подобен). Вторая квадратичная форма поверхности определена равенством

$$b_{ij} = \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j}, m \right\rangle, \quad i, j = 1, 2.$$

Введем гауссову кривизну K пространственноподобной поверхности, полагая

$$K = -\frac{\det b_{ij}}{\det g_{ij}}. \tag{10}$$

Для поверхностей, заданных уравнением $t = f(x, y)$, $1 - f_x^2 - f_y^2 > 0$, по аналогии с § 8 будем иметь

$$K = \frac{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}{(1 - f_x^2 - f_y^2)^2}. \tag{11}$$

В частности, для гиперболоида $t^2 - x^2 - y^2 = 1$ (геометрия Лобачевского) получаем $K \equiv -1$.

Замечания. 1. В гл. 4 будет вычислена кривизна плоскости Лобачевского, исходя из внутренней геометрии. Мы снова получим $K \equiv -1$; это объясняет выбор знака в определении (10).

2. Как и в § 8, получаем: пространственноподобные поверхности отрицательной гауссовой кривизны $K < 0$ в пространстве $\mathbb{R}_1^3$ являются выпуклыми.

§ 11. Комплексный язык в геометрии

1. Комплексные и вещественные координаты. Во многих задачах геометрии удобно пользоваться комплексным языком. В связи с этим мы изложим здесь нужные нам простейшие факты.

Пусть задано n-мерное линейное пространство $\mathbb{C}^n$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ с базисом $e_1, \ldots, e_n$. Любой вектор $\xi \in \mathbb{C}^n$ имеет вид

$$\xi = z^k e_k, \quad z^k = x^k + i y^k, \tag{1}$$

где z^k — комплексные координаты. Пространство $\mathbb{C}^n$ можно рассматривать как $2n$-мерное линейное пространство $\mathbb{R}^{2n}$ над полем вещественных чисел, где базис в $\mathbb{R}^{2n}$ задается так:

$$e_1, \ldots, e_n, \quad ie_1, \ldots, ie_n. \tag{2}$$

Тогда имеем

$$\xi = z^k e_k = x^k e_k + y^k (ie_k), \tag{3}$$

где $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$ — вещественные координаты вектора ξ. Описанная операция называется *овеществлением*.

Комплексно линейные невырожденные преобразования пространства $\mathbb{C}^n$ образуют группу $GL(n, \mathbb{C})$. Это — группа комплексных матриц размером $n \times n$ с определителем, не равным нулю.

При овеществлении каждое такое преобразование дает некоторое линейное преобразование вещественного пространства $\mathbb{R}^{2n}$. Получаем таким образом *отображение овеществления*

$$GL(n, \mathbb{C}) \to GL(2n, \mathbb{R}). \tag{4}$$

Пример. Пусть $n = 1$. Мы имеем тогда одномерное комплексное пространство с координатой $z = x + iy$. Линейные преобразования пространства $\mathbb{C}$ — это умножения на комплексные числа $\lambda \neq 0$:

$$z \mapsto \lambda z. \tag{5}$$

Если $\lambda = a + ib$, $a^2 + b^2 \neq 0$, то получим

$$z = x + iy \mapsto (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay).$$

Таким образом, соответствующее преобразование пространства $\mathbb{R}^2$ задается матрицей вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = r(\lambda), \quad a^2 + b^2 \neq 0. \tag{6}$$

Видно, что заведомо не любое линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^2$ получается из комплексно линейных преобразований пространства $\mathbb{C}$.

Аналогично нетрудно показать, что если в n-мерном случае Λ — матрица из $GL(n, \mathbb{C})$, причем $\Lambda = A + iB$, где A и B — вещественные матрицы, то при отображении $r: GL(n, \mathbb{C}) \to GL(2n, \mathbb{R})$ получается матрица

$$r(\Lambda) = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Задача. Докажите, что определитель матрицы $r(\Lambda)$ имеет вид $\det(r(\Lambda)) = |\det \Lambda|^2$.

Замечание. Укажем другое описание образа отображения $:r\ GL(n, \mathbb{C}) \to GL(2n, \mathbb{R})$. Если $\Lambda \in GL(n, \mathbb{C})$ — комплексно линейное преобразование, то для любого вектора ξ имеем

$$\Lambda(i\xi) = i\Lambda(\xi). \tag{8}$$

При овеществлении умножение на i делается линейным преобразованием I в $2n$-мерном вещественном пространстве. Имеем

$$r(i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } 1 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Матрица оператора $I = r(i)$ умножения на i в базисе (2) имеет вид (9), так как

$$i(e_k) = ie_k, \quad i(ie_k) = -e_k.$$

Из (8) вытекает, что матрица I коммутирует с матрицей $r(\Lambda)$. Это и означает комплексность оператора.

В $GL(n, \mathbb{C})$ есть подгруппа матриц с определителем 1, обозначаемая $SL(n, \mathbb{C})$.

2. Эрмитово скалярное произведение. Скалярное произведение в пространстве $\mathbb{C}^n$ задается на комплексном языке следующим образом:

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{k=1}^{n} z_1^k \bar{z}_2^k, \quad \langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{k=1}^{n} |z^k|^2. \tag{10}$$

Оно обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered} \langle \lambda\xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}} = \lambda \langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}}, \\ \langle \xi, \lambda\eta \rangle_{\mathbb{C}} = \bar{\lambda} \langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}}, \\ \langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}} = \overline{\langle \eta, \xi \rangle}_{\mathbb{C}}, \\ \langle \xi_1 + \xi_2, \eta \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \xi_1, \eta \rangle_{\mathbb{C}} + \langle \xi_2, \eta \rangle_{\mathbb{C}}, \\ \langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{C}} > 0 \text{ при } \xi \neq 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Любое скалярное произведение со свойствами (11) называется *эрмитовым*.

В овеществленном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ можно также ввести евклидово скалярное произведение: если $\xi_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^n, y_1^1, \ldots \ldots, y_1^n)$, $\xi_2 = (x_2^1, \ldots, x_2^n, y_2^1, \ldots, y_2^n)$, то

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{k=1}^{n} (x_1^k x_2^k + y_1^k y_2^k). \tag{12}$$

Покажем, что эрмитово скалярное произведение связано с евклидовым следующим образом:

$$\operatorname{Re} \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathbb{R}}, \tag{13}$$

где Re означает действительную часть комплексного числа. Действительно, имеем

$$\operatorname{Re} \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathbb{C}} = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} (x_1^k + iy_1^k)(x_2^k - iy_2^k) = \sum_{k=1}^{n} (x_1^k x_2^k + y_1^k y_2^k).$$

В частности, из формулы (10) вытекает, что эрмитов скалярный квадрат вектора совпадает с евклидовым:

$$\langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}}. \tag{14}$$

Пусть $\Lambda \in GL(n, \mathbb{C})$ — комплексное невырожденное линейное преобразование.

Определение 1. Λ называется *унитарным*, если

$$\langle \Lambda\xi_1, \Lambda\xi_2 \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathbb{C}}. \tag{15}$$

Пусть в базисе $e_1, \ldots, e_n$, в котором эрмитово скалярное произведение имеет вид (10), Λ задается матрицей $\Lambda = (\lambda_h^l)$. Тогда из условия унитарности имеем

$$\sum_{h=1}^{n} \lambda_h^l \bar{\lambda}_h^{l'} = \delta^{ll'} \tag{16}$$

или, в матричной форме,

$$\bar{\Lambda}^{\mathsf{T}} \Lambda = 1 \leftrightarrow \bar{\Lambda}^{\mathsf{T}} = \Lambda^{-1} \tag{17}$$

(T означает транспонирование). Унитарные матрицы Λ образуют группу, которая обозначается через $U(n)$ и называется *унитарной группой.* Из (17) вытекает, что

$$\det(\bar{\Lambda}^{\mathsf{T}} \Lambda) = (\overline{\det \Lambda})(\det \Lambda) = |\det \Lambda|^2 = 1.$$

Таким образом, унитарные матрицы имеют детерминант, по модулю равный единице. В группе $U(n)$ есть подгруппа $SU(n)$ унитарных матриц с определителем единица.

Замечание. Можно заметить, по аналогии с § 4, что $U(n)$ есть группа движений эрмитовой метрики в $\mathbb{C}^n$.

Рассмотрим образ $r(U(n))$ в группе $GL(2n, \mathbb{R})$. Из формулы (13) вытекает, что если $\Lambda \in U(n)$, т. е. Λ сохраняет эрмитов скалярный квадрат, то матрица $r(\Lambda)$ сохраняет евклидов скалярный квадрат в $\mathbb{R}^{2n}$. Таким образом, образ $r(U(n))$ унитарной группы в $GL(2n, \mathbb{R})$ имеет вид

$$r(U(n)) = SO(2n) \cap r(GL(n, \mathbb{C})). \tag{18}$$

Аналогично псевдоевклидовым пространствам можно рассмотреть псевдоэрмитовы пространства $\mathbb{C}^n_{p,q}$, $p + q = n$, где квадрат длины вектора ξ с координатами $(z^1, \ldots, z^n)$ задается формулой

$$\langle \xi, \xi \rangle_{p,q} = |z^1|^2 + \ldots + |z^p|^2 - \ldots - |z^n|^2. \tag{19}$$

Группа комплексных линейных преобразований, сохраняющих форму (19), обозначается $U(p, q)$, а ее подгруппа, составленная из матриц с определителем единица,— $SU(p, q)$.

3. Примеры групп комплексных преобразований. Мы видели выше, что группа $GL(1, \mathbb{C})$ — это группа ненулевых комплексных чисел (по умножению). Группа $U(1)$ состоит из всех комплексных чисел, по модулю равных единице: $U(1) = \{e^{i\varphi}\}$. Заметим, что $r(e^{i\varphi}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, так что отображение r определяет изоморфизм групп $U(1)$ и $SO(2)$.

Рассмотрим теперь группу $SL(2, \mathbb{C})$. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$, т. е. $ad - bc = 1$. Поставим в соответствие матрице A дробнолинейное преобразование (расширенной) комплексной плоскости $\mathbb{C}$:

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}. \tag{20}$$

Если $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ — другая матрица с определителем единица, то имеем

$$z'' = \frac{a'z'+b'}{c'z'+d'} = \frac{(a'a+b'c)\,z + a'b + b'd}{(c'a+d'c)\,z + c'b + d'd},$$

т. е. построенное отображение представляет собой гомоморфизм

$$\varphi\colon\ SL(2, \mathbb{C}) \mapsto L, \tag{21}$$

где L — группа дробно-линейных преобразований. Нетрудно видеть, что ядро гомоморфизма φ состоит из двух матриц: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, причем φ отображает $SL(2, \mathbb{C})$ на всю группу L («эпиморфно»). Поэтому

$$L = SL(2, \mathbb{C})/\pm 1. \tag{22}$$

Рассмотрим теперь группу $U(2)$. Если матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ принадлежит $U(2)$, то

$$|a|^2 + |b|^2 = 1, \quad |c|^2 + |d|^2 = 1, \quad a\bar{c} + b\bar{d} = 0. \tag{23}$$

Ее подгруппа $SU(2)$ выделяется дополнительным условием $ad - bc = 1$. Таким образом, группа $SU(2)$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{24}$$

Другой пример — группа $SU(1, 1)$. Она состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} c & d \\ \bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix}, \quad |c|^2 - |d|^2 = 1. \tag{25}$$

Заметим, что $c \neq 0$ (так как $|c| \geqslant 1$).

Существует отображение $SU(1, 1) \to SU(2)$, определяемое формулой

$$\begin{pmatrix} c & d \\ \bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1/c & d/\bar{c} \\ -\bar{d}/c & 1/\bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Обратное отображение определено при $a \neq 0$. Это отображение не является групповым гомоморфизмом.