то гауссова кривизна имеет вид

$$K = -\frac{1}{AB}\left[\left(\frac{A_v}{B}\right)_v + \left(\frac{B_u}{A}\right)_u\right].$$

8. Доказать, что единственными поверхностями вращения, имеющими нулевую среднюю кривизну, являются плоскость и катеноид, где катеноид получается вращением кривой $\left(\frac{\operatorname{ch}(at+b)}{a},\ t\right)$.

§ 9. Метрика сферы

Сфера $S^3 \subset \mathbb{R}^3$ радиуса R с центром в начале координат задается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \qquad (1)$$

В сферических координатах r, θ, φ эта сфера задается уравнением $r = R$, θ, φ любые. Поэтому параметры (θ, φ) могут служить локальными координатами на сфере, за исключением ее северного и южного полюсов (где $\theta = 0$, $\theta = \pi$; это — особые точки сферической системы координат — см. § 1). Известно (§ 3, п. 1), что евклидова метрика $dx^2 + dy^2 + dz^2$ в сферических координатах принимает следующий вид:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \qquad (2)$$

На поверхности $r = R$ дифференциал dr обращается в нуль, и для метрики сферы в координатах (θ, φ) мы получаем вид

$$dl^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \qquad (3)$$

Здесь $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ (рис. 11). В малой окрестности точки 0 имеем $\sin\theta \sim \theta$. Тем самым dl^2/R^2 приближенно равно евклидовой метрике $d\theta^2 + \theta^2\, d\varphi^2$ (в полярных координатах θ, φ). Рассмотрим стереографическую проекцию сферы на плоскость (см. рис. 12, на котором изображено плоское сечение сферы). Здесь θ, φ — координаты на сфере, а (r, φ) — полярные координаты на плоскости. Из рис. 12 видно, что $\varphi = \varphi$, $r = R \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$. Используя эти формулы перехода, мы можем переписать метрику (3) в координатах (r, φ) (или в координатах x, y):

$$dl^2 = \frac{4R^4}{(R^2 + r^2)^2}(dr^2 + r^2 d\varphi^2) = \frac{4R^4}{(R^2 + x^2 + y^2)^2}(dx^2 + dy^2). \qquad (4)$$

Ясно, что метрика сферы получается из метрики евклидовой плоскости умножением на функцию $4R^4/(R^2 + x^2 + y^2)^2$, т. е.

$$dl^2_{\text{сфера}} = \frac{4R^4}{(R^2 + x^2 + y^2)^2}\, dl^2_{\text{плоскость}}. \qquad (5)$$

Пример. Найдем длину окружности и площадь круга радиуса ρ на сфере. Пусть центр окружности расположен в северном

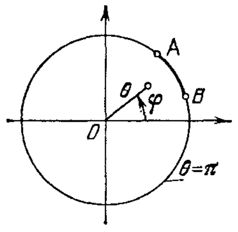

Рис. 11. Расстояние между точками A и B, измеренное вдоль окружности радиуса $\theta = \pi$, равно нулю, т. е. вся граница круга склеивается в одну точку, что и дает двумерную сферу

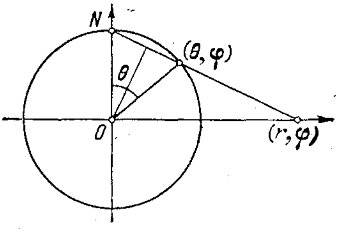

Рис. 12. Стереографическая проекция: $(\theta, \varphi) \to (r, \varphi)$.

полюсе N (точка $\theta = 0$; рис. 13). Тогда радиус ρ окружности равен $\rho = R\theta_0$. Следовательно, уравнение окружности имеет вид $\theta = \rho/R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Круг радиуса ρ — это область $\theta \leqslant \rho/R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. На кривой $\theta = \rho/R = \mathrm{const}$ имеем

$$dl^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) = R^2 \sin^2 \frac{\rho}{R}\, d\varphi^2,$$

поэтому длина l_ρ равна

$$l_\rho = \int_0^{2\pi} R \sin\frac{\rho}{R}\, d\varphi = 2\pi R \sin\frac{\rho}{R}. \qquad (6)$$

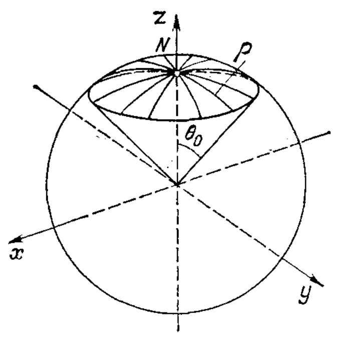

Рис. 13. Круг радиуса ρ на сфере

Мы видим, что при $\rho = R\pi/2$ длина максимальна (экватор); при $\rho = \pi$ длина равна нулю (южный полюс). Из формулы (6) вытекает, что отношение длины окружности l_ρ к радиусу ρ на сфере всегда меньше 2π:

$$\frac{l_\rho}{\rho} = 2\pi \frac{\sin(\rho/R)}{\rho/R} < 2\pi \text{ при } \rho > 0.$$

Найдем теперь площадь σ_ρ круга радиуса ρ. Из вида (3) для dl^2 вытекает, что $\sqrt{g} = R^2\,|\sin\theta|$. Поэтому площадь равна

$$\sigma_\rho = \iint\limits_{0<\theta<\rho/R} R^2 |\sin\theta|\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= R^2 \int_0^{\rho/R} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R^2\left(1 - \cos\frac{\rho}{R}\right), \quad \rho \leqslant \frac{\pi}{R}. \qquad (7)$$

При $\rho = \pi R$ наш круг совпадает со всей сферой и мы получаем, что площадь сферы равна $4\pi R^2$.

Если радиус ρ мал, то $\sin\frac{\rho}{R} \approx \frac{\rho}{R}$ и $1 - \cos\frac{\rho}{R} \approx \frac{\rho^2}{2R^2}$. Получаем

$$l_\rho = 2\pi R \sin\frac{\rho}{R} \approx 2\pi\rho,$$

$$\sigma_\rho = 2\pi R^2\left(1 - \cos\frac{\rho}{R}\right) \approx \pi\rho^2,$$

т. е. при малых радиусах мы имеем для длин и площадей примерно те же формулы, что и в евклидовой геометрии.

Найдем теперь гауссову и среднюю кривизну сферы радиуса R. Заметим, что нормальные сечения сферы — это окружности радиуса R (так называемые большие круги на сфере). Поэтому кривизна любого нормального сечения постоянна и равна R^{-1} (см. § 5, п. 1). Таким образом, оба собственных значения второй квадратичной формы равны друг другу и равны R^{-1}. Значит, гауссова кривизна сферы равна $1/R^2$, средняя кривизна сферы равна $2/R$.

Перейдем к группе движений метрики сферы. Всякое вращение пространства вокруг начала координат переводит сферу радиуса R в себя. Это вращение, задаваемое ортогональной матрицей, сохраняет риманову метрику на сфере. Таким образом, движения сферы S^2 определяются ортогональными матрицами. Напомним (см. § 4, п. 3), что группа ортогональных матриц обозначается $O(3)$ и называется полной ортогональной группой. Каждое вращение описывается тремя параметрами. Итак, метрика сферы имеет по меньшей мере трехмерную совокупность движений.

Важное замечание. Мы видели, что всевозможные преобразования сферы, задаваемые ортогональными матрицами, являются движениями. Поэтому группа $O(3)$ содержится в группе всех движений сферы S^2. Однако пока мы еще не доказали, что группа $O(3)$ действительно совпадает с группой всех движений. Это совпадение имеет место. Любое преобразование, сохраняющее метрику на S^2, является линейным и ортогональным преобразованием в $\mathbb{R}^3$. Однако строгое доказательство этого факта требует привлечения понятия геодезической линии. Мы вернемся к этому вопросу в гл. 4.

§ 10. Пространственноподобные поверхности в псевдоевклидовом пространстве

1. Псевдосфера. Рассмотрим трехмерное псевдоевклидово пространство с координатами (t, x, y), в которых псевдоевклидова метрика имеет вид

$$dl^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2. \quad (1)$$