При $\rho=\pi R$ наш круг совпадает со всей сферой и мы получаем, что площадь сферы равна $4\pi R^2$.

Если радиус ρ мал, то $\sin\frac{\rho}{R}\approx\frac{\rho}{R}$ и $1-\cos\frac{\rho}{R}\approx\frac{\rho^2}{2R^2}$. Получаем

$$l_\rho=2\pi R\sin\frac{\rho}{R}\approx 2\pi\rho,$$

$$\sigma_\rho=2\pi R^2\left(1-\cos\frac{\rho}{R}\right)\approx\pi\rho^2,$$

т. е. при малых радиусах мы имеем для длин и площадей примерно те же формулы, что и в евклидовой геометрии.

Найдем теперь гауссову и среднюю кривизну сферы радиуса R. Заметим, что нормальные сечения сферы — это окружности радиуса R (так называемые большие круги на сфере). Поэтому кривизна любого нормального сечения постоянна и равна R^{-1} (см. § 5, п. 1). Таким образом, оба собственных значения второй квадратичной формы равны друг другу и равны R^{-1}. Значит, гауссова кривизна сферы равна $1/R^2$, средняя кривизна сферы равна $2/R$.

Перейдем к группе движений метрики сферы. Всякое вращение пространства вокруг начала координат переводит сферу радиуса R в себя. Это вращение, задаваемое ортогональной матрицей, сохраняет риманову метрику на сфере. Таким образом, движения сферы S^2 определяются ортогональными матрицами. Напомним (см. § 4, п. 3), что группа ортогональных матриц обозначается $O(3)$ и называется полной ортогональной группой. Каждое вращение описывается тремя параметрами. Итак, метрика сферы имеет по меньшей мере трехмерную совокупность движений.

Важное замечание. Мы видели, что всевозможные преобразования сферы, задаваемые ортогональными матрицами, являются движениями. Поэтому группа $O(3)$ содержится в группе всех движений сферы S^2. Однако пока мы еще не доказали, что группа $O(3)$ действительно совпадает с группой всех движений. Это совпадение имеет место. Любое преобразование, сохраняющее метрику на S^2, является линейным и ортогональным преобразованием в $\mathbb{R}^3$. Однако строгое доказательство этого факта требует привлечения понятия геодезической линии. Мы вернемся к этому вопросу в гл. 4.

§ 10. Пространственноподобные поверхности в псевдоевклидовом пространстве

1. Псевдосфера. Рассмотрим трехмерное псевдоевклидово пространство с координатами (t, x, y), в которых псевдоевклидова метрика имеет вид

$$dl^2=dt^2-dx^2-dy^2. \qquad (1)$$

Псевдосфера радиуса R в пространстве $\mathbb{R}_1^3$ задается уравнением

$$t^2 - x^2 - y^2 = R^2. \tag{2}$$

Это — двуполостный гиперболоид в трехмерном пространстве (рис. 14). Псевдосфера лежит целиком внутри светового конуса $t^2 - x^2 - y^2 = 0$ и в псевдосферических координатах ρ, χ, φ (см. (3.11), (3.12)) задается уравнениями

$$\rho = R \quad \text{(верхняя половина)},$$
$$\rho = -R \quad \text{(нижняя половина)}.$$

Мы будем в дальнейшем рассматривать только верхнюю половину гиперболоида, где $\rho = R$. Напомним, что метрика $dt^2 - dx^2 - dy^2$ в псевдосферических координатах ρ, χ, φ имеет вид (3.12):

$$dl^2 = -\rho^2 (d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi \, d\varphi^2) + d\rho^2. \tag{3}$$

Поэтому на гиперболоиде, где $d\rho = 0$, имеем

$$-dl^2 = R^2 (d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi \, d\varphi^2). \tag{4}$$

Таким образом, метрика, индуцированная псевдоевклидовой (т. е. индефинитной) метрикой на поверхности псевдосферы, отрицательно определена.

Это эквивалентно тому, что псевдосфера $t^2 - x^2 - y^2 = R^2$ в $\mathbb{R}_1^3$ — пространственно-

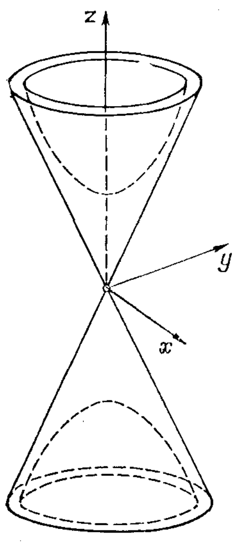

Рис. 14

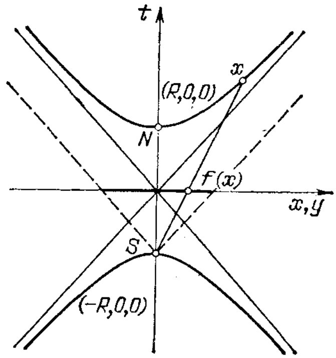

Рис. 15

подобная гиперповерхность: касательные векторы к этой поверхности всегда пространственноподобны (на них $dl^2 < 0$).

Определение 1. Метрика (4) называется *метрикой Лобачевского.*

По аналогии с предыдущим параграфом можно построить стереографическую проекцию псевдосферы на плоскость (x, y). Центром псевдосферы является начало координат O, северный полюс — это точка с координатами $(R, 0, 0)$, южный — точка с координатами $(-R, 0, 0)$. Образом верхней половины псевдосферы будет открытый круг $x^2+y^2<R^2$ (рис. 15). Пусть t, x, y — координаты точки P на псевдосфере (где $t>0$), и пусть u, v — координаты точки $f(P)$, где f — стереографическая проекция. Вычислим связь между этими координатами в явном виде. Из рис. 15 видно, что

$$\frac{x}{u}=\frac{t+R}{R},\quad \frac{y}{v}=\frac{t+R}{R},$$

откуда $x=u(1+t/R)$, $y=v(1+t/R)$. Подставляя x и y в уравнение поверхности $t^2-x^2-y^2=0$, получим

$$t=-R\left(1+\frac{2R^2}{u^2+v^2-R^2}\right), \tag{5}$$

откуда

$$x=\frac{2R^2u}{R^2-u^2-v^2},\quad y=\frac{2R^2v}{R^2-u^2-v^2}. \tag{6}$$

Формулы (5) и (6) — искомые формулы для стереографической проекции. Теперь можно найти вид метрики (4) на псевдосфере в координатах (u, v). Непосредственное вычисление показывает, что

$$-dl^2=-(dt^2-dx^2-dy^2)=\frac{4R^4}{(u^2+v^2-R^2)^2}(du^2+dv^2). \tag{7}$$

Опять (как и для сферы S^2) метрика псевдосферы в координатах u, v пропорциональна метрике евклидовой плоскости. Метрика (7) на круге $u^2+v^2<R^2$, взятая со знаком минус, называется метрикой модели Пуанкаре геометрии Лобачевского. Если ввести на круге $u^2+v^2<R^2$ полярные координаты (r, φ), то метрика Лобачевского запишется в виде

$$dl^2=\frac{4R^4}{(R^2-r^2)^2}(dr^2+r^2\,d\varphi^2). \tag{8}$$

Очевидна аналогия с метрикой сферы S^2 (см. (9.4)).

Соберем различные виды метрик сферы S^2 и плоскости Лобачевского L^2 в одну таблицу ($R=1$):

S^2	L^2
$d\theta^2+\sin^2\theta\,(d\varphi)^2$	$d\chi^2+\operatorname{sh}^2\chi\,(d\varphi)^2$
$4\dfrac{dx^2+dy^2}{(1+x^2+y^2)^2}$	$4\dfrac{dx^2+dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}$, $x^2+y^2<1$

Рассмотрим еще одну форму записи метрики Лобачевского. Из теории функций комплексного переменного хорошо известно, что существует дробно-линейное преобразование комплексной плоскости, переводящее верхнюю полуплоскость в единичный круг. Укажем одно из таких преобразований: $z=(1+iw)/(1-iw)$ (рис. 16). Если мы положим $z=u+iv$, $w=x+iy$, то тем самым мы введем на единичном круге новые координаты (x, y), где $y>0$. Непосредственное вычисление показывает, что метрика Лобачевского в координатах (x, y) принимает вид

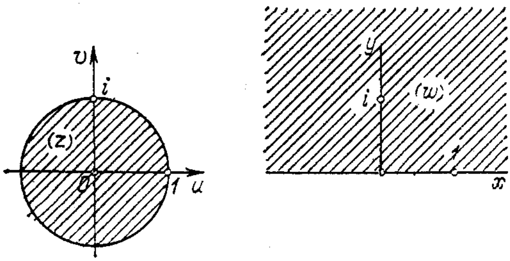

Рис. 16

$$dl^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}, \quad y>0. \tag{9}$$

Метрика (9) называется метрикой модели Клейна геометрии Лобачевского.

Найдем группу движений плоскости Лобачевского. Любое псевдоортогональное преобразование пространства $\mathbb{R}_1^3$ (см. § 6, п. 2) сохраняет форму $t^2-x^2-y^2$ и поэтому переводит псевдосферу $t^2-x^2-y^2=R^2$ в себя. Но преобразование из $O(1, 2)$ может менять местами верхнюю и нижнюю половину псевдосферы. Следовательно, группа движений плоскости Лобачевского содержит группу ортохронных преобразований из $O(1, 2)$. В гл. 4 будет показано, что эти группы совпадают. Таким образом, плоскость Лобачевского, так же как сфера и евклидова плоскость, имеет трехпараметрическую совокупность движений.

2. Кривизна пространственноподобных поверхностей в $\mathbb{R}_1^3$. Будем говорить, что поверхность в $\mathbb{R}_1^3$ пространственноподобна, если любой касательный к ней вектор пространственноподобен. Другими словами, метрика Минковского $dl^2=dt^2-dx^2-dy^2$ индуцирует на поверхности отрицательно определенную метрику.

Для случая, когда поверхность задана как график функции $t=f(x, y)$, метрика на поверхности имеет вид

$$-dl^2=-(dt^2-dx^2-dy^2)=$$
$$=\left(1-f_x^2\right)dx^2-2f_xf_ydx\,dy+\left(1-f_y^2\right)dy^2=g_{ij}dx^i\,dx^j,$$
$$x^1=x, \quad x^2=y.$$

Имеем: $\det g_{ij}=1-f_x^2-f_y^2$; условие пространственноподобности имеет вид $\det g_{ij}=1-f_x^2-f_y^2>0$. Единичный вектор нормали к поверхности имеет вид $m=(1, f_x, f_y)\Big/\sqrt{1-f_x^2-f_y^2}$ (времениподобен). Вторая квадратичная форма поверхности определена равенством

$$b_{ij} = \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j}, m \right\rangle, \quad i, j = 1, 2.$$

Введем гауссову кривизну K пространственноподобной поверхности, полагая

$$K = -\frac{\det b_{ij}}{\det g_{ij}}. \tag{10}$$

Для поверхностей, заданных уравнением $t = f(x, y)$, $1 - f_x^2 - f_y^2 > 0$, по аналогии с § 8 будем иметь

$$K = \frac{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}{(1 - f_x^2 - f_y^2)^2}. \tag{11}$$

В частности, для гиперболоида $t^2 - x^2 - y^2 = 1$ (геометрия Лобачевского) получаем $K \equiv -1$.

Замечания. 1. В гл. 4 будет вычислена кривизна плоскости Лобачевского, исходя из внутренней геометрии. Мы снова получим $K \equiv -1$; это объясняет выбор знака в определении (10).

2. Как и в § 8, получаем: пространственноподобные поверхности отрицательной гауссовой кривизны $K < 0$ в пространстве $\mathbb{R}_1^3$ являются выпуклыми.

§ 11. Комплексный язык в геометрии

1. Комплексные и вещественные координаты. Во многих задачах геометрии удобно пользоваться комплексным языком. В связи с этим мы изложим здесь нужные нам простейшие факты.

Пусть задано n-мерное линейное пространство $\mathbb{C}^n$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ с базисом $e_1, \ldots, e_n$. Любой вектор $\xi \in \mathbb{C}^n$ имеет вид

$$\xi = z^k e_k, \quad z^k = x^k + i y^k, \tag{1}$$

где z^k — комплексные координаты. Пространство $\mathbb{C}^n$ можно рассматривать как $2n$-мерное линейное пространство $\mathbb{R}^{2n}$ над полем вещественных чисел, где базис в $\mathbb{R}^{2n}$ задается так:

$$e_1, \ldots, e_n, \quad ie_1, \ldots, ie_n. \tag{2}$$

Тогда имеем

$$\xi = z^k e_k = x^k e_k + y^k (ie_k), \tag{3}$$

где $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$ — вещественные координаты вектора ξ. Описанная операция называется *овеществлением*.

Комплексно линейные невырожденные преобразования пространства $\mathbb{C}^n$ образуют группу $GL(n, \mathbb{C})$. Это — группа комплексных матриц размером $n \times n$ с определителем, не равным нулю.