Глава 2

ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 7. Геометрия на поверхности в пространстве

1. Координаты на поверхности. Поверхности в трехмерном пространстве — это простейший объект, на котором возникает, как говорят, внутренняя геометрия. Что это значит?

Мы изучали линии и их метрические инварианты на плоскости и в пространстве. Но эти инварианты (кривизна и кручение) являются инвариантами расположения линии — это понятия внешней геометрии. Никаких внутренних метрических инвариантов на линии не бывает. Это означает, что вдоль линии можно выбрать натуральный параметр, в котором длина отрезка (по линии) между точками измеряется так же, как на прямой:

$$l=\int_{t_0}^{t_1}|v_t|\,dt, \qquad v_t=\dot{r}=(\dot{x},\dot{y},\dot{z}).$$

Для поверхностей это уже не так: никаким образом нельзя задать координаты на сфере (даже на куске сферы) так, чтобы формулы длин в этих координатах были такими же, как формулы длины в декартовых координатах (x, y) на евклидовой плоскости.

Каким образом задаются поверхности? Есть три способа задания поверхностей в трехмерном пространстве:

1) Простейший — это определить ее как график функции

$$z=f(x, y).$$

2) Более общий — уравнением

$$F(x, y, z)=0.$$

3) Параметрический (по аналогии с кривыми): $r=r(u, v)$ или, подробнее, $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, $z=z(u, v)$, где u, v — параметры, пробегающие какую-либо область в плоскости (u, v).

Определение 1. Мы будем говорить, что уравнение $F(x, y, z)=0$ задает поверхность, *неособую в точке* $P=(x_0, y_0, z_0)$, где $F(x_0, y_0, z_0)=0$, если градиент функции F в точке P отличен от нуля:

$$\frac{\partial F}{\partial x}e_1+\frac{\partial F}{\partial y}e_2+\frac{\partial F}{\partial z}e_3\neq 0 \text{ при } x=x_0,\quad y=y_0,\quad z=z_0.$$

Согласно теореме о неявных функциях, если, скажем, $\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{x_0,y_0,z_0}\neq 0$, то можно решить уравнение $F(x, y, z)=0$ около точки $P=(x_0, y_0, z_0)$ относительно z, т. е. найти функцию $z=f(x, y)$, для которой $f(x_0, y_0)=z_0$ и $F(x, y, f(x, y))=0$ в некоторой области плоскости (x, y), окружающей точку (x_0, y_0). Дифференцируя равенство $F(x, y, z)=0$, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0,$$

и, значит,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}.$$

Следовательно, поверхность, заданную уравнением $F(x, y, z)=0$, в окрестности неособой точки можно задать в виде графика. Поэтому локально, около неособой точки, всегда можно задать поверхность параметрически: $z=f(u, v)$, $x=u$, $y=v$ (около точки $x_0=u_0$, $y_0=v_0$). Иначе говорят так: около неособой точки можно задать локальные координаты (u, v).

Наоборот, пусть поверхность $r=r(u, v)$ задана параметрически:

$$x=x(u, v),\quad y=y(u, v),\quad z=z(u, v).$$

Определение 2. Точка $P=(x_0, y_0, z_0)=(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ называется неособой, если матрица

$$A=\left.\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\right|_{u_0,v_0}$$

имеет ранг два.

Теорема 1. *Если поверхность задана параметрически и точка $P=(u_0, v_0)$ неособа, то около этой точки поверхность можно задать уравнением $F(x, y, z)=0$, где $F(x_0, y_0, z_0)=0$ и* $\operatorname{grad} F|_{x_0,y_0,z_0}\neq 0$.

Доказательство. По определению неособой точки ранг матрицы A равен двум. Пусть для определенности детерминант

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\neq 0.$$

Напомним теорему об обратном отображении. Пусть $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, якобиан в точке (u_0, v_0) не равен нулю, и $x_0=x(u_0, v_0)$, $y_0=y(u_0, v_0)$. Тогда в некоторой окрестности точки

(x_0, y_0) можно найти обратное отображение

$$u=u(x,y), \quad u_0=u(x_0,y_0), \quad v=v(x, y), \quad v_0=v(x_0, y_0),$$

причем матрица $\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}$ обратна матрице $\begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix}$. Пользуясь этой теоремой, мы найдем выражения $u(x, y)$, $v(x, y)$; затем, подставив их в выражение для z, мы получим функцию $z(u(x, y), v(x, y))$, для которой $z_0 = z(u_0, v_0) = z(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$. Получаем локальное представление поверхности в виде графика $z = f(x, y)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$, около неособой точки x_0, y_0, z_0. Теорема доказана.

Вывод состоит в том, что локально, около неособой точки $P = (x_0, y_0, z_0)$ на поверхности, все три способа задания поверхностей (гладкими функциями) эквивалентны.

Примеры. 1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (эллипсоид); а) особых точек нет, б) в целом графиком нельзя задать (локально можно), в) в целом нельзя задать параметрически (так, чтобы все точки были неособыми).

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (однополостный гиперболоид); а) в целом нельзя задать в виде графика, б) в целом можно задать параметрически, выбирая в качестве параметров $u = z$, $v = \varphi$, где φ — полярный угол.

3) $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (двуполостный гиперболоид); одну половину можно задать как в виде графика $z = f(x, y)$, так и параметрически, так что все точки будут неособыми.

4) Конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$. Точка $(0, 0, 0)$ — особая.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть поверхность задана системой уравнений в области n-мерного пространства:

$$f_1(x^1, \ldots, x^n)=0, \ \ldots, \ f_{n-k}(x^1, \ldots, x^n)=0. \tag{1}$$

Определение 3. Точка $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ поверхности (1) называется неособой, если ранг матрицы $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)_{x^i=x_0^i}$, $i = 1, \ldots, n-k$, $j = 1, \ldots, n$, равен ровно $n-k$.

Имеет место следующее простое утверждение.

Лемма 1. *Около неособой точки* $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ *поверхности* (1) *можно ввести локальные координаты* $(z^1, \ldots, z^k)$.

Доказательство. Пусть минор порядка $n-k$, не равный нулю, есть $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{x^q=x_0^q}$, $j = k+1, \ldots, n$. Тогда мы в окрестности точки $\left(x_0^1, \ldots, x_0^n\right)$ на поверхности примем за локальные координаты недостающие переменные $(x^1, \ldots, x^k)$. Решим систему уравнений (1) в окрестности этой точки, пользуясь теоремой о неявных функциях:

$$
\begin{gathered}
x^{k+1} = x^{k+1}(z^1, \ldots, z^k), \\
\cdots\cdots\cdots \\
x^n = x^n(z^1, \ldots, z^k), \\
z^1 = x^1, \ldots, z^k = x^k.
\end{gathered}
$$

В переменных $(z^1, \ldots, z^k)$ мы получаем параметрическое представление поверхности в окрестности изучаемой точки.

Важный частный случай — это гиперповерхности в n-мерном пространстве. Они задаются одним уравнением

$$f(x^1, \ldots, x^n) = 0. \tag{2}$$

Точка $\left(x_0^1, \ldots, x_0^n\right)$, лежащая на гиперповерхности (2), т. е. такая, что $f\left(x_0^1, \ldots, x_0^n\right) = 0$, будет неособой, если

$$\operatorname{grad} f = \left.\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right)\right|_{x^j = x_0^j} \neq 0. \tag{3}$$

2. Касательная плоскость. Пусть поверхность в $\mathbb{R}^3$ задана параметрически: $r = r(u, v)$, $r = (x, y, z)$, где u, v — координаты на поверхности. Кривая $u = u(t)$, $v = v(t)$, заданная в координатах u, v, определяет кривую $r(t) = r(u(t), v(t))$, лежащую на нашей поверхности в $\mathbb{R}^3$. Ее вектор скорости $\dot{r}(t)$ имеет вид

$$\dot{r}(t) = r_u\dot{u} + r_v\dot{v}, \quad r_u = \frac{\partial r}{\partial u}, \quad r_v = \frac{\partial r}{\partial v}. \tag{4}$$

Если изучаемая точка неособая, то векторы $r_u = (x_u, y_u, z_u)$ и $r_v = (x_v, y_v, z_v)$ линейно независимы. Из (4) следует, что любой касательный вектор к поверхности есть линейная комбинация векторов r_u, r_v. Следовательно, векторы, касающиеся поверхности в данной неособой точке, образуют двумерное пространство с базисом r_u, r_v, которое и называется касательной плоскостью в данной точке. Координатами вектора скорости $\dot{r}$ в этом базисе служат величины $\dot{u}$, $\dot{v}$.

Пусть поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$ и кривая $r = r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ лежит на поверхности, т. е. $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$. Тогда $0 = \frac{d}{dt} F(x(t), y(t), z(t))$. Отсюда имеем

$$0 = F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z}. \tag{5}$$

Если в данной точке $\operatorname{grad} F = (F_x, F_y, F_z) \neq 0$, то уравнение (5) относительно координат $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ касательного вектора задает касательную плоскость.

Пусть теперь в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ задана k-мерная поверхность (в параметрической форме):

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1(z^1, \ldots, z^k), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x^n &= x^n(z^1, \ldots, z^k). \end{aligned} \tag{6}$$

Тогда вектор скорости кривой $z^j = z^j(t)$, $j = 1, \ldots, k$, лежащей на поверхности (6), имеет вид

$$v = (\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n) = \dot{z}^1 f_1 + \ldots + \dot{z}^k f_k,$$

где векторы $f_1, \ldots, f_k$ имеют вид

$$f_j = \left(\frac{\partial x^1}{\partial z^j}, \ldots, \frac{\partial x^n}{\partial z^j}\right), \quad j = 1, \ldots, k. \tag{7}$$

Векторы f_j образуют базис k-мерной плоскости, касающейся поверхности в данной (неособой) точке. Мы видим, что если кривая задана в координатах $z^1, \ldots, z^k$, то ее касательный вектор имеет в базисе (f_j) координаты $(\dot{z}^1, \ldots, \dot{z}^k)$.

Если k-мерная поверхность задана системой из $n-k$ уравнений

$$\begin{aligned} F_1(x^1, \ldots, x^n) &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ F_{n-k}(x^1, \ldots, x^n) &= 0, \end{aligned} \tag{8}$$

то для координат $(\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$ вектора, касающегося этой поверхности, будем иметь систему линейных уравнений

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x^l} \dot{x}^l = 0. \tag{9}$$

В неособой точке ранг системы (9) равен $n-k$, поэтому система (9) определяет k-мерную плоскость в $\mathbb{R}^n$. Это и есть касательная плоскость к поверхности в данной точке.

Замечание. Мы видим, что в любом случае геометрический смысл условия неособости таков: плоскость, касательная к поверхности в данной точке, имеет размерность, равную размерности поверхности, т. е. числу параметров k для параметрического задания поверхности. Если поверхность задана системой уравнений, это число равно размерности пространства минус количество уравнений.

3. Метрика на поверхности. Пусть поверхность (или ее кусок) задана параметрически: $r = r(u, v)$, $r = (x, y, z)$, где u, v — координаты на поверхности. Изучаемую точку мы всегда далее будем считать неособой: ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$ равен двум $\left(\text{где } x_u = \dfrac{\partial x}{\partial u},\ x_v = \dfrac{\partial x}{\partial v}, \ldots\right)$.

Как мы определили выше понятие римановой метрики?

Пусть задана кривая $u = u(t)$, $v = v(t)$. Ее длина имеет вид $l = \int |v_t|\, dt, v_t = (\dot{u}, \dot{v})$. Здесь $v_t = (\dot{u}, \dot{v})$ — вектор скорости в координатах (u, v) и $|v_t|^2 = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$, $x^1 = u$, $x^2 = v$, $g_{ij} = g_{ij}(u, v)$. Мы называли набор функций g_{ij} (в координатах u, v) римановой метрикой. Этот набор определяет длину кривой, а также углы между двумя кривыми в точке их пересечения.

Как определить длину кривой? Чему равны $g_{ij}(u, v)$ $(u = x^1, v = x^2)$?

Мы заметим, что кривая $u = u(t)$, $v = v(t)$ записана через координаты (u, v) на поверхности, но сама поверхность лежит в трехмерном евклидовом пространстве (x, y, z), где $r = r(u, v)$, $r = (x, y, z)$.

Естественно, что длиной кривой $u(t)$, $v(t)$ на поверхности мы называем длину этой кривой в трехмерном евклидовом пространстве.

Кривую мы запишем в виде

$$\begin{aligned} x &= x(u(t),\ v(t)) = x(t), \\ y &= y(u(t),\ v(t)) = y(t), \\ z &= z(u(t),\ v(t)) = z(t). \end{aligned} \tag{10}$$

Для длины кривой в трехмерном евклидовом пространстве мы имеем по определению

$$l = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt. \tag{11}$$

Так как $\dot{x} = x_u\dot{u} + x_v\dot{v}$ и т. д., то мы получаем

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2 = g_{ij}\dot{x}^j\dot{x}^i,$$

где $E = g_{11}$, $F = g_{12} = g_{21}$, $G = g_{22}$, $u = x^1$, $v = x^2$ и

$$\begin{aligned} g_{11} &= E = x_u x_u + y_u y_u + z_u z_u, \\ g_{12} &= F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ g_{22} &= G = x_v x_v + y_v y_v + z_v z_v. \end{aligned} \tag{12}$$

Если

$$r_u = x_u e_1 + y_u e_2 + z_u e_3, \qquad r_v = x_v e_1 + y_v e_2 + z_v e_3,$$

то

$$g_{ij} = \langle r_{x^i}, r_{x^j}\rangle, \quad x^1 = u, \quad x^2 = v. \tag{13}$$

При этом функции $g_{ij}(u, v)$ определены в координатах на поверхности.

Выражение $g_{ij}dx^i dx^j = E(du)^2 + 2F(du\,dv) + G(dv)^2$ называют обычно первой квадратичной формой (или римановой метрикой) на поверхности.

Если поверхность задана в виде $F(x, y, z) = 0$, то риманова метрика на поверхности (первая квадратичная форма) — это просто квадратичная форма $dx^2 + dy^2 + dz^2$ при условии $F(x, y, z) = 0$, из которого следует, что

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0.$$

Если $F_z \neq 0$ в изучаемой точке поверхности, то $dz = -\left(\frac{F_x}{F_z}\right) dx - \left(\frac{F_y}{F_z}\right) dy$. Поэтому на поверхности $F(x, y, z) = 0$, $x = u$, $y = v$ имеем

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{F_x}{F_z} dx + \frac{F_y}{F_z} dy\right)^2.$$

Таким образом,

$$g_{11} = E = 1 + \frac{F_x^2}{F_z^2}, \quad g_{22} = G = 1 + \frac{F_y^2}{F_z^2}, \quad g_{12} = F = \frac{F_x F_y}{F_z^2}. \tag{14}$$

Здесь $u = x^1 = x$, $v = x^2 = y$.

Если поверхность имеет вид $z = f(x, y)$, то

$$g_{11} = 1 + f_x^2, \quad g_{12} = f_x f_y, \quad g_{22} = 1 + f_y^2. \tag{15}$$

Итак, риманова метрика на поверхности появляется здесь как способ вычисления длин кривых в координатах (u, v) на самой поверхности. Сама поверхность расположена в трехмерном евклидовом пространстве, и речь идет просто о длине этой же кривой в трехмерном евклидовом смысле.

Евклидовы координаты (x, y, z) заданы в виде функций на поверхности: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$. По определению имеем

$$\begin{gathered} dx^2 + dy^2 + dz^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \quad x^1 = u, \quad x^2 = v; \\ g_{11} = E, \quad g_{12} = F, \quad g_{22} = G. \end{gathered} \tag{16}$$

В некоторых случаях бывает, что метрика $g_{ij}(x^1, x^2)$ самой поверхности двумерно евклидова (см. § 3). Это означает, что на поверхности найдется пара функций $\bar{u}(x^1, x^2)$, $\bar{v}(x^1, x^2)$ таких, что

$$(d\bar{u})^2 + (d\bar{v})^2 = g_{ij}dx^i dx^j. \tag{17}$$

Пример. Метрика цилиндра евклидова: уравнение цилиндра $f(x, y) = c$ (z не входит). Евклидовы координаты — это z и натуральный параметр l плоской кривой $f(x, y)=c$: $\bar{u}=z$, $\bar{v}=l$. Имеем

$$dx^2+dy^2+dz^2|_{f(x, y)=c}=dz^2+dl^2.$$

Пусть поверхность задана в виде $F(x, y, z)=0$ и $\operatorname{grad} F\neq 0$. Тогда на поверхности имеем $dF=F_x dx+F_y dy+F_z dz=0$. Если ξ — касательный вектор к поверхности, $\xi=\xi^1 e_1+\xi^2 e_2+\xi^3 e_3$, то $F_x\xi^1+F_y\xi^2+F_z\xi^3=0$ или $\xi\perp\operatorname{grad} F$. Отсюда получаем вывод: вектор $\operatorname{grad} F$ нормален к поверхности $F(x, y, z)=0$.

При параметрическом способе задания поверхности: $r=r(u, v)$, $r=(x, y, z)$ имеем два вектора

$$\xi=r_u=r_{x^1}=x_u e_1+y_u e_2+z_u e_3,$$

$$\eta=r_v=r_{x^2}=x_v e_1+y_v e_2+z_v e_3.$$

Оба эти вектора касательны к поверхности. Если они линейно независимы (т. е. точка неособая), то их векторное произведение $[\xi, \eta]=[r_u, r_v]$ ортогонально плоскости (r_u, r_v) и тем самым к поверхности.

Имея риманову метрику, мы можем измерять на поверхности длину любой кривой $u=u(t)$, $v=v(t)$ и угол между двумя кривыми в точке их пересечения. Скалярное произведение векторов скорости $\eta_1=(\dot{u}_1, \dot{v}_1)$ и $\eta_2=(\dot{u}_2, \dot{v}_2)$ в точке пересечения (u_0, v_0) кривых $(u_1(t), v_1(t))$ и $(u_2(t), v_2(t))$ задается формулой

$$\langle\eta_1, \eta_2\rangle=g_{ij}\eta_1^i\eta_2^j \qquad (\eta_k^i=\dot{u}_k, \quad \eta_k^j=\dot{v}_k, \quad k=1, 2),$$

а угол φ между ними — формулой

$$\cos\varphi=\frac{\langle\eta_1, \eta_2\rangle}{|\eta_1||\eta_2|} \qquad (|\eta_1|^2=\langle\eta_1, \eta_1\rangle, \quad |\eta_2|^2=\langle\eta_2, \eta_2\rangle).$$

Приведем теперь формулы для общего случая k-мерной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве. Сказанное в п. 1 позволяет нам ограничиться случаем параметрически заданной поверхности: $x^i=x^i(z^1, \ldots, z^k)$, $i=1, \ldots, n$. Длины кривых $z^j=z^j(t)$, $j=1, \ldots, k$, лежащих в пространстве на поверхности

$$x^i(t)=x^i(z^1(t), \ldots, z^k(t)), \quad i=1, \ldots, n, \tag{18}$$

вычисляются по формуле

$$l=\int_a^b|\dot{x}|\,dt=\int_a^b\sqrt{\sum_{i=1}^n(\dot{x}^i)^2}\,dt=$$

$$=\int_a^b\sqrt{\sum_k\left(\frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^k}{\partial z^j}\right)\dot{z}^i\dot{z}^j}\,dt=\int_a^b\sqrt{g_{ij}\dot{z}^i\dot{z}^j}\,dt, \tag{19}$$

$$g_{ij}(z^1, \ldots, z^k)=\sum_k\frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^k}{\partial z^j}. \tag{20}$$

Очевидно, $(dl)^2=g_{ij}dz^idz^j$.

Таким образом, метрика пространства определяет метрику на любой лежащей в нем поверхности, оказывающуюся, вообще говоря, неевклидовой. Метрика (20) называется *индуцированной* метрикой на поверхности.

Для случая гиперповерхности $F(x^1, \ldots, x^n) = 0$, $\operatorname{grad} F \neq 0$ (пусть $\partial F/\partial x^n \neq 0$), метрика (20) имеет вид

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{F_{x^i} F_{x^j}}{F^2_{x^n}},$$

где $F_{x^q} = \dfrac{\partial F}{\partial x^q}$.

4. Площадь поверхности. Если бы мы имели евклидову плоскость с координатами (x, y) и область U на плоскости, то площадь области U измерялась бы двукратным интегралом $\sigma(U)$:

$$\sigma(U) = \iint_U dx\, dy.$$

Если мы сделаем замену переменных (взаимно однозначную)

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \tag{21}$$

то мы будем иметь формулу

$$\sigma(U) = \iint_V |x_u y_v - x_v y_u|\, du\, dv, \tag{22}$$

где V — область в (u, v)-плоскости, соответствующая области U в (x, y)-плоскости. Таким образом, имеем

$$\sigma(U) = \iint_V |J|\, du\, dv,$$

где J — якобиан замены переменных (21), $J = x_u y_v - y_u x_v$. Возникает вопрос: как вычислять площадь области на поверхности $r = r(u, v)$, $r = (x, y, z)$ в пространстве, если известна риманова метрика на самой поверхности

$$dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad x^1 = u, \quad x^2 = v. \tag{23}$$

Рассмотрим детерминант матрицы (g_{ij}):

$$g = \det(g_{ij}) = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = EG - F^2 > 0. \tag{24}$$

Определение 4. Площадью области U на поверхности $r = r(u, v)$, $r = (x, y, z)$ называется величина

$$\sigma(U) = \iint_U \sqrt{g}\, du\, dv, \tag{25}$$

где U — область на поверхности, заданная параметрически как область в плоскости (u, v).

Выражение $\sqrt{g}\,du\,dv$ называется дифференциалом (элементом) площади на поверхности с римановой метрикой (g_{ij}).

Каково основание для такого определения площади области на поверхности? Почему элемент площади должен браться в виде $\sqrt{g}\,du\,dv$, если скалярное произведение касательных векторов в точке (u, v) задано матрицей (g_{ij})?

Рассмотрим для понимания этого вопроса пару векторов ξ, η евклидовой плоскости и параллелограмм $\lambda\xi + \mu\eta$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. Площадь параллелограмма равна $\sigma = |\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1| = |\det A|$, где $A = \begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 \\ \eta^1 & \eta^2 \end{pmatrix}$, т. е. матрица A образована из компонент векторов $\xi = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2$ и $\eta = \eta^1 e_1 + \eta^2 e_2$ по отношению к ортонормированному базису e_1, e_2.

Поставим теперь другую задачу: пусть задана плоскость с базисными векторами $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$. Пусть скалярное произведение базисных векторов задается матрицей

$$\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = g_{ij}, \qquad i = 1, 2, \qquad j = 1, 2. \tag{26}$$

Чему равна площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$? Точки параллелограмма — это $\lambda\bar{e}_1 + \mu\bar{e}_2$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. Мы считаем, что матрица g_{ij} — матрица положительной квадратичной формы:

$$g_{ij}\xi^i\xi^j > 0.$$

Лемма 2. *Площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$, равна $\sqrt{g}$, где $g = \det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$.*

Доказательство. Квадратичную форму g_{ij} можно привести к диагональному виду $g'_{ij} = \delta_{ij}$ линейным преобразованием A. Точно это значит следующее: найдутся векторы e_1, e_2:

$$\bar{e}_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2, \qquad \bar{e}_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2, \tag{27}$$

такие, что $\langle e_i, e_j \rangle = g'_{ij} = \delta_{ij}$ (т. е. $|e_i|^2 = 1$, $e_1 \perp e_2$). Из формул (27) вытекает, что

$$g_{11} = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle = a_{11}^2 + a_{12}^2,$$

$$g_{12} = g_{21} = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle = a_{11}a_{21} + a_{22}a_{12},$$

$$g_{22} = \langle \bar{e}_2, \bar{e}_2 \rangle = a_{21}^2 + a_{22}^2.$$

На матричном языке

$$(g_{ij}) = G = A^{\mathsf{T}}A, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Какова площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$? Так как базис (e_1, e_2) ортонормирован и векторы e_1, e_2 имеют вид (27), то площадь параллелограмма, натянутого на $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, равна $|\det A|$. Но $\det A^{\mathrm{T}} = \det A$, поэтому из (28) получаем

$$\begin{gathered} g = \det(g_{ij}) = (\det A)^2, \\ |\det A| = \sqrt{g}. \end{gathered} \tag{29}$$

Лемма доказана.

Напомним без доказательства извлечения из основных идей, лежащих в основе понятия двукратного интеграла и связанного с ним понятия площади области.

Рассмотрим область U на плоскости с координатами $x^1 = u$, $x^2 = v$, ограниченную некоторой кусочно гладкой кривой Г. Разобьем плоскость на малые прямоугольники со сторонами Δu, Δv (мы считаем, что Δu и Δv стремятся к нулю). Очевидно, площадь области U больше (или равна ей) суммы площадей всех внутренних для этой области прямоугольников.

Определение 5. Площадью области U называется предел сумм площадей всех внутренних прямоугольников при $\Delta u \to 0$ и $\Delta v \to 0$, если этот предел существует.

Пусть теперь дополнительно задана непрерывная функция $f(u, v)$ двух переменных. Определим понятие интеграла функции по области U.

Рассмотрим все внутренние для области прямоугольники со сторонами Δu и Δv для прямоугольной сетки. Для прямоугольника S_α мы рассмотрим значение $f(u_\alpha, v_\alpha)$ нашей функции в центре прямоугольника. Рассмотрим интегральную сумму

$$S(f, U) = \sum_\alpha f(u_\alpha, v_\alpha)\, \Delta u\, \Delta v,$$

где сумма берется по всем внутренним прямоугольникам.

Определение 6. Предел сумм $S(f, U)$ при $\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$, если он существует, называется двукратным интегралом от функции $f(u, v)$ по области и обозначается $\iint\limits_U f(u, v)\, du\, dv$.

В частности, если $f(u, v) \equiv 1$ и (u, v) — евклидовы координаты, то интеграл $\iint\limits_U du\, dv$ совпадает с площадью области U.

Напомним, что выше мы определили площадь области U на плоскости с координатами $u = x^1$, $v = x^2$, в которых метрика имеет вид $dl^2 = g_{11} du^2 + 2g_{12} du\, dv + g_{22} dv^2$, как интеграл

$$\sigma(U) = \iint\limits_U \sqrt{g}\, du\, dv.$$

Почему? Если Δu и Δv малы, то площадь малого параллелограмма с центром в точке (u_α, v_α) и со сторонами Δu и Δv равна примерно $S_\alpha \approx \Delta u\, \Delta v \sqrt{g}$ согласно доказанному выше утверждению. Здесь $\sqrt{g} = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}$, причем числа g_{ij} вычисляются в точке (u_α, v_α). Мы имеем при малых Δu, Δv

$$\sum_\alpha S_\alpha = \sum_\alpha \sqrt{g(u_\alpha, v_\alpha)}\,\Delta u\,\Delta v.$$

Предел этих сумм при $\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$ и есть интеграл $\sigma(U) = \iint\limits_U \sqrt{g}\,du\,dv$.

В заключение приведем формулы для площади поверхности в различных заданиях.

Теорема 2. 1. *Пусть поверхность задана в виде графика $z = f(x, y)$, и пусть задана область U на поверхности, которая проектируется в область V на плоскости (x, y). Тогда имеет место равенство*

$$\sigma(U) = \iint\limits_V \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy. \tag{30}$$

2. *Если поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$ и область U на поверхности взаимно однозначно проектируется в область V на плоскости (x, y), то имеет место формула*

$$\sigma(U) = \iint\limits_V \frac{|\operatorname{grad} F|}{|F_z|}\,dx\,dy, \tag{31}$$

где $F_z = \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ при (x, y, z), лежащих в области U.

3. *Если поверхность задана в параметрической форме: $r = r(u, v)$, то имеет место формула*

$$\sigma(U) = \iint\limits_V |[r_u, r_v]|\,du\,dv, \tag{32}$$

где V — область на плоскости (u, v), $[r_u, r_v]$ — векторное произведение.

Доказательство. 1. Напомним, что для поверхности $z = f(x, y)$ имеем

$$g_{11} = 1 + f_x^2, \quad g_{12} = f_x f_y, \quad g_{22} = 1 + f_y^2, \quad u = x, \quad v = y.$$

Тогда $\sqrt{g} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$. Из определения 4 площади поверхности получаем нужное утверждение.

2. Для поверхности $F(x, y, z) = 0$ при $F_z \neq 0$ имеем $x^1 = u = x$, $x^2 = v = y$, $g_{11} = 1 + \frac{F_x^2}{F_z^2}$, $g_{12} = \frac{F_x F_y}{F_z^2}$, $g_{22} = 1 + \frac{F_y^2}{F_z^2}$. Как и в п. 1, убеждаемся, что

$$\sqrt{g} = \sqrt{1 + \frac{F_x^2}{F_z^2} + \frac{F_y^2}{F_z^2}} = \frac{|\operatorname{grad} F|}{|F_z|}.$$

3. Напомним, что если $r = r(u, v)$, $x^1 = u$, $x^2 = v$, то $g_{ij} = \langle r_{x^i}, r_{x^j}\rangle$. Поэтому для площади параллелограмма, натянутого на векторы r_u, r_v, равной $|[r_u, r_v]|$, имеем

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = |[r_u, r_v]|^2.$$

Поэтому по определению 4 имеем

$$\sigma(U) = \iint\limits_V |[r_u, r_v]|\, du\, dv.$$

Теорема доказана.

Итак, мы убедились в том, что площадь определяется, как и длина, заданием скалярного произведения (g_{ij}) касательных векторов в каждой точке.

Задачи. 1. Тор T^2 в трехмерном евклидовом пространстве задается в виде поверхности вращения окружности вокруг прямой, лежащей в плоскости окружности. Написать параметрические уравнения тора и индуцированную метрику на торе.

2. Вычислить первую квадратичную форму на эллипсоиде вращения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1.$$

3. Найти метрику, индуцированную на поверхности вращения

$$r(u, \varphi) = \{\rho(u)\cos\varphi,\ \ \rho(u)\sin\varphi,\ \ z(u)\}.$$

Проверить, что ее меридианы $\{\varphi = \text{const}\}$ и параллели $\{u = \text{const}\}$ образуют ортогональную сеть. Найти линии, которые делят пополам угол между меридианами и параллелями.

4. Найти на сфере линии, пересекающие меридианы под заданным углом α (локсодромы). Найти длину локсодромы.

5. Пусть $F(x, y, z)$ — гладкая однородная функция (т. е. $F(cx, cy, cz) = c^n F(x, y, z)$). Доказать, что метрика на конической поверхности $F(x, y, z) = 0$ евклидова вне начала координат.

§ 8. Вторая квадратичная форма

1. Кривизна кривых на поверхности в евклидовом пространстве. Пусть задана поверхность в трехмерном евклидовом пространстве и (x_0, y_0, z_0) — неособая точка на ней. Предположим сначала, что ось z нормальна к касательной плоскости к поверхности в точке (x_0, y_0, z_0), в этом случае оси x и y ей параллельны. Тогда поверхность локально около точки (x_0, y_0, z_0) задается уравнением $z = f(x, y)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$ с

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{grad} f\,|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = 0. \qquad (1)$$