19. Пусть

$$A = A(l) = \begin{pmatrix} 0 & k(l) & 0 \\ -k(l) & 0 & -\varkappa(l) \\ 0 & \varkappa(l) & 0 \end{pmatrix} = (a_j^i(l)).$$

Определим векторы $r_j = r_j(l)$ как решения системы уравнений

$$\frac{dr_j}{dl} = a_j^i r_i, \quad j = 1, 2, 3,$$

где $r_1(0)$, $r_2(0)$, $r_3(0)$ — заданный ортонормированный репер.

а) Доказать, что репер $r_1(l)$, $r_2(l)$, $r_3(l)$ ортонормирован при любом l.

б) Пусть $r(l) = r_0 + \int\limits_0^l r_1(l)\,dl$. Доказать, что тогда $r_1(l) = v(l)$, $r_2(l) = n(l)$, $r_3(l) = b(l)$, где v, n, b — касательная, нормаль и бинормаль кривой $r(l)$, причем кривизна и кручение этой кривой равны $k(l)$, $\varkappa(l)$.

20. Пусть кривая лежит на сфере и имеет постоянную кривизну. Доказать, что кривая — окружность.

§ 6. Псевдоевклидовы пространства

1. Простейшие понятия специальной теории относительности. Напомним, что псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^n_{p,q}$, $p + q = n$, определяется как пространство с координатами $x^1, \ldots, x^n$, в которых «квадрат длины» вектора $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ задается формулой

$$|\xi|^2 = \langle \xi, \xi \rangle = \sum_{i=1}^{p} (\xi^i)^2 - \sum_{i=1}^{q} (\xi^{p+i})^2 \tag{1}$$

(см. § 3, п. 2). При $n = 4$, $p = 1$ получаем *пространство-время специальной теории относительности* (пространство Минковского $\mathbb{R}^4_{1,3} = \mathbb{R}^4_1$) с координатами x^0, x^1, x^2, x^3; обычно полагают $x^0 = ct$, где постоянная c — скорость света в пустоте. Пространства $\mathbb{R}^n_{1,n-1} = \mathbb{R}^n_1$ мы также будем называть пространствами Минковского (размерности n).

Квадрат длины вектора $\xi = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ в пространстве $\mathbb{R}^4_1$ задается формулой

$$|\xi|^2 = \langle \xi, \xi \rangle = (\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2. \tag{2}$$

Величина $\langle \xi, \xi \rangle$ может быть и положительной, и отрицательной, и даже нулем. Векторы ξ, для которых $|\xi| = 0$, образуют в пространстве $\mathbb{R}^4_1$ конус, называемый *изотропным* или *световым* конусом (см. рис. 7 для пространства $\mathbb{R}^3_1$). Векторы, лежащие внутри конуса, имеют положительный квадрат длины, $|\xi|^2 > 0$, и называются *времениподобными*. Векторы, лежащие вне конуса, имеют отрицательный квадрат длины, $|\xi|^2<0$, и называются *пространственноподобными*. На рис. 7 ξ_+ — времениподобный вектор, ξ_- — пространственноподобный; вектор ξ_0 лежит на изотропном конусе и имеет нулевую длину — такие векторы также называются *изотропными* или *световыми*.

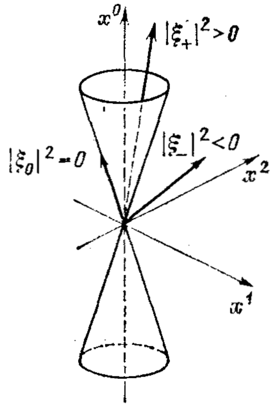

Рис. 7. Изотропный конус в пространстве $\mathbb{R}^3_1$: $(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2=0$

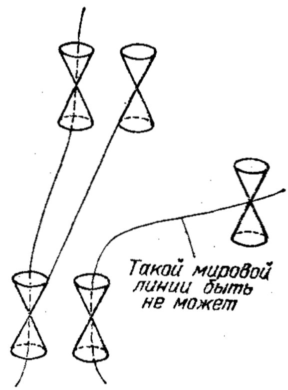

Рис. 8. Мировые линии массивных и безмассивных частиц

Рассмотрим мировую линию какой-нибудь материальной частицы (см. § 1, п. 1). Эта мировая линия имеет вид

$$x_0=ct,\quad x^1=x^1(t),\quad x^2=x^2(t),\quad x^3=x^3(t) \tag{3}$$

в пространстве $\mathbb{R}^4_1$. Здесь кривая $x^1(t)$, $x^2(t)$, $x^3(t)$ есть обычная траектория точки в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. Вектор ξ, касательный к мировой линии (3), имеет вид

$$\xi=(c,\ \dot{x}^1,\ \dot{x}^2,\ \dot{x}^3). \tag{4}$$

Заметим, что $(\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3)$ — координаты вектора скорости v для пространственного движения точки. В специальной теории относительности принимается постулат, что материальные частицы не могут двигаться со скоростью, большей скорости света c, т. е. $|v|\leqslant c$. Это означает, что

$$c^2-(\dot{x}^1)^2-(\dot{x}^2)^2-(\dot{x}^3)^2\geqslant 0, \tag{5}$$

т. е. вектор ξ или времениподобный, или изотропный. В частности, если наша мировая линия есть мировая линия луча света, то вектор ξ изотропный, т. е. $|v|=c$. По этой причине изотропный конус и называется также световым. В действительности изотропные касательные векторы могут иметь только мировые линии безмассовых частиц (таких как, например, фотоны). Мировые линии массивных частиц имеют всегда времениподобные касательные векторы. В частности, мировая линия массивной частицы целиком распространяется строго внутри светового конуса (рис. 8; заметим, что изотропный конус имеется во всех точках пространства). Для времениподобных кривых (т. е. для таких кривых, у которых касательный вектор всегда времениподобен) можно определить понятие длины аналогично тому, как это было в евклидовой геометрии. Если кривая задана в виде $x^0=x^0(\tau)$, $x^1=x^1(\tau)$, $x^2=x^2(\tau)$, $x^3=x^3(\tau)$, $\xi=(\dot{x}^0, \dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3)$, $|\xi|^2>0$, то длина l имеет вид

$$l=\int_a^b |\xi|\,d\tau=\int_a^b \sqrt{(\dot{x}^0)^2-\sum_{\alpha=1}^{3}(\dot{x}^\alpha)^2}\,d\tau. \tag{6}$$

В специальной теории относительности величина l/c называется собственным временем, прожитым частицей. Параметр l является натуральным параметром на мировой линии.

Если точка движется в трехмерном пространстве с постоянной скоростью $v=(v^1, v^2, v^3)$, т. е.

$$x^0=ct, \quad x^1=v^1t, \quad x^2=v^2t, \quad x^3=v^3t, \tag{7}$$

то имеем

$$dl=\sqrt{c^2-v^2}\,dt=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dx^0, \quad l=x^0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \tag{8}$$

где мы используем сокращенное обозначение $v^2=|v|^2$.

В частности, x^0/c есть собственное время покоящейся частицы (в исходной системе координат).

2. Преобразования Лоренца. Мы видели выше (см. § 4, п. 4), что в классической (ньютоновской) механике время носит абсолютный характер, т. е. величина промежутка времени Δt между событиями не зависит от того, в какой инерциальной системе отсчета этот промежуток измеряется. Инерциальные системы отсчета классической механики получались одна из другой преобразованием Галилея (4.64).

В специальной теории относительности преобразования Галилея заменяются преобразованиями Лоренца. Переход к другой системе отсчета — это выбор новых координат в пространстве $\mathbb{R}^4_1$, т. е. некоторое преобразование пространства Минковского. Преобразование Лоренца сохраняет начало координат и пространственновременной интервал, т. е. квадратичную форму $dl^2=c^2(dt)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2$. Переход к другой инерциальной системе отсчета осуществляется движением псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^4_1$. Полная группа этих движений называется *группой Пуанкаре*.

Начнем с изучения группы движений псевдоевклидовой плоскости $\mathbb{R}^2_1$. Пусть сперва движение оставляет неподвижным начало координат. Тогда оно задается матрицей A:

$$\begin{aligned} x^0 &= \mathrm{a}x'^0 + \mathrm{b}x'^1, \\ x^1 &= \mathrm{c}x'^0 + \mathrm{d}x'^1. \end{aligned} \tag{9}$$

Если координаты x^0, x^1 псевдоевклидовы, то метрика имеет в них вид $g_{\alpha\beta} = \{g_{00} = 1,\ g_{11} = -1,\ g_{12} = g_{21} = 0\}$. Так как преобразование (9) является движением, то

$$(g_{\alpha\beta}) = G = A^{\mathsf{T}} G A. \tag{10}$$

Так как $\det A^{\mathsf{T}} = \det A$ и определитель произведения матриц равен произведению определителей, то

$$(\det A)^2 = 1, \quad \det A = \pm 1.$$

Из (10) вытекает система из трех уравнений для элементов матрицы A:

$$\mathrm{a}^2 - \mathrm{c}^2 = 1, \quad \mathrm{ab} - \mathrm{cd} = 0, \quad \mathrm{b}^2 - \mathrm{d}^2 = -1. \tag{11}$$

Ясно, что $\mathrm{a} \neq 0$. Положим $\beta = \mathrm{c}/\mathrm{a}$. Прямое вычисление дает

$$\mathrm{a} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathrm{c} = \pm\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathrm{b} = \pm\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathrm{d} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{12}$$

Здесь знак a совпадает со знаком c, а знак b — со знаком d. Итак, группа всех преобразований A, являющихся движениями псевдоевклидовой метрики в пространстве $\mathbb{R}^2_1$, состоит из следующих матриц:

$$A = \pm\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, & \pm\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, & \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Введем угол гиперболического поворота ψ, положив $\beta = \operatorname{th}\psi$. Тогда

$$A = \pm\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi, & \pm\operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi, & \pm\operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}, \tag{14}$$

т. е. мы получаем группу гиперболических поворотов. Любой гиперболический поворот переводит изотропный конус $|\xi|^2 = 0$ в себя. Кроме того, если $|\xi|^2 = 1$, то $|A\xi|^2 = 1$. Векторы, имеющие единичную длину, образуют в $\mathbb{R}^2_1$ «псевдосферу единичного радиуса». Эта псевдосфера задается в $\mathbb{R}^2_1$ уравнением $(x^0)^2 - (x^1)^2 = 1$ и является гиперболой (рис. 9).

Напомним, что группа ортогональных преобразований евклидовой плоскости состояла из двух связных компонент; собственных и несобственных преобразований. Группа движений псевдоевклидовой плоскости $\mathbb{R}_1^2$ устроена более сложно: она состоит из четырех связных компонент (из четырех кусков):

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & -\operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & -\operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi \\ -\operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\psi & -\operatorname{sh}\psi \\ -\operatorname{sh}\psi & -\operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Преобразования из первой связной компоненты можно соединить кривой с единичным (т. е. тождественным) преобразованием. Матрицы преобразований 1, P, T, PT, принадлежащих четырем различным связным компонентам, имеют вид

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad PT = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Преобразования из первой и второй связных компонент не меняют направления времени t. Такие преобразования называются *ортохронными*. Таким образом, связная компонента единицы состоит из собственных (с определителем $+1$) ортохронных преобразований.

Рассмотренная нами группа движений псевдоевклидовой плоскости $\mathbb{R}_1^2$, сохраняющих начало координат, обозначается через $O(1, 1)$. Это частный случай группы $O(p, q)$, $p+q=n$, псевдоортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}_{p,q}^n$. Таким образом, $O(p, q)$ есть группа матриц A, сохраняющих скалярное произведение (1):

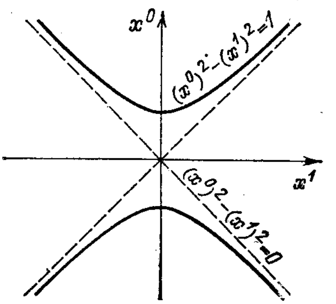

Рис. 9

$$\langle A\xi, A\eta\rangle = \langle \xi, \eta\rangle = \xi^1\eta^1 + \ldots + \xi^p\eta^p - \ldots - \xi^n\eta^n. \tag{16}$$

Особо важны группы $O(1, n-1)$ — движения n-мерного пространства Минковского $\mathbb{R}_1^n$, сохраняющие начало координат. Мы видели, что группа $O(1, 1)$ состоит из четырех кусков (четырех компонент связности). В действительности из четырех кусков состоит и группа $O(1, n-1)$; мы не доказываем здесь этого утверждения и ограничиваемся более слабым его вариантом.

Лемма 1. *Существует гомоморфизм*) φ группы $O(1, n-1)$ на группу $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Здесь $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ — прямая сумма циклических групп второго порядка $\mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\}$.*

---

*) Напомним, что гомоморфизм φ группы G_1 в группу G_2 — это отображение φ: $G_1 \to G_2$ такое, что $\varphi(1) = 1$, $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\,\varphi(g_2)$ и $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$. Часто гомоморфизм φ называют «представлением» группы G_1 в группе G_2.

Доказательство. Пусть e_0 — единичный вектор вдоль оси x^0. Если матрица $A \in O(1, n-1)$, то положим

$$\varphi(A) = (\det A,\ \operatorname{sgn}\langle e_0, Ae_0\rangle). \tag{17}$$

Заметим, что скалярное произведение $\langle e_0, Ae_0\rangle$ не равно нулю, так как вектор Ae_0 времениподобен:

$$\langle Ae_0, Ae_0\rangle = \langle e_0, e_0\rangle = 1. \tag{18}$$

Предоставляем читателю проверить гомоморфность отображения φ.

Преобразования A такие, что $\varphi(A) = (1, 1)$, называются *собственными*. Преобразования, у которых $\operatorname{sgn}\langle e_0, Ae_0\rangle = +1$, называются, как и прежде, ортохронными (они не меняют направления времени t). Ядро*) гомоморфизма φ состоит из собственных преобразований и является связной компонентой единицы группы $O(1, n-1)$. Этого мы здесь не доказываем; из доказанной леммы следует только, что в группе не меньше четырех компонент связности.

Полная группа движений псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^n_1$ получается из группы $O(1, n-1)$ добавлением трансляций (сдвигов).

Переформулируем теперь полученные результаты о движениях псевдоевклидова пространства на языке специальной теории относительности. Как уже было сказано, переход от одной инерциальной системы отсчета (ct', x'^1, x'^2, x'^3) к другой (ct, x^1, x^2, x^3) осуществляется преобразованием, сохраняющим квадратичную форму $(ct)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$. Пусть система (x') движется относительно (x) вдоль оси x^1 со скоростью v. Это означает, что $x^2 = x'^2$, $x^3 = x'^3$ и преобразование координат имеет вид

$$\begin{gathered} x^0 = (ct) = \mathrm{a}(ct') + \mathrm{b}x'^1, \\ x^1 = \mathrm{c}(ct') + \mathrm{d}x'^1, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3. \end{gathered} \tag{19}$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix}$ лежит в $O(1, 1)$.

Если скорость v уменьшить до нуля, то преобразование (19) станет тождественным, поэтому матрица A лежит в связной компоненте единицы группы $O(1, 1)$ и имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}. \tag{20}$$

*) Ядром гомоморфизма φ группы G_1 в группу G_2 называется совокупность всех таких элементов g группы G_1, что $\varphi(g) = 1$.

Итак, имеем

$$\begin{aligned} ct &= ct' \operatorname{ch} \psi + x'^1 \operatorname{sh} \psi, \\ x^1 &= ct' \operatorname{sh} \psi + x'^1 \operatorname{ch} \psi. \end{aligned} \tag{21}$$

Рассмотрим движение в системе $K(ct, x^1)$ начала координат O' штрихованной системы. Тогда $x'^1 = 0$ и формулы (21) принимают вид

$$ct = ct' \operatorname{ch} \psi,$$
$$x^1 = ct' \operatorname{sh} \psi$$

или, разделив одно на другое, $x^1/ct = \operatorname{th} \psi$. Но x^1/t есть, очевидно, скорость v системы K' относительно K. Таким образом,

$$\operatorname{th} \psi = v/c. \tag{22}$$

Отсюда

$$\operatorname{sh} \psi = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \operatorname{ch} \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{23}$$

Подставив это в (20), найдем

$$\begin{aligned} t &= \left(t' + \left(\frac{v}{c^2}\right) x'^1\right) \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ x^1 &= \left(x'^1 + vt'\right) \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{24}$$

Эти преобразования и называются преобразованиями Лоренца.

Пусть скорость v мала по сравнению со скоростью света c, т. е. $v/c \ll 1$; из (24) вытекает, что если $v/c \to 0$, то преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея (4.64): $t = t'$, $x^1 = x'^1 + vt$. Иными словами, при малых взаимных скоростях систем отсчета формулы теории относительности переходят в формулы классической механики. Однако в области больших скоростей (сравнимых со скоростью света) начинаются глубокие расхождения этих двух теорий. Эти принципиальные расхождения мы проиллюстрируем на следующих популярных эффектах теории относительности: сокращение линейных размеров в направлении вектора скорости и отставание часов (связанное с тем, что одновременные в одной системе отсчета события в другой системе становятся разновременными).

Пусть в системе K покоится твердый стержень длины l, параллельный оси x^1; пусть координаты его концов в K равны x_1^1, x_2^1, т. е. $l = x_2^1 - x_1^1$. Найдем теперь длину этого стержня *) в системе K'. Для этого найдем координаты его концов x'^1_1 и x'^1_2

*) Предостережем читателя, что длиной стержня является не четырехмерная инвариантная величина, а длина трехмерной проекции.

в системе K'; имеем в момент времени t'

$$x_1^1 = \frac{x_1'^1 + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x_2^1 = \frac{x_2'^1 + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{25}$$

Длина стержня l' в системе K' равна $l' = x_2'^1 - x_1'^1$. Вычитая x_1^1 из x_2^1, получаем

$$l = \frac{l'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{26}$$

Таким образом, самую большую длину стержень имеет в той системе отсчета, где он покоится. Длина его в системе, в которой он движется со скоростью v, уменьшится в отношении $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (лоренцево сокращение).

Перейдем к изучению временно́й координаты t. Пусть в системе K произошли два одновременных события A_1 и A_2 (т. е. $t(A_1) = t(A_2)$ в системе K), причем пусть событие A_1 произошло в точке с координатами (x_1^1, x_1^2, x_1^3), а A_2 — в точке с координатами (x_2^1, x_2^2, x_2^3), $x_1^1 \neq x_2^1$. Что происходит в движущейся системе отсчета K' с точки зрения наблюдателя, находящегося в системе K? Из формул преобразования Лоренца (24) имеем

$$t(A_1) = \frac{t'(A_1) + (v/c^2)\, x_1'^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = t(A_2) = \frac{t'(A_2) + (v/c^2)\, x_2'^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

т. е. $t'(A_1) - t'(A_2) = \frac{v}{c^2}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\left(x_2'^1 - x_1'^1\right) \neq 0$. Поэтому $t'(A_1) \neq t'(A_2)$, т. е. два события A_1 и A_2, одновременные в K, оказываются не одновременными в K'.

Заметим, что если $t(A_1) > t(A_2)$ и $x_2'^1 - x_1'^1$ не мало, то мы получим, что $t'(A_1) < t'(A_2)$, т. е. на первый взгляд кажется, что следствие предшествует причине. Предлагаем читателю разобраться в этом мнимом парадоксе самостоятельно.

Пусть в системе K' покоятся часы. Возьмем в качестве событий A_1 и A_2 два события, происшедших в одном месте x'^1, x'^2, x'^3 пространства в системе K'. Время в системе K' между этими событиями есть временной интервал $\Delta t' = t_2' - t_1'$. Найдем теперь время Δt, которое прошло между теми же событиями в системе K. Из (24) имеем

$$t_1 = \frac{t_1' + (v/c^2)\, x'^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t_2 = \frac{t_2' + (v/c^2)\, x'^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

или, вычитая одно из другого,

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{27}$$

Мы получили, что $\Delta t > \Delta t'$. Другими словами, движущиеся часы идут медленнее неподвижных, т. е. часы в системе K' с точки зрения наблюдателя в системе K отстают по сравнению с его часами.

Разберем важный вопрос о сложении параллельных скоростей. Пусть точка P в системе K' движется относительно этой системы вдоль оси x'^1 со скоростью w'. Какова скорость точки P относительно системы K? Ясно, что $w' = \frac{dx'^1}{dt'}$, $w = \frac{dx^1}{dt}$,

$$dt = \frac{dt' + (v/c^2)\,dx'^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad dx^1 = \frac{v\,dt' + dx'^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad w = \frac{dx^1}{dt} = \frac{v + w'}{1 + vw'/c^2}.$$

Если v, $w' \ll c$, то $w \approx w' + v$, и мы получаем обычную формулу для сложения скоростей в классической механике. Отметим, что если $w' = c$, то для любой скорости $v < c$ скорость w точки P в системе K имеет вид $\frac{v + c}{1 + vc/c^2} = c$, т. е. добавление к скорости света c любой скорости v не меняет скорости света.

Задачи. 1. Определим «векторное произведение» в пространстве $\mathbb{R}^3_{1,2}$, полагая

$$\xi \times \eta = (\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1, \quad \xi^0\eta^2 - \xi^2\eta^0, \quad \xi^1\eta^0 - \xi^0\eta^1),$$

где $\xi = (\xi^0, \xi^1, \xi^2)$, $\eta = (\eta^0, \eta^1, \eta^2)$.

а) Проверить, что для базисных векторов e_0, e_1, e_2 (e_0 времениподобен) попарные векторные произведения имеют вид

$$e_0 \times e_1 = -e_2, \quad e_0 \times e_2 = e_1, \quad e_1 \times e_2 = e_0.$$

б) Доказать, что $\times$ — билинейная антисимметричная операция, причем справедливо тождество Якоби

$$\xi_1 \times (\xi_2 \times \xi_3) + \xi_3 \times (\xi_1 \times \xi_2) + \xi_2 \times (\xi_3 \times \xi_1) = 0.$$

в) Доказать, что так определенное векторное произведение инвариантно относительно собственных преобразований Лоренца.

2. Пусть $r = r(l)$ — времениподобная кривая в $\mathbb{R}^3_{1,2}$, причем $(\dot r(l))^2 = (\dot r^0)^2 - (\dot r^1)^2 - (\dot r^2)^2 \equiv 1$ и $\dot r^0 > 0$. Введем векторы v, n, b, полагая $v = \dot r$, $\dot v = kn$, $b = n \times v$. Доказать псевдоевклидов аналог формул Френе:

$$\dot v = kn, \quad \dot n = kv - \varkappa b, \quad \dot b = \varkappa n.$$

3. Вывести аналог леммы (5.3) о производной лоренцева преобразования (в $\mathbb{R}^3_{1,2}$), зависящего от параметра.

4. Решить в $\mathbb{R}^3_{1,2}$ уравнение: $\dot r = \omega \times r$, ω — постоянный вектор.

5. Доказать, что ортогональное дополнение времениподобного вектора в $\mathbb{R}^{n+1}_{1,n}$ есть пространственноподобная гиперплоскость. Каким может быть ортогональное дополнение пространственноподобного вектора? светового?