Delta l)\frac{dn}{dl} + O(\Delta l^2) = n - k(\Delta l)\, v + O(\Delta l^2). \end{aligned} \tag{9}$$

Положим $k(\Delta l) = \Delta\varphi$. Тогда

$$\begin{aligned} \cos(\Delta\varphi) &= 1 + O(\Delta\varphi^2), \\ \sin(\Delta\varphi) &= \Delta\varphi + O(\Delta\varphi^2), \end{aligned} \tag{10}$$

и мы можем написать

$$\begin{aligned} v + \Delta v &= \cos(\Delta\varphi)\, v + \sin(\Delta\varphi)\, n, \\ n + \Delta n &= -\sin(\Delta\varphi)\, v + \cos(\Delta\varphi)\, n, \end{aligned} \tag{11}$$

т. е. переход от репера (v, n) к реперу $(v + \Delta v, n + \Delta n)$ состоит в повороте на малый угол $\Delta\varphi$.

Итак, формулы Френе описывают вращение репера (v, n) при переходе от точки l к близкой точке $l + \Delta l$ с точностью до малых второго порядка. Иногда это выражают формулами

$$k = \left|\frac{d\varphi}{dl}\right|, \quad \widehat{k} = \frac{d\varphi}{dl}, \tag{12}$$

где φ — угол поворота вектора v (или n) при движении вдоль кривой. Параметр здесь все время считался натуральным.

Поставим теперь следующий естественный вопрос: как вычислить кривизну плоской кривой $r(t)=(x(t),\ y(t))$, если параметр t не является натуральным.

В этом случае $v_t=(\dot{x},\ \dot{y})$ и $|v_t|\neq 1$. Поэтому векторы v_t и $\dot{v}_t=w_t$ (скорость и ускорение) не перпендикулярны.

Пусть $\xi=\xi(t)=\xi^1e_1+\xi^2e_2$ — любой вектор. Для нашей кривой мы имели

$$dl=|v_t|dt=|\dot{r}|dt. \tag{13}$$

Для любого вектора $\xi(t)$ имеем

$$\frac{d\xi}{dl}=\frac{1}{|v_t|}\frac{d\xi}{dt}=\frac{d\xi}{dt}\frac{dt}{dl}, \tag{14}$$

где $|v_t|=|\dot{r}|$ и скорость определена по отношению к параметру t пробегания вдоль кривой.

Пусть $\eta(t)=\dfrac{v_t}{|v_t|}=\dfrac{dr}{dl}$; $\eta(t)$ — единичный вектор касательной (он совпадает с вектором скорости v, если параметр натуральный).

По определению кривизны имеем

$$k=\left|\frac{d^2r}{dl^2}\right|=\left|\frac{d\eta}{dl}\right|=\left|\frac{d}{dl}\left(\frac{v_t}{|v_t|}\right)\right| \tag{15}$$

(длина ускорения в натуральном параметре равна кривизне). Из формулы (14) вытекает, что

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{v_t}{|v_t|}\right)=\frac{1}{|v_t|}\frac{d}{dt}\left(\frac{v_t}{|v_t|}\right)=\frac{1}{|v_t|^2}\left(\frac{dv_t}{dt}-\frac{v_t}{|v_t|}\frac{d|v_t|}{dt}\right)=$$

$$=\frac{1}{|v_t|^2}\left(\ddot{r}-\frac{\dot{r}}{2|\dot{r}|^2}\frac{d|\dot{r}|^2}{dt}\right),\quad |v_t|=|\dot{r}|.$$

Итак, получаем (считая, что $|\dot{r}|\neq 0$)

$$k=\left|\frac{d^2r}{dl^2}\right|=\left|\frac{d}{dl}\left(\frac{\dot{r}}{|\dot{r}|}\right)\right|=\frac{1}{|\dot{r}|^2}\left|\ddot{r}-\frac{\langle\dot{r},\ddot{r}\rangle}{|\dot{r}|^2}\dot{r}\right|. \tag{16}$$

Отсюда для кривизны имеем

$$k=\left|\frac{d^2r}{dl^2}\right|=\frac{1}{|\dot{r}|^2}|\eta-\langle\xi,\eta\rangle\xi|, \tag{17}$$

где $\eta=\ddot{r}$, $\xi=\dfrac{dr}{dl}=\dfrac{\dot{r}}{|\dot{r}|}=\dfrac{\dot{v}_t}{|v_t|}$.

Компоненты вектора $w = \frac{d^2r}{dl^2}$ имеют вид

$$w = \frac{1}{|\dot r|^2}\left(\ddot x - \dot x\,\frac{\dot x\ddot x + \dot y\ddot y}{\dot x^2 + \dot y^2}\right)e_1 + \frac{1}{|\dot r|^2}\left(\ddot y - \dot y\,\frac{\dot x\ddot x + \dot y\ddot y}{\dot x^2 + \dot y^2}\right)e_2. \tag{18}$$

Далее,

$$|w|^2 = k^2 = \frac{(\ddot x\dot y - \ddot y\dot x)^2}{(\dot x^2 + \dot y^2)^3}. \tag{19}$$

Итак, мы доказали важную формулу для кривизны.

Теорема 2. *При любом выборе параметра t для кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ имеет место формула*

$$k = \left|\frac{d^2r}{dl^2}\right| = \frac{|\ddot x\dot y - \ddot y\dot x|}{(\dot x^2 + \dot y^2)^{3/2}}, \tag{20}$$

где предполагается, что $\dot x^2 + \dot y^2 = |\dot r|^2 \neq 0$.

Заметим, что в числителе стоит модуль определителя матрицы $\begin{pmatrix}\dot x & \dot y\\ \ddot x & \ddot y\end{pmatrix}$.

2. Пространственные кривые. Кривизна и кручение. Для любой кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, т. е. $r = r(t)$, заданной в евклидовых координатах в трехмерном пространстве, имеем

$$dl = |\dot r|\,dt = |v_t|\,dt = \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}\,dt. \tag{21}$$

Для удобства основных определений мы, как и в случае плоских кривых, рассмотрим первоначально лишь натуральный параметр l, $r = r(l)$, $x = x(l)$, $y = y(l)$, $z = z(l)$. По определению $v = \dot r = \dot x e_1 + \dot y e_2 + \dot z e_3$ и $w = \dot v = \ddot r = \ddot x e_1 + \ddot y e_2 + \ddot z e_3$ (точка здесь означает производную по l, так как $t = l$). Как и в плоском случае, вводим

Определение 2. *Кривизной* пространственной кривой называется модуль ускорения в параметре l: $k = |w| = |\ddot r|$. *Радиусом кривизны* называется величина, обратная кривизне: $R = k^{-1}$.

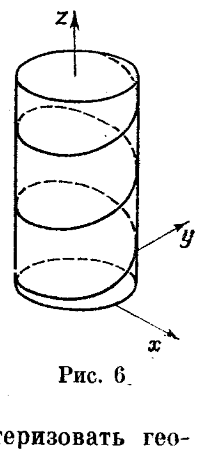

Рис. 6.

Мы знаем из леммы 1, что векторы скорости и ускорения ортогональны: $v \perp w$, так как $|v| \equiv 1$. Однако в трехмерном случае векторов v и w не хватает, чтобы составить полный репер пространства, даже если $w \neq 0$. Кроме того, наглядно очевидно, что одной кривизны в трехмерном пространстве не хватает для того, чтобы охарактеризовать геометрические свойства кривой. Представьте себе, например, кривую, намотанную на цилиндр:

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad z = t$$

(винтовую линию). Кроме кривизны, она еще закручивается по третьему направлению (рис. 6). Третий вектор базиса можно взять ортогональным к v и w.

Напомним, что в линейной алгебре трехмерного евклидова пространства имеется важная операция векторного произведения векторов. Если ξ, η — векторы в трехмерном пространстве,

$$\xi = \xi^i e_i, \quad \eta = \eta^i e_i, \tag{22}$$

где e_i — базисные орты ($e_i \perp e_j$, $|e_i| = 1$), то мы можем построить вектор $\gamma = [\xi, \eta]$, $\gamma = \gamma^i e_i$, положив $\gamma^1 = \xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^2$, $\gamma^2 = \xi^3\eta^1 - \xi^1\eta^3$, $\gamma^3 = \xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1$. Другими словами, $\pm\gamma^i$ равно определителю части матрицы $\begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \\ \eta^1 & \eta^2 & \eta^3 \end{pmatrix}$, остающейся после вычеркивания i-го столбца. Мы видим, что

$$\begin{gathered} [\xi, \eta] = -[\eta, \xi], \ [\xi_1 + \xi_2, \eta] = [\xi_1, \eta] + [\xi_2, \eta], \\ [\lambda\xi, \eta] = \lambda[\xi, \eta]. \end{gathered} \tag{23}$$

Верно также тождество Якоби

$$[[\xi, \eta], \zeta] + [[\zeta, \xi], \eta] + [[\eta, \zeta], \xi] = 0. \tag{24}$$

Далее, из аналитической геометрии известны такие свойства векторного произведения: вектор $[\xi, \eta]$ направлен перпендикулярно к плоскости, натянутой на векторы (ξ, η), т. е. к плоскости векторов вида $\lambda\xi + \mu\eta$, а длина его равна

$$|[\xi, \eta]| = |\xi|\,|\eta| \sin\varphi,$$

где φ — угол между ξ и η,

$$\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi = \frac{\langle\xi, \eta\rangle^2}{|\xi|^2\,|\eta|^2}. \tag{25}$$

Замечание. Если векторы ξ и η лежат в плоскости (x, y), то их векторное произведение ортогонально к этой плоскости (т. е. направлено по оси z), и $[\xi, \eta] = (\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1)e_3$. Тогда длина $|[\xi, \eta]|$ равна $|\xi^1\eta^2 - \eta^1\xi^2| = |\xi|\,|\eta| \sin\varphi$.

Полученную в предыдущем пункте формулу (20) для кривизны плоской кривой можно теперь переписать так:

$$k = \frac{|\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{|[\dot{r}, \ddot{r}]|}{|\dot{r}|^3} \tag{26}$$

для произвольного параметра t.

Таким образом, общая формула кривизны плоской кривой выражает кривизну через длину векторного произведения $[\dot{r}, \ddot{r}]$. Так как кривизна связана с вращением репера (v, n) по формулам Френе, то с кривизной естественно связывается вектор угловой скорости вращения репера (v, n), направленный ортогонально к плоскости (x, y). Вернемся к пространственной кривой $r =$

$=r(l)$, $r=(x,\ y,\ z)$, $x=x(l)$, $y=y(l)$, $z=z(l)$. Для нее

$$v(l)=\frac{dr}{dl},\quad w(l)=\frac{d^2r}{dl^2}. \tag{27}$$

Мы считаем, что $|w|\neq 0$ и $|v|\neq 0$ (такие точки называются *невырожденными точками кривой*). Предположим, что $|v|\equiv 1$; тогда $\langle w,\ v\rangle=0$, т. е. $w\perp v$. Рассмотрим вектор $b=[v,\ n]$, где $n=\frac{w}{|w|}$. Вектор n называется *главной нормалью* кривой, вектор b — *бинормалью*. Мы видим, что $|b|=|v||n|\sin\varphi=1$, $b\perp v$, $b\perp n$. Мы получаем ортонормированный репер $(v,\ n,\ b)$ в точке кривой, где $w\neq 0$ (в невырожденной точке).

Как и для случая скалярного произведения, нам будет полезно следующее утверждение.

Лемма 2. *Если заданы два вектора $\xi(t)$, $\eta(t)$ в трехмерном пространстве, то имеет место формула типа Лейбница*

$$\frac{d}{dt}[\xi,\ \eta]=\left[\frac{d\xi}{dt},\ \eta\right]+\left[\xi,\ \frac{d\eta}{dt}\right]. \tag{28}$$

Это непосредственно следует из обычной формулы Лейбница для дифференцирования произведения функций: $(fg)^{\cdot}=\dot{f}g+f\dot{g}$. Следует обратить внимание на порядок сомножителей в правой части формулы (28).

Теорема 3. *Для любой пространственной кривой $r=r(l)$, где l — натуральный параметр, имеют место следующие формулы Френе*:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dl}&=kn,\\ \frac{dn}{dl}&=-\varkappa b-kv,\\ \frac{db}{dl}&=\varkappa n.\end{aligned} \tag{29}$$

Здесь первая строчка есть просто определение числа k, а $|\varkappa|=\left|\frac{db}{d}l\right|$; число $\varkappa$ называется *кручением* пространственной кривой (оно не обязательно положительно).

В плоском случае $b=\mathrm{const}$, и поэтому $|\varkappa|=\left|\frac{db}{dl}\right|=0$.

Формулы Френе можно переписать в матричном виде в репере $(v,\ n,\ b)$. Обозначив $v=e_1$, $n=e_2$, $b=e_3$, имеем

$$\frac{de_i}{dl}=b_i^je_j\quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3), \tag{30}$$

причем матрица $B=\left(b_i^j\right)$ имеет вид

$$B=\begin{pmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & -\varkappa\\ 0 & \varkappa & 0\end{pmatrix}. \tag{31}$$

Мы видим, что эта матрица, как и подобная матрица в двумерном случае, кососимметрична.

Перейдем к доказательству формул Френе для пространственных кривых. Выведем сначала формулу $\frac{db}{dl} = \varkappa n$. Так как $b = [v, n]$, то $[v, n]^{\cdot} = \dot{b} = [\dot{v}, n] + [v, \dot{n}]$ в силу леммы 2. Так как $|v| = 1$ и $|n| = 1$, то $\dot{v} \perp v$ и $\dot{n} \perp n$. Поэтому $\dot{v} = kn$, $\dot{n} = \alpha v + \beta b$, где α и β — какие-то неизвестные числа. Так как $[n, n] = 0$ и $[v, v] = 0$, то $[\dot{v}, n] = 0$ и $[v, \dot{n}] = \beta[v, b] = -\beta n$. Поэтому

$$\frac{db}{dl} = \frac{d}{dl}[v, n] = -\beta n = \varkappa n, \tag{32}$$

где $\varkappa$ определяется из этого равенства.

Итак, $\dot{b} = \varkappa n$. Вычислим $\dot{n}$. Так как $n = [b, v]$, то

$$\frac{d}{dl}[b, v] = [\dot{b}, v] + [b, \dot{v}] = \varkappa b - kv.$$

Теорема доказана.

В заключение следует отметить, что кривизна и кручение — полный набор геометрических инвариантов кривой в евклидовом пространстве. Более точно:

1) Если для плоской кривой известна зависимость $k = k(l)$, то эта кривая однозначно восстанавливается с точностью до движения плоскости. Уравнение $k = k(l)$ называется *натуральным уравнением кривой.*

2) Если для пространственной кривой известны функции $k = k(l)$, $\varkappa = \varkappa(l)$, то можно восстановить кривую с точностью до движения всего пространства. Эта пара уравнений называется натуральным уравнением пространственной кривой.

Доказательства этих теорем можно прочесть в учебнике П. К. Рашевского ([2]).

3. Ортогональные преобразования, зависящие от параметра. Пусть $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$, — ортогональная матрица (см. § 4), т. е.

$$A^{\mathsf{T}} A = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \tag{33}$$

причем все a_{ij} — функции параметра t. Пусть, далее, $a_{ij}(0) = \delta_{ij}$, т. е. $A(0) = 1$. Имеет место

Лемма 3. *Матрица* $B = \left(\frac{dA}{dt}\right)\Big|_{t=0}$ *кососимметрична, если* $A(0) = 1$.

Доказательство. Продифференцируем обе части равенства (33) по t. Получим

$$0 = \frac{d}{dt}\delta_{ih} = \sum_{i=1}^{n} (\dot{a}_{ij} a_{ik} + a_{ij} \dot{a}_{ik}).$$

Положим теперь $t=0$. Так как $a_{ij}(0)=\delta_{ij}$, то мы получим

$$0=\sum_{i=1}^{n}(\dot{a}_{ij}\delta_{ik}+\delta_{ij}\dot{a}_{ik})=b_{kj}+b_{jk},$$

что и требовалось доказать.

Из этой леммы можно сразу получить новое доказательство формул Френе. Пусть $e_1(l)=v(l)$, $e_2(l)=n(l)$, $e_3(l)=b(l)$ — зависящий от натурального параметра l репер, связанный с данной пространственной кривой. Тогда репер $e_1(l+\Delta l)$, $e_2(l+\Delta l)$, $e_3(l+\Delta l)$ получается из репера $e_1(l)$, $e_2(l)$, $e_3(l)$ ортогональным преобразованием, так как оба эти репера ортонормированы:

$$\begin{gathered} e_i(l+\Delta l)=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}(l,\Delta l)\,e_j(l)\quad (i=1,2,3),\\ \sum_{i=1}^{3}a_{ij}(l,\Delta l)\,a_{ik}(l,\Delta l)=\delta_{jk}. \end{gathered}\tag{34}$$

Дифференцируя равенство (34) по Δl и полагая $\Delta l=0$, мы получаем

$$\dot{e}_i(l)=\sum_{j=1}^{3}b_{ij}e_j(l),\tag{35}$$

где матрица (b_{ij}) кососимметрична в силу леммы 3. Поэтому матрица $B=(b_{ij})$ имеет вид

$$B=\begin{pmatrix}0 & b_{12} & b_{13}\\ -b_{12} & 0 & b_{23}\\ -b_{13} & -b_{23} & 0\end{pmatrix},\quad b_{ij}=-b_{ji}.\tag{36}$$

По определению

$$\dot{e}_1=\frac{de_1}{dl}=\frac{dv}{dl}=kn=ke_2,$$

поэтому $b_{12}=k$, $b_{13}=0$. Значит, $b_{21}=-k$, $b_{31}=0$, и матрица B имеет такой вид:

$$B=\begin{pmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & -b_{32}\\ 0 & b_{32} & 0\end{pmatrix}.$$

Обозначив здесь $\varkappa=b_{32}$, мы получаем формулы Френе (29).

Для плоского случая доказательство проводится аналогично.

Задачи. 1. Для винтовой линии $r=\{a\cos t,\ a\sin t,\ bt\}$, $a>0$, $b\neq 0$, найти репер Френе, кривизну и кручение.

2. Найти кривизну и кручение кривых:

а) $r=e^t\{\sin t,\ \cos t,\ 1\}$;

б) $r=a\{\operatorname{ch} t,\ \operatorname{sh} t,\ t\}$.

3. Найти кривизну эллипса в вершинах, если его полуоси равны a и b.

4. Найти кривизну и кручение кривых:

а) $r = \{t^2\sqrt{3}/2,\ 2-t,\ t^3\}$,
б) $r = \{3t - t^3,\ 3t^2,\ 3t + t^3\}$.

5. Доказать, что если у кривой кривизна $k(l) \equiv 0$, то кривая является прямой линией.

6. Доказать, что если кручение кривой $\varkappa(l) \equiv 0$, то кривая лежит в плоскости. Найти уравнение этой плоскости.

7. Описать класс кривых с постоянной кривизной и кручением: $k(l) \equiv \mathrm{const}$, $\varkappa(l) \equiv \mathrm{const}$.

8. Описать класс кривых с постоянным кручением: $\varkappa(l) = \mathrm{const}$.

9. Доказать, что кривая $r = r(t)$ плоская тогда и только тогда, когда смешанное произведение $(\dot r, \ddot r, \dddot r) = 0$.

10. Пусть S — площадь между плоской кривой и секущей на расстоянии h от касательной (и параллельной касательной). Выразить $\lim\limits_{h\to 0} \frac{S^2}{h^3}$ через кривизну кривой.

11. Доказать, что для гладкой замкнутой кривой

$$\int (r\,dk - \varkappa b\,dl) = 0.$$

12. Доказать, что формулы Френе можно представить в виде

$$\dot v = [\zeta, v], \quad \dot n = [\zeta, n], \quad \dot b = [\zeta, b].$$

Найти вектор ζ (вектор Дарбу).

13. Решить уравнение $r' = [\omega, r]$, $\omega = \mathrm{const}$.

14. Доказать, что кривизна и кручение пропорциональны: $k = c \cdot \varkappa$ $(k \neq 0)$, где c — константа, в том и только том случае, если найдется такой постоянный вектор u, что $\langle u, r\rangle = \mathrm{const}$.

15. Пусть нормальные плоскости к кривой, натянутые на векторы n, b, проходят через фиксированную точку x_0. Показать, что кривая лежит на сфере с центром в этой точке.

16. Доказать, что кривая лежит на сфере радиуса r в том и только том случае, если справедливо соотношение

$$r^2 = \frac{1}{k^2}\left(1 + \frac{(k')^2}{(\varkappa k)^2}\right).$$

17. Доказать, что $\varkappa = -(\dot r, \ddot r, \dddot r)/|[\dot r, \ddot r]|$.

18. Для гладкой кривой $r = r(l)$ рассмотрим кривую $n(l)$ (n — вектор нормали в данной точке), l^* — натуральный параметр на этой кривой. Доказать, что $\frac{dl^*}{dl} = \sqrt{k^2 + \varkappa^2}$.

19. Пусть

$$A = A(l) = \begin{pmatrix} 0 & k(l) & 0 \\ -k(l) & 0 & -\varkappa(l) \\ 0 & \varkappa(l) & 0 \end{pmatrix} = \left(a_j^i(l)\right).$$

Определим векторы $r_j = r_j(l)$ как решения системы уравнений

$$\frac{dr_j}{dl} = a_j^i r_i, \quad j = 1, 2, 3,$$

где $r_1(0)$, $r_2(0)$, $r_3(0)$ — заданный ортонормированный репер.

а) Доказать, что репер $r_1(l)$, $r_2(l)$, $r_3(l)$ ортонормирован при любом l.

б) Пусть $r(l) = r_0 + \int\limits_0^l r_1(l)\,dl$. Доказать, что тогда $r_1(l) = v(l)$, $r_2(l) = n(l)$, $r_3(l) = b(l)$, где v, n, b — касательная, нормаль и бинормаль кривой $r(l)$, причем кривизна и кручение этой кривой равны $k(l)$, $\varkappa(l)$.

20. Пусть кривая лежит на сфере и имеет постоянную кривизну. Доказать, что кривая — окружность.

§ 6. Псевдоевклидовы пространства

1. Простейшие понятия специальной теории относительности. Напомним, что псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^n_{p,q}$, $p+q=n$, определяется как пространство с координатами $x^1, \ldots, x^n$, в которых «квадрат длины» вектора $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ задается формулой

$$|\xi|^2 = \langle \xi, \xi \rangle = \sum_{i=1}^{p} (\xi^i)^2 - \sum_{i=1}^{q} (\xi^{p+i})^2 \tag{1}$$

(см. § 3, п. 2). При $n=4$, $p=1$ получаем *пространство-время специальной теории относительности* (пространство Минковского $\mathbb{R}^4_{1,3} = \mathbb{R}^4_1$) с координатами x^0, x^1, x^2, x^3; обычно полагают $x^0 = ct$, где постоянная c — скорость света в пустоте. Пространства $\mathbb{R}^n_{1,n-1} = \mathbb{R}^n_1$ мы также будем называть пространствами Минковского (размерности n).

Квадрат длины вектора $\xi = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ в пространстве $\mathbb{R}^4_1$ задается формулой

$$|\xi|^2 = \langle \xi, \xi \rangle = (\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2. \tag{2}$$

Величина $\langle \xi, \xi \rangle$ может быть и положительной, и отрицательной, и даже нулем. Векторы ξ, для которых $|\xi| = 0$, образуют в пространстве $\mathbb{R}^4_1$ конус, называемый *изотропным* или *световым* конусом (см. рис. 7 для пространства $\mathbb{R}^3_1$). Векторы, лежащие внутри конуса, имеют положительный квадрат длины, $|\xi|^2 > 0$, и