§ 12. Аналитические функции

1. Комплексная запись элемента длины и дифференциала функции. Пусть задана кривая в пространстве $\mathbb{C}^n$ в комплексных координатах (z^k), имеющая вид

$$z^k = z^k(t) = x^k(t) + iy^k(t). \tag{1}$$

Тогда в вещественных координатах (x^k, y^k) мы получаем кривую $x^1(t), \ldots, x^n(t), y^1(t), \ldots, y^n(t)$. Ее длина имеет вид

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\dot{x}^k)^2 + (\dot{y}^k)^2}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \dot{z}^k \dot{\bar{z}}^k}\, dt. \tag{2}$$

В пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ удобно перейти от координат (x^k, y^k) к комплексным координатам $z^k, \bar{z}^k, k = 1, \ldots, n$, полагая

$$\begin{gathered} z^k = x^k + iy^k, \qquad \bar{z}^k = x^k - iy^k, \\ x^k = \frac{1}{2}\left(z^k + \bar{z}^k\right), \quad y^k = \frac{1}{2i}\left(z^k - \bar{z}^k\right). \end{gathered} \tag{3}$$

Тогда элемент длины в комплексной форме запишется так:

$$dl^2 = \sum_{k=1}^{n} dz^k d\bar{z}^k, \tag{4}$$

где положено

$$dz^k = dx^k + i\,dy^k, \quad d\bar{z}^k = dx^k - i\,dy^k. \tag{5}$$

Введем операторы в пространстве комплекснозначных функций на $\mathbb{C}^n$

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - i\frac{\partial}{\partial y^k}\right), \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} + i\frac{\partial}{\partial y^k}\right). \end{gathered} \tag{6}$$

Очевидно, имеем

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial z^k} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}, \\ \frac{\partial}{\partial y^k} = i\left(\frac{\partial}{\partial z^k} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}\right). \end{gathered} \tag{7}$$

Отметим, что имеют место следующие тождества:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}(z^k) = \frac{\partial}{\partial z^k}(\bar{z}^k) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z^k}(z^k) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}(\bar{z}^k) = 1. \end{gathered} \tag{8}$$

Из формул (6), (7) вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *Дифференциал любой комплекснозначной функции* $f(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$ *имеет вид*

$$df = \frac{\partial f}{\partial z^1} dz^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z^n} dz^n + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^1} d\bar{z}^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^n} d\bar{z}^n. \qquad (9)$$

Рассмотрим теперь произвольный многочлен с комплексными коэффициентами $P(x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n)$ от переменных $x^1, \ldots, x^n$, $y^1, \ldots, y^n$. Совершив замену переменных (3), мы получим из многочлена $P(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$ многочлен $Q(z^1, \ldots, z^n, \bar{z}^1, \ldots, \bar{z}^n)$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Многочлен* $Q(z, \bar{z}) = P(x, y)$ *тогда и только тогда зависит от переменных* $z^1, \ldots, z^n$ *и не зависит от* $\bar{z}^1, \ldots, \bar{z}^n$, *когда выполнены тождества*

$$\frac{\partial P}{\partial \bar{z}^k} \equiv 0, \qquad k = 1, \ldots, n. \qquad (10)$$

Доказательство. Операторы $\frac{\partial}{\partial z^k}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}$ обладают следующим очевидным свойством (формула Лейбница):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z^k}(fg) &= \frac{\partial f}{\partial z^k} g + f \frac{\partial g}{\partial z^k}, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}(fg) &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^k} g + f \frac{\partial g}{\partial \bar{z}^k}. \end{aligned} \qquad (11)$$

Далее, используя формулы (8), отсюда получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}[(z^k)^m] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}\left[(\bar{z}^k)^m\right] = m(\bar{z}^k)^{m-1}. \qquad (12)$$

Отсюда сразу получаем, что если $P(x, y) = Q(z, \bar{z})$ не зависит от $\bar{z}^k$, то $\frac{\partial P}{\partial \bar{z}^k} \equiv 0$.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть многочлен P зависит от $\bar{z}^k$, причем максимальная степень, с которой $\bar{z}^k$ входит в P, равна m. Покажем, что $\frac{\partial P}{\partial \bar{z}^k} \neq 0$.

Многочлен P имеет вид

$$P = A_0(\bar{z}^k)^m + A_1(\bar{z}^k)^{m-1} + \ldots + A_m,$$

где $A_0, \ldots, A_m$ — многочлены от всех переменных $z^1, \ldots, z^n$ и всех $\bar{z}^q$, кроме $\bar{z}^k$. Поэтому $\frac{\partial A_i}{\partial \bar{z}^k} \equiv 0$, $i = 0, \ldots, m$ (A_i не зависят от $\bar{z}^k$). Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} P = A_0 m (\bar{z}^k)^{m-1} + A_1 (m-1)(\bar{z}^k)^{m-2} + \ldots$$

Так как $A_0 \not\equiv 0$, то $\frac{\partial P}{\partial \bar{z}^k} \not\equiv 0$. Теорема доказана.

Замечание. Теорема применима не только к многочленам, но и к сходящимся степенным рядам: независимость от переменных $\bar{z}^k$ эквивалентна условиям $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^k} \equiv 0$.

Определение 1. *Комплексно аналитической* называется функция $f(x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n)$, для которой выполнены тождества

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^k} \equiv 0, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Для функций двух вещественных переменных $f(x, y) = f(z, \bar{z})$, где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, условие аналитичности (независимости от $\bar{z}$) имеет вид

$$2\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0. \tag{14}$$

Если $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, то условие (14) запишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{15}$$

Уравнения (15) называются *уравнениями Коши — Римана*. Из (15), очевидно, следует, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \tag{16}$$

Следовательно, вещественная и мнимая части комплексно аналитической функции суть решения уравнения Лапласа (т. е. гармонические функции): $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar{z}}$ — оператор Лапласа.

2. Комплексные замены координат. Пусть в некоторой области n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ заданы два набора комплексных координат

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 + iy^1, \ \ldots, \quad z^n = x^n + iy^n, \\ w^1 &= u^1 + iv^1, \ \ldots, \quad w^n = u^n + iv^n. \end{aligned} \tag{17}$$

Тогда координаты $w^k = x^k + iy^k$ задаются в виде функций от координат $z^k = x^k + iy^k$:

$$w^k = w^k(x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n), \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

Определение 2. Замена координат (18) называется *комплексно аналитической*, если

$$\frac{\partial w^k}{\partial \bar{z}^l} \equiv 0, \quad k, l = 1, \ldots, n. \tag{19}$$

Для комплексно аналитической замены координат (18) можно ввести матрицу Якоби $\left(a_l^k\right)$, положив

$$a_l^k = \frac{\partial w^k}{\partial z^l}, \quad k, \ l=1, \ \ldots, \ n. \tag{20}$$

Определитель матрицы $\left(a_l^k\right)$ называется *комплексным якобианом* замены (18):

$$J_{\mathbb{C}} = \det\left(a_l^k\right). \tag{21}$$

Замена (18) в овеществленном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ дает замену

$$\begin{gathered} u^k = u^k(x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n), \quad v^k = v^k(x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n), \\ k = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{22}$$

Пусть

$$J_{\mathbb{R}} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \tag{23}$$

— (вещественный) якобиан замены (22).

Оказывается, комплексный и вещественный якобианы связаны весьма просто.

Лемма 2. *Для комплексно аналитической замены координат имеет место следующее равенство:*

$$J_{\mathbb{R}} = |J_{\mathbb{C}}|^2.$$

Доказательство. Пусть $A = \left(a_l^k\right) = \left(\dfrac{\partial w^k}{\partial z^l}\right)$ —(комплексная) матрица Якоби, $J_{\mathbb{C}} = \det A$. Найдем вещественную матрицу Якоби для перехода от координат $z^1, \ldots, z^n, \bar{z}^1, \ldots, \bar{z}^n$ в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ к координатам $w^1, \ldots, w^n, \bar{w}^1, \ldots, \bar{w}^n$. Из условия комплексной аналитичности имеем

$$\frac{\partial w^k}{\partial z^l} = a_l^k, \quad \frac{\partial w^k}{\partial \bar{z}^l} = \frac{\partial \bar{w}^k}{\partial z^l} = 0, \quad \frac{\partial \bar{w}^k}{\partial \bar{z}^l} = \bar{a}_l^k.$$

Поэтому искомая матрица Якоби имеет вид $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}$. Ее определитель равен

$$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix} = |\det A|^2 = |J_{\mathbb{C}}|^2.$$

Заметим теперь, что переход от координат $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n$ к координатам $z^1, \ldots, z^n, \bar{z}^1, \ldots, \bar{z}^n$ или от (u, v) к координатам $(w, \bar{w})$ задается матрицей

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & i & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & & i \\ \hline 1 & & 0 & -i & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & & -i \end{array}\right), \quad \det B = (-2i)^n,$$

Тогда

$$J_{\mathbb{R}} = \det\left(B^{-1}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A}\end{pmatrix} B\right) = |J_{\mathbb{C}}|^2.$$

Следствие. *Если (комплексный) якобиан замены (18) отличен от нуля, то локально можно выразить обратно z через w:*

$$z^k = z^k(w^1, \ldots, w^n), \quad k = 1, \ldots, n,$$

причем обратные функции $z^k(w)$ комплексно аналитичны.

Доказательство. Функции $z^k(w, \overline{w})$ существуют в силу вещественной теоремы об обратном отображении (см. § 1). Матрица Якоби для замены (в $\mathbb{R}^{2n}$) $(w, \overline{w}) \to (z, \overline{z})$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & \overline{A}^{-1}\end{pmatrix},$$

что и доказывает следствие.

Пример. При $n = 1$ замена (18) имеет вид

$$w = w(z), \quad \frac{\partial w}{\partial \overline{z}} \equiv 0. \tag{24}$$

Эта замена обратима всюду, где $\frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$.

Под *преобразованием* в комплексном случае всегда будем понимать взаимно однозначное отображение одной области пространства $\mathbb{C}^n$ на другую, задаваемое комплексно аналитическими функциями.

Примеры преобразований при $n = 1$. 1) Комплексные аффинные преобразования

$$w(z) = az + b, \quad a \neq 0. \tag{25}$$

При таком преобразовании $\frac{dw}{dz} = a \neq 0$.

Напомним (§ 4, п. 2), что с вещественной точки зрения преобразования (25) дают движения плоскости вместе с растяжениями, сохраняющие ориентацию.

2) Дробно-линейные преобразования

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0 \tag{26}$$

(можно считать, что $ad - bc = 1$). В этом случае

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{(cz + d)^2} \neq 0. \tag{27}$$

Строго говоря, преобразование (26) не определено при $z = -\frac{d}{c}$. Можно считать (пока чисто формально), что отображение (26) задано в расширенной комплексной плоскости, где комплексная прямая $\mathbb{C}$ дополнена одной бесконечно удаленной точкой ∞, причем

$$-\frac{d}{c}\mapsto\infty,\quad \infty\mapsto\frac{a}{c}. \tag{28}$$

Например, преобразование

$$w=\frac{1+iz}{1-iz} \tag{29}$$

переводит верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ в единичный круг $|w|<1$. Мы использовали это отображение в § 10 при построении модели Клейна геометрии Лобачевского.

3. Поверхности в комплексном пространстве. Мы рассмотрим простейший случай одномерных поверхностей (комплексных кривых) в двумерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^2$. Такая кривая задается в пространстве $\mathbb{C}^2$ с координатами (w, z) уравнением

$$f(w, z) \tag{30}$$

где $f(w, z)$ — комплексно аналитическая функция переменных w, z. Уравнение (30) есть система двух вещественных уравнений $u=0$, $v=0$, где $f=u+iv$, и поэтому задает двумерную поверхность в $\mathbb{C}^2=\mathbb{R}^4$. Введем комплексный градиент $\operatorname{grad}_{\mathbb{C}} f$, полагая

$$\operatorname{grad}_{\mathbb{C}} f=\left(\frac{\partial f}{\partial w}, \frac{\partial f}{\partial z}\right). \tag{31}$$

Точка (w_0, z_0) на кривой (30) называется неособой, если $\operatorname{grad}_{\mathbb{C}} f|_{z_0,w_0}\neq 0$. Имеет место следующий комплексный аналог теоремы о неявных функциях (который мы приводим без доказательства).

Теорема 2. *Пусть $f(w, z)$ — комплексно аналитическая функция переменных w, z, причем в точке w_0, z_0 с $f(w_0, z_0)=0$ градиент $\operatorname{grad}_{\mathbb{C}} f$ отличен от нуля. Пусть, например, $\frac{\partial f}{\partial w}\neq 0$. Тогда в достаточно малой окрестности точки (w_0, z_0) уравнение $f(w, z)=0$ имеет единственное и при этом комплексно аналитическое решение $w=w(z)$, так что $f(w(z), z)=0$, $w_0=w(z_0)$, $\frac{\partial w}{\partial \bar z}\equiv 0$.*

Пример. Пусть $f(w, z)$ — многочлен от двух переменных. Тогда полная совокупность решений уравнения $f(w, z)=0$ вида $w=w(z)$ называется *многозначной алгебраической функцией*, а сама поверхность (комплексная кривая) $f(w, z)=0$ называется *графиком* или *римановой поверхностью* этой многозначной функции *).

*) Это — упрощенный вариант общепринятого определения римановой поверхности (см., например, [16]). Наше определение равносильно общепринятому в случае, если поверхность $f(w, z)=0$ не имеет особых точек и самопересечений.

Важный частный случай — *гиперэллиптические* кривые, т. е. римановы поверхности, задаваемые уравнением

$$f(w, z) = w^2 - P_n(z) = 0, \tag{32}$$

где $P_n(z)$ — многочлен n-й степени. Это — график алгебраической функции $w = \sqrt{P_n(z)}$.

Лемма 3. *Поверхность* (32) *неособа тогда и только тогда, когда многочлен* $P_n(z)$ *не имеет кратных корней.*

Доказательство. Вычислим градиент функции f:

$$\operatorname{grad}_{\mathbb{C}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial w}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(2w, -\frac{dP_n(z)}{dz}\right).$$

Если $\operatorname{grad}_{\mathbb{C}} f$ обращается в нуль на поверхности (32), то

$$2w = 0, \quad \frac{dP_n(z)}{dz} = 0, \quad w^2 - P_n(z) = 0.$$

Отсюда вытекает, что особая точка имеет координаты $(0, z_0)$, где z_0 — общий корень многочлена $P_n(z)$ и его производной $\frac{dP_n}{dz}$. Отсутствие таких общих корней и эквивалентно отсутствию кратных корней у многочлена $P_n(z)$. Лемма доказана.

На поверхности (32) на основании комплексной теоремы о неявной функции можно ввести локальную координату z в тех точках, где $\frac{\partial f}{\partial w} = 2w \neq 0$, т. е. где $P_n(z) \neq 0$. Если $P_n(z) = 0$, то $\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{dP_n(z)}{dz} \neq 0$. В окрестности таких точек можно в качестве локальной координаты взять w.

Вернемся к случаю произвольной неособой комплексно аналитической кривой $f(w, z) = 0$. Пусть $\left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_{(w_0, z_0)} \neq 0$ в некоторой точке (w_0, z_0). Тогда $w = w(z)$, $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \equiv 0$. Эрмитова метрика dl^2 в $\mathbb{C}^2$

$$dl^2 = dw\, d\bar{w} + dz\, d\bar{z} \tag{33}$$

на поверхности $f(w, z) = 0$ превращается в

$$dl^2 = dw\, d\bar{w} + dz\, d\bar{z} = \left(1 + \left|\frac{dw}{dz}\right|^2\right) dz\, d\bar{z}. \tag{34}$$

Если $z = x + iy$, то на поверхности $f(w, z) = 0$ квадрат элемента длины примет вид

$$dl^2 = g(z, \bar{z})\, dz\, d\bar{z} = g(x, y)(dx^2 + dy^2), \tag{35}$$

где $g(z, \bar{z}) = 1 + \left|\frac{dw}{dz}\right|^2$ в разобранном случае.

Определение 3. Координаты (x, y), в которых метрика на поверхности имеет вид $dl^2 = g(x, y)(dx^2 + dy^2)$, называются *конформными.*

Имеет место простая

Лемма 4. *Конформный вид метрики инвариантен (только) относительно комплексно аналитических замен координат и их суперпозиций с комплексным сопряжением.*

Доказательство. Пусть для координаты z метрика имеет вид

$$dl^2 = g(z, \bar{z})\, dz\, d\bar{z}.$$

Пусть $z = z(w)$, $\frac{\partial z}{\partial \bar{w}} \equiv 0$. Тогда

$$dz = \left(\frac{dz}{dw}\right) dw, \quad d\bar{z} = \overline{\left(\frac{dz}{dw}\right)} d\bar{w}$$

и

$$dl^2 = g(z, \bar{z})\, dz\, d\bar{z} = g\left(w, \bar{w}), \overline{z(w, \bar{w})}\right) \left|\frac{dz}{dw}\right|^2 dw\, d\bar{w}.$$

Если $\frac{\partial z}{\partial w} = 0$, то доказательство полностью аналогично. Если же $z = z(w, \bar{w})$, $\frac{\partial z}{\partial w} \neq 0$, $\frac{\partial z}{\partial \bar{w}} \neq 0$, то легко видеть, что метрика dl^2 в переменных w, $\bar{w}$ будет иметь вид

$$dl^2 = g\, dz\, d\bar{z} = g\left|\frac{\partial z}{\partial w} dw + \frac{\partial z}{\partial \bar{w}} d\bar{w}\right|^2 =$$
$$= g\left(a_{11}(dx')^2 + 2a_{12}dx'\, dy' + a_{22}(dy')^2\right),$$

где $w = x' + iy'$; очевидно, здесь $a_{12} \neq 0$. Лемма доказана.

§ 13. Конформный вид метрик поверхностей

1. Изотермические координаты. Гауссова кривизна в конформных координатах. Пусть двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$ задана параметрически:

$$x = x(p, q), \quad y = y(p, q), \quad z = z(p, q), \tag{1}$$

где p, q изменяются в некоторой области пространства $\mathbb{R}^2$. Тогда на поверхности возникает индуцированная метрика

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = E(dp)^2 + 2F\, dp\, dq + G(dq)^2, \tag{2}$$

$g = EG - F^2 > 0$. Заменами локальных координат (p, q) на поверхности метрику dl^2 можно привести к конформному виду. Именно, имеет место ([1])

Теорема 1. *Пусть E, F, G — (вещественно) аналитические функции переменных (p, q). Тогда можно ввести новые локальные*