3. Напомним, что если $r=r(u, v)$, $x^1=u$, $x^2=v$, то $g_{ij}=\langle r_{x^i}, r_{x^j}\rangle$. Поэтому для площади параллелограмма, натянутого на векторы r_u, r_v, равной $|[r_u, r_v]|$, имеем

$$g=g_{11}g_{22}-g_{12}^2=|[r_u, r_v]|^2.$$

Поэтому по определению 4 имеем

$$\sigma(U)=\iint\limits_V |[r_u, r_v]|\, du\, dv.$$

Теорема доказана.

Итак, мы убедились в том, что площадь определяется, как и длина, заданием скалярного произведения (g_{ij}) касательных векторов в каждой точке.

Задачи. 1. Тор T^2 в трехмерном евклидовом пространстве задается в виде поверхности вращения окружности вокруг прямой, лежащей в плоскости окружности. Написать параметрические уравнения тора и индуцированную метрику на торе.

2. Вычислить первую квадратичную форму на эллипсоиде вращения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1.$$

3. Найти метрику, индуцированную на поверхности вращения

$$r(u, \varphi)=\{\rho(u)\cos\varphi, \quad \rho(u)\sin\varphi, \quad z(u)\}.$$

Проверить, что ее меридианы $\{\varphi=\text{const}\}$ и параллели $\{u=\text{const}\}$ образуют ортогональную сеть. Найти линии, которые делят пополам угол между меридианами и параллелями.

4. Найти на сфере линии, пересекающие меридианы под заданным углом α (локсодромы). Найти длину локсодромы.

5. Пусть $F(x, y, z)$ — гладкая однородная функция (т. е. $F(cx, cy, cz)=c^nF(x,y,z)$). Доказать, что метрика на конической поверхности $F(x, y, z)=0$ евклидова вне начала координат.

§ 8. Вторая квадратичная форма

1. Кривизна кривых на поверхности в евклидовом пространстве. Пусть задана поверхность в трехмерном евклидовом пространстве и (x_0, y_0, z_0) — неособая точка на ней. Предположим сначала, что ось z нормальна к касательной плоскости к поверхности в точке (x_0, y_0, z_0), в этом случае оси x и y ей параллельны. Тогда поверхность локально около точки (x_0, y_0, z_0) задается уравнением $z=f(x, y)$, $z_0=f(x_0, y_0)$ с

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=0, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{grad} f|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=0. \qquad (1)$$

Рассмотрим второй дифференциал функции $z=f(x, y)$, т. е. $d^2f=f_{xx}dx^2+2f_{xy}dx\,dy+f_{yy}dy^2$, и составим матрицу $a_{ij}=f_{x^ix^j}$, где $x^1=x$, $x^2=y$ (эта матрица называется *гессианом*). Рассмотрим эту матрицу квадратичной формы в точке (x_0, y_0, z_0), в которой $\operatorname{grad} f=0$.

Определение 1. *Главными кривизнами* поверхности $z=f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0), в которой $\operatorname{grad} f=0$, называются собственные значения матрицы (a_{ij}). *Гауссовой кривизной* называется детерминант матрицы (a_{ij}) в этой точке, а *средней кривизной* называется след матрицы в этой точке: след $a_{11}+a_{22}=k_1+k_2$, k_1 и k_2 — собственные значения, гауссова кривизна $K=k_1k_2=\det(a_{ij})=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Как мы увидим в гл. 4, гауссова кривизна поверхности зависит только от внутренних метрических свойств этой поверхности.

Мы определили пока понятие кривизны в специальных координатах, связанных с изучаемой точкой: ось z нормальна к поверхности, а оси x, y касательны к ней в этой точке или, локально, $z=f(x, y)$ и $\operatorname{grad} f=0$ в точке (x_0, y_0). Для определения этих величин в произвольных координатах обратимся к теории кривизны линий на поверхности.

Пусть поверхность задана в параметрической форме

$$r=r(u, v). \tag{2}$$

Тогда $[r_u, r_v]=|[r_u, r_v]|m$, где m — единичный вектор нормали к поверхности, $|m|=1$. Рассмотрим кривую $r=r(u(t), v(t))$ на поверхности. Имеем $\dot r=r_u\dot u+r_v\dot v$, $\ddot r=(r_{uu}\dot u^2+2r_{uv}\dot u\dot v+r_{vv}\dot v^2)+(r_u\ddot u+r_v\ddot v)$. Так как $r_u\perp m$ и $r_v\perp m$, получаем

$$\begin{aligned}\langle\ddot r, m\rangle=\langle r_{uu}, m\rangle\dot u^2+2\langle r_{uv}, m\rangle\dot u\dot v+\langle r_{vv}, m\rangle\dot v^2=\\=b_{11}\dot u^2+2b_{12}\dot u\dot v+b_{22}\dot v^2.\end{aligned} \tag{3}$$

Вывод. *Нормальная проекция ускорения $\langle\ddot r, m\rangle$ — это квадратичная форма от вектора скорости $(\dot u, \dot v)$ в локальных координатах $u=x^1$, $v=x^2$.*

Положим $b_{11}=L$, $b_{12}=M$, $b_{22}=N$. Имеем

$$\langle\ddot r, m\rangle dt^2=b_{ij}dx^idx^j=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2.$$

Определение 2. Выражение $\langle\ddot r, m\rangle dt^2$ называется *второй квадратичной формой* поверхности (2).

Пусть линия $u(t)$, $v(t)$ отнесена к натуральному параметру $t=l$. Согласно формулам Френе для кривой $r=r(t)=r(u(t), v(t))$ имеем

$$\ddot r=\frac{d^2r}{dl^2}=kn,$$

где n — главная нормаль к кривой, k — кривизна кривой. Поэтому $\langle\ddot r, m\rangle=k\langle n, m\rangle=k\cos\theta$, где θ — угол между m и n. Отсюда получаем

$$k\cos\theta\, dl^2 = \langle \ddot{r},\, m\rangle dl^2 = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = b_{ij}dx^i dx^j,$$

$$x^1 = u, \quad x^2 = v,$$

где $dl^2 = g_{ij}dx^i dx^j = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$.

Вывод.

$$k\cos\theta = \frac{b_{ij}dx^i\,dx^j}{g_{ij}dx^i\,dx^j}, \quad x^1 = u, \quad x^2 = v. \tag{4}$$

Тем самым доказана

Теорема 1. *Кривизна кривой на поверхности в трехмерном пространстве, умноженная на косинус угла между нормалью к поверхности и главной нормалью кривой, совпадает с отношением значений второй и первой квадратичных форм на касательном векторе к кривой.*

Следствие. *Если кривая является сечением поверхности с помощью нормальной плоскости, то* $\cos\theta = 1$ *и*

$$k = \frac{b_{ij}dx^i\,dx^j}{g_{ij}dx^i\,dx^j}. \tag{5}$$

2. Инварианты пары квадратичных форм. Итак, в каждой точке поверхности задана пара квадратичных форм:

1) $$dl^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \tag{6}$$

2) $$\langle \ddot{r},\, m\rangle dt^2 = b_{ij}dx^i dx^j. \tag{7}$$

При этом форма dl^2 положительно определена.

Какие инварианты пары квадратичных форм нам известны из алгебры?

Рассмотрим на плоскости пару квадратичных форм, из которых одна положительно определена. Пусть матрицы квадратичных форм имеют вид

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$(g_{21} = g_{12},\ b_{21} = b_{12})$. Составим уравнение

$$\det(Q - \lambda G) = 0, \tag{9}$$

или

$$(b_{11} - \lambda g_{11})(b_{22} - \lambda g_{22}) - (b_{12} - \lambda g_{12})^2 = 0.$$

Корни λ_1, λ_2 этого уравнения называются *собственными значениями пары квадратичных форм.*

Решим линейные уравнения

$$\left.\begin{aligned} (b_{11} - \lambda_i g_{11})\xi_i^1 + (b_{12} - \lambda_i g_{12})\xi_i^2 = 0, \\ (b_{12} - \lambda_i g_{12})\xi_i^1 + (b_{22} - \lambda_i g_{22})\xi_i^2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где ξ_i^1, ξ_i^2 — неизвестные, $i = 1, 2$.

Если λ_1, λ_2 — собственные значения, то система (10) имеет нетривиальные решения $f_1 = (\xi_1^1, \xi_1^2)$ и $f_2 = (\xi_2^1, \xi_2^2)$.

Направления векторов f_1, f_2 называются *главными направлениями* пары квадратичных форм; f_1 соответствует λ_1 и f_2 соответствует λ_2.

Как и прежде, скалярные произведения $\langle e_i, e_j\rangle$ базисных векторов плоскости обозначаются через g_{ij}, $i, j = 1, 2$ (при этом риманова метрика задается формой g_{ij}).

Лемма 1. *Если собственные значения пары квадратичных форм различны, то главные направления ортогональны.*

Мы имеем два главных направления f_1, f_2,

$$f_1 = \xi_1^1 e_1 + \xi_1^2 e_2, \quad f_2 = \xi_2^1 e_1 + \xi_2^2 e_2.$$

Их ортогональность означает по определению, что

$$\langle f_1, f_2\rangle = g_{ij}\xi_1^i\xi_2^j = 0.$$

Доказательство. Выберем пару плоских векторов d_1, d_2 таких, что $\langle d_i, d_j\rangle = \delta_{ij}$. Это можно сделать в силу положительной определенности квадратичной формы с матрицей g_{ij}, так как ее можно привести линейным преобразованием к сумме квадратов. Вторую квадратичную форму мы рассмотрим теперь в новом базисе d_1, d_2, считая, что

$$e_i = a_i^j d_j, \quad A = (a_i^j). \tag{11}$$

В новом базисе d_1, d_2 для матриц $\bar G$ и $\bar Q$ первой и второй квадратичных форм имеем

1) $\bar G = (\langle d_i, d_j\rangle) = (\delta_{ij})$ или $\bar G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и, значит, $G = A^{\mathrm T} A$;

2) $Q = A^{\mathrm T}\bar Q A$.

Так как $G = A^{\mathrm T} A$ и $Q = A^{\mathrm T}\bar Q A$, то

$$\begin{gathered} Q - \lambda G = A^{\mathrm T}(\bar Q - \lambda\cdot 1) A, \\ \det(Q - \lambda G) = (\det A)^2 \det(\bar Q - \lambda\cdot 1). \end{gathered} \tag{12}$$

Заметим, что $\det A = \det A^{\mathrm T} = \sqrt{g} = \sqrt{\det G} \neq 0$. Поэтому уравнение (9) эквивалентно уравнению

$$\det(\bar Q - \lambda\cdot 1) = 0. \tag{13}$$

В базисе d_1, d_2 скалярное произведение евклидово. Оно задается единичной матрицей $\bar G = 1 = (\delta_{ij})$. Из курса алгебры известно, что квадратичную форму $\bar Q$ можно вращением привести к форме, задаваемой диагональной матрицей, а собственные векторы f_1, f_2 последней ортогональны в обычном евклидовом смысле. Лемма доказана.

Эта лемма представляет собой вариант теоремы о приведении квадратичной формы в евклидовой плоскости к диагональному виду с помощью вращения.

3. Свойства второй квадратичной формы. Вернемся теперь к первой и второй квадратичным формам поверхности в трехмерном евклидовом пространстве:

$$g_{ij}dx^i dx^j = dl^2, \tag{14}$$

$$b_{ij}dx^i dx^j, \quad x^1 = u, \quad x^2 = v. \tag{15}$$

Отношение этих квадратичных форм есть кривизна нормального сечения.

Определение 3. Собственные значения этой пары квадратичных форм называются *главными кривизнами поверхности* в изучаемой точке. Произведение главных кривизн называется *гауссовой кривизной поверхности*, а сумма их — *средней кривизной поверхности* *).

Пример. Пусть поверхность задана в виде $z = f(x, y)$, и пусть в изучаемой точке (x_0, y_0) имеем $f_x = f_y = 0$ (ось z нормальна к касательной плоскости к поверхности в этой точке). Пусть $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$. Для первой и второй квадратичных форм получаем (в изучаемой точке x_0, y_0)

$$\text{(I)} \qquad g_{11} = 1, \quad g_{22} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0 \quad (g_{ij} = \delta_{ij}),$$

$$\begin{aligned} \text{(II)} \qquad L &= b_{11} = \langle r_{uu}, m\rangle = f_{xx}(x_0, y_0), \\ M &= b_{12} = \langle r_{uv}, m\rangle = f_{xy}(x_0, y_0), \\ N &= b_{22} = \langle r_{vv}, m\rangle = f_{yy}(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь вектор m совпадает с единичным вектором вдоль оси z.

Итак, в исследуемой точке вторая квадратичная форма имеет вид

$$b_{ij}dx^i dx^j = f_{x^i x^j} dx^i dx^j = d^2 f. \tag{17}$$

Гауссова кривизна в этом случае совпадает с детерминантом $\det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy}\end{pmatrix}$. Собственные значения получаются из уравнения $(f_{xx} - \lambda)(f_{yy} - \lambda) - (f_{xy})^2 = 0$, так как $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Касательная плоскость к поверхности в этой точке параллельна плоскости (x, y). Главные направления в этой точке можно получить, решая уравнения

$$\left(f_{x^i x^j} - \lambda_1 \delta_{ij}\right)\xi_1^j = 0, \qquad i, j = 1, 2 \text{ для } f_1, \tag{18}$$

$$\left(f_{x^i x^j} - \lambda_2 \delta_{ij}\right)\xi_2^j = 0, \qquad i, j = 1, 2 \text{ для } f_2. \tag{19}$$

---

*) Часто средней кривизной называют полусумму главных кривизн.

Так как $f_1 \perp f_2$, мы можем взять единичные векторы главных направлений за новые оси координат x', y' — совершить вращение в плоскости (x, y). Необходимо лишь, чтобы было $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

В новых координатах (z, x', y') имеем

$$z = f(x(x', y'), y(x', y')),$$

где $x = x' \cos\varphi + y' \sin\varphi$, $y = -x' \sin\varphi + y' \cos\varphi$, φ — угол вращения.

В новых координатах вторая квадратичная форма имеет вид (только в рассматриваемой точке)

$$\lambda_1 (dx')^2 + \lambda_2 (dy')^2. \tag{20}$$

Для кривизны нормального сечения в данной точке получаем формулу

$$k = \frac{\lambda_1 (dx')^2 + \lambda_2 (dy')^2}{(dx')^2 + (dy')^2}. \tag{21}$$

Касательный вектор e к нормальному сечению поверхности имеет в данной точке вид $e = (\dot{x}', \dot{y}')$, где

$$dx' = \dot{x}' dt, \qquad dy' = \dot{y}' dt.$$

Поэтому имеем

$$\cos^2\alpha = \frac{(dx')^2}{(dx')^2 + (dy')^2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{(dy')^2}{(dx')^2 + (dy')^2}, \tag{22}$$

где α — угол между осью x и касательным вектором e к нормальному сечению.

Итак, мы установили, что при нашем специальном выборе системы координат $k = \lambda_1 \cos^2\alpha + \lambda_2 \sin^2\alpha$. Эта формула называется *формулой Эйлера*. Оказывается, что она имеет место в любой системе координат.

Теорема 2. *Кривизна нормального сечения дается формулой*

$$k = \lambda_1 \cos^2\alpha + \lambda_2 \sin^2\alpha,$$

где λ_1, λ_2 — главные кривизны, α — угол на поверхности между касательным вектором к нормальному сечению и соответствующим главным направлением.

Доказательство. Мы вывели формулу Эйлера для случая, когда поверхность задана в виде $z = f(x, y)$ и $f_x = f_y = 0$ в изучаемой точке (x_0, y_0). Однако, поскольку сам результат не зависит от выбора координат, то мы всегда можем для изучаемой точки выбрать связанные с ней координаты так, что ось z нормальна к поверхности в этой точке, а оси x, y касательны к поверхности и взаимно ортогональны (и даже являются главными направлениями). Тогда поверхность в окрестности изучаемой точки задается в виде

$$z = f(x, y), \quad f_x = f_y = 0.$$

Более того, в этой точке $f_{xy}=f_{yx}=0$, если оси являются главными направлениями. Тогда $\lambda_1=f_{xx}$, $\lambda_2=f_{yy}$ в этой точке. Поскольку в таких координатах мы уже вывели формулу Эйлера, теорема доказана.

Замечание. При изменении направления оси z на противоположное знак главных кривизн также меняется.

Отметим следствие из формулы Эйлера: если $\lambda_1>\lambda_2$, то λ_1 и λ_2 суть максимальная и минимальная кривизны нормальных сечений в данной точке (с учетом знака).

Укажем полезные формулы для второй квадратичной формы. Если поверхность задана в виде $z=f(x,\ y)$, то для коэффициентов второй квадратичной формы имеем (здесь $x=u$, $y=v$)

$$r_u=(1,\ 0,\ f_x),\quad r_v=(0,\ 1,\ f_y),\quad [r_u,\ r_v]=(-f_x,\ -f_y,\ 1),$$
$$r_{uu}=(0,\ 0,\ f_{xx}),\quad r_{uv}=(0,\ 0,\ f_{xy}),\quad r_{vv}=(0,\ 0,\ f_{yy}),$$
$$\begin{gathered} m=\frac{[r_u,\ r_v]}{|[r_u,\ r_v]|}=\frac{(-f_x,\ -f_y,\ 1)}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad L=b_{11}=\frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\\ M=b_{12}=b_{21}=\frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad N=b_{22}=\frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}. \end{gathered}\tag{23}$$

Отсюда получаем

$$b_{ij}dx^i dx^j=\frac{1}{\sqrt{1+f_{x^1}^2+f_{x^2}^2}}\left(f_{x^ix^j}dx^i dx^j\right),\tag{24}$$
$$x^1=u=x,\quad x^2=v=y.$$

Напомним, что для коэффициентов g_{ij} мы имели формулы (7.15):

$$\begin{gathered} g_{11}=1+f_x^2,\quad g_{12}=g_{21}=f_xf_y;\quad g_{22}=1+f_y^2,\\ g=g_{11}g_{22}-g_{12}^2=1+f_x^2+f_y^2. \end{gathered}\tag{25}$$

Имеет место следующая

Теорема 3. *Гауссова кривизна поверхности равна отношению детерминантов второй и первой квадратичных форм:*

$$K=\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}.\tag{26}$$

В частности, если поверхность задана в виде графика $z=f(x,\ y)$, то имеет место формула

$$K=\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}.$$

Доказательство. Собственные значения λ_1 и λ_2 определялись из уравнения (9)

$$\det(Q-\lambda G)=0,$$

где $Q=(b_{ij})=\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ — матрица второй квадратичной формы, $G=(g_{ij})$. Заметим, что $Q-\lambda G=(b_{ij}-\lambda g_{ij})$ и $\det(Q-\lambda G)= =(b_{11}-\lambda g_{11})(b_{22}-\lambda g_{22})-(b_{12}-\lambda g_{12})^2$. Матрица $G=(g_{ij})$ положительно определена и потому невырождена. Следовательно,

$$\det(Q-\lambda G)=\det G \det(G^{-1}Q-\lambda\cdot 1),$$

где $\det G\neq 0$. Собственные значения λ_1 и λ_2 можно определить, решая уравнение $\det(G^{-1}Q-\lambda\cdot 1)=0$. Напомним факт из алгебры: произведение всех собственных значений матрицы равно ее детерминанту, в частности, $\det A=\lambda_1\lambda_2$ для матриц второго порядка. Полагая $A=G^{-1}Q$, видим, что

$$\lambda_1\lambda_2=\det\left(G^{-1}Q\right)=\frac{\det Q}{\det G}=K. \tag{27}$$

Отсюда следует, что гауссова кривизна равна отношению детерминантов матриц второй и первой квадратичных форм.

Далее, если поверхность задана в виде $z=f(x, y)$, то коэффициенты b_{ij}, g_{ij} даются формулами (23), (7.15). Вычисляя детерминанты и составляя их отношения, получаем формулу для гауссовой кривизны.

Следствие. *Если поверхность задана в виде графика $z=f(x, y)$, то знак гауссовой кривизны K совпадает со знаком детерминанта $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$, так как*

$$K=\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{\left(1+f_x^2+f_y^2\right)^2}.$$

Пример. Пусть поверхность задана в виде $z=f(x, y)$, где функция $f(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $f_{xx}+f_{yy}=0$. Тогда $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\leqslant 0$, так как $f_{xx}=-f_{yy}$. Поэтому гауссова кривизна $K<0$ всюду, где хотя бы одна из двух производных f_{xx}, f_{xy} отлична от нуля.

Укажем геометрический смысл гауссовой кривизны. Выберем для данной точки поверхности ортонормированный репер (x, y, z), где ось z нормальна к поверхности. Тогда локально поверхность запишется в виде $z=f(x, y)$, где $f_x=f_y=0$ в этой точке.

В данной точке мы получим $g_{ij}=\delta_{ij}$, так как $g_{11}=1+f_x^2$ $g_{12}=f_xf_y$, $g_{22}=1+f_y^2$. Далее, $L=b_{11}=f_{xx}$, $M=b_{12}=f_{xy}$, $N=b_{22}= =f_{yy}$.

Разберем три случая.

1) $K>0$, $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$ (минимум функции $f(x, y)$ при $x=x_0$, $y=y_0$, рис. 10, *а*).

2) $K>0$, $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$ (максимум функции $f(x, y)$ при $x=x_0$, $y=y_0$, рис. 10, *б*).

3) $K<0$, поэтому $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$ или наоборот — это седло или «перевал» (рис. 10, *в*).

Вывод. *При $K > 0$ локально поверхность лежит по одну сторону от касательной плоскости около изучаемой точки. При $K < 0$ поверхность обязательно пересекает касательную плоскость сколь угодно близко от точки касания.*

Если гауссова кривизна всюду положительна, то это — *строго выпуклая поверхность.*

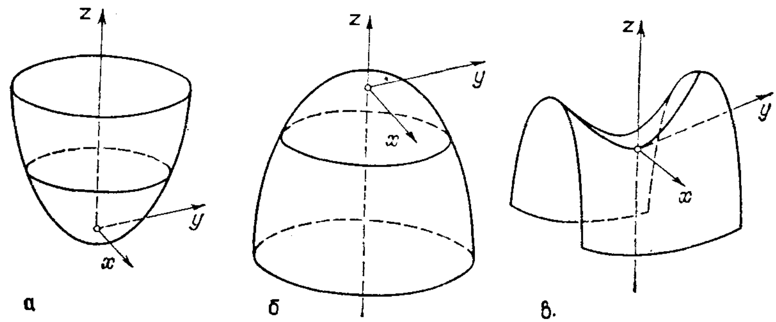

Рис. 10.

Задачи. 1. Найти поверхность, у которой все нормали пересекаются в одной точке.

2. Вычислить вторую квадратичную форму на поверхности вращения

$$r(u, \varphi)=\{x(u),\ \rho(u)\cos\varphi,\ \rho(u)\sin\varphi\},\quad \rho(u)>0.$$

3. Вычислить гауссову и среднюю кривизну на поверхности, задаваемой уравнением

$$z=f(x)+g(y).$$

4. Доказать, что если у поверхности, вложенной в трехмерное евклидово пространство, гауссова и средняя кривизна тождественно равны нулю, то поверхность является плоскостью.

5. Доказать, что на поверхности $z=f(x, y)$ средняя кривизна H равна

$$H=\operatorname{div}\left(\frac{\operatorname{grad} f}{\sqrt{1+|\operatorname{grad} f|^2}}\right).$$

6. Пусть поверхность S образована касательными прямыми к данной кривой с кривизной $k(l)$. Доказать, что если кривая изгибается с сохранением $k(l)$, то и поверхность S сохраняет метрику.

7. Если метрика поверхности имеет вид

$$dl^2=A^2du^2+B^2dv^2,\quad A=A(u, v),\quad B=B(u, v),$$

то гауссова кривизна имеет вид

$$K = -\frac{1}{AB}\left[\left(\frac{A_v}{B}\right)_v + \left(\frac{B_u}{A}\right)_u\right].$$

8. Доказать, что единственными поверхностями вращения, имеющими нулевую среднюю кривизну, являются плоскость и катеноид, где катеноид получается вращением кривой $\left(\frac{\operatorname{ch}(at+b)}{a},\ t\right)$.

§ 9. Метрика сферы

Сфера $S^3 \subset \mathbb{R}^3$ радиуса R с центром в начале координат задается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \tag{1}$$

В сферических координатах r, θ, φ эта сфера задается уравнением $r = R$, θ, φ любые. Поэтому параметры (θ, φ) могут служить локальными координатами на сфере, за исключением ее северного и южного полюсов (где $\theta = 0$, $\theta = \pi$; это — особые точки сферической системы координат — см. § 1). Известно (§ 3, п. 1), что евклидова метрика $dx^2 + dy^2 + dz^2$ в сферических координатах принимает следующий вид:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{2}$$

На поверхности $r = R$ дифференциал dr обращается в нуль, и для метрики сферы в координатах (θ, φ) мы получаем вид

$$dl^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{3}$$

Здесь $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ (рис. 11). В малой окрестности точки 0 имеем $\sin\theta \sim \theta$. Тем самым dl^2/R^2 приближенно равно евклидовой метрике $d\theta^2 + \theta^2 d\varphi^2$ (в полярных координатах θ, φ). Рассмотрим стереографическую проекцию сферы на плоскость (см. рис. 12, на котором изображено плоское сечение сферы). Здесь θ, φ — координаты на сфере, а (r, φ) — полярные координаты на плоскости. Из рис. 12 видно, что $\varphi = \varphi$, $r = R\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$. Используя эти формулы перехода, мы можем переписать метрику (3) в координатах (r, φ) (или в координатах x, y):

$$dl^2 = \frac{4R^4}{(R^2 + r^2)^2}(dr^2 + r^2 d\varphi^2) = \frac{4R^4}{(R^2 + x^2 + y^2)^2}(dx^2 + dy^2). \tag{4}$$

Ясно, что метрика сферы получается из метрики евклидовой плоскости умножением на функцию $4R^4/(R^2 + x^2 + y^2)^2$, т. е.

$$dl^2_{\text{сфера}} = \frac{4R^4}{(R^2 + x^2 + y^2)^2}\, dl^2_{\text{плоскость}}. \tag{5}$$