Определение 3. Координаты (x, y), в которых метрика на поверхности имеет вид $dl^2=g(x, y)(dx^2+dy^2)$, называются *конформными*.

Имеет место простая

Лемма 4. *Конформный вид метрики инвариантен (только) относительно комплексно аналитических замен координат и их суперпозиций с комплексным сопряжением.*

Доказательство. Пусть для координаты z метрика имеет вид

$$dl^2=g(z, \bar z)\,dz\,d\bar z.$$

Пусть $z=z(w)$, $\dfrac{\partial z}{\partial \bar w}\equiv 0$. Тогда

$$dz=\left(\frac{dz}{dw}\right)dw,\quad d\bar z=\overline{\left(\frac{dz}{dw}\right)}d\bar w$$

и

$$dl^2=g(z, \bar z)\,dz\,d\bar z=g\left(w, \bar w), \overline{z(w, \bar w)}\right)\left|\frac{dz}{dw}\right|^2 dw\,d\bar w.$$

Если $\dfrac{\partial z}{\partial w}=0$, то доказательство полностью аналогично. Если же $z=z(w, \bar w)$, $\dfrac{\partial z}{\partial w}\neq 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial \bar w}\neq 0$, то легко видеть, что метрика dl^2 в переменных w, $\bar w$ будет иметь вид

$$dl^2=g\,dz\,d\bar z=g\left|\frac{\partial z}{\partial w}dw+\frac{\partial z}{\partial \bar w}d\bar w\right|^2=$$
$$=g\left(a_{11}(dx')^2+2a_{12}dx'\,dy'+a_{22}(dy')^2\right),$$

где $w=x'+iy'$; очевидно, здесь $a_{12}\neq 0$. Лемма доказана.

§ 13. Конформный вид метрик поверхностей

1. Изотермические координаты. Гауссова кривизна в конформных координатах. Пусть двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$ задана параметрически:

$$x=x(p, q),\quad y=y(p, q),\quad z=z(p, q), \tag{1}$$

где p, q изменяются в некоторой области пространства $\mathbb{R}^2$. Тогда на поверхности возникает индуцированная метрика

$$dx^2+dy^2+dz^2=E(dp)^2+2F\,dp\,dq+G(dq)^2, \tag{2}$$

$g=EG-F^2>0$. Заменами локальных координат (p, q) на поверхности метрику dl^2 можно привести к конформному виду. Именно, имеет место ([1])

Теорема 1. *Пусть E, F, G — (вещественно) аналитические функции переменных (p, q). Тогда можно ввести новые локальные* *координаты u, v такие, что в этих координатах метрика dl^2 примет следующий вид:*

$$dl^2 = f(u, v)(du^2 + dv^2). \tag{3}$$

Замечание. Такие координаты называются *изотермическими* или *конформными*. Таким образом, в изотермических координатах метрика имеет конформный вид в смысле предыдущего параграфа.

Изотермические координаты определяются неоднозначно, как было выяснено в лемме 12.4. Рассмотрим две системы изотермических координат (p, q) и (u, v), и пусть $u = u(p, q)$, $v = v(p, q)$.

Мы знаем, что если замена сохраняет конформный вид метрики, то функция $w(z, \bar{z})$ является комплексно аналитической функцией переменной z или $\bar{z}$. Таким образом, полная совокупность преобразований, сохраняющих конформный вид метрики в изотермических координатах, получается добавлением ко всевозможным комплексно аналитическим преобразованиям $w(z)$ комплексного сопряжения $z \mapsto z'$.

Пример. Рассмотрим плоскость $\mathbb{C}$ с комплексной координатой $z = x + iy$. Евклидова метрика $dl^2 = dx^2 + dy^2$ имеет конформный вид, т. е.

$$dl^2 = dz\, d\bar{z}. \tag{4}$$

Рассмотрим произвольное дробно-линейное преобразование

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1. \tag{5}$$

Тогда имеем

$$dl^2 = dz\, d\bar{z} = |cz + d|^4 dw\, d\bar{w}, \tag{6}$$

т. е. дробно-линейные преобразования сохраняют конформный вид евклидовой метрики плоскости.

Пусть поверхность в трехмерном евклидовом пространстве задана в конформных координатах u, v так, что метрика на поверхности имеет вид

$$dl^2 = g(u, v)(du^2 + dv^2). \tag{7}$$

Выведем формулу для гауссовой кривизны в конформных координатах.

Теорема 2. *Гауссова кривизна поверхности в $\mathbb{R}^3$ с метрикой (7) имеет вид*

$$K = -\frac{1}{2g} \Delta \ln g, \tag{8}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ — оператор Лапласа.

Доказательство. Пусть поверхность задана в параметрическом виде: $r = r(u, v)$, $r = (x, y, z)$. Тогда условие (7) означает, что

$$\langle r_u, r_u\rangle = \langle r_v, r_v\rangle = g, \quad \langle r_u, r_v\rangle = 0. \tag{9}$$

Дифференцируя эти равенства по u, v, будем иметь

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u} = \langle r_{uu}, r_u\rangle = \langle r_{uv}, r_v\rangle, \\
\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial v} = \langle r_{vv}, r_v\rangle = \langle r_{uv}, r_u\rangle, \\
\langle r_{uu}, r_v\rangle + \langle r_u, r_{uv}\rangle = 0 = \langle r_{uv}, r_v\rangle + \langle r_u, r_{vv}\rangle.
\end{gathered} \tag{10}$$

Введем единичные векторы e_1, e_2, n, полагая

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{g}} r_u, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{g}} r_v, \quad n = [e_1, e_2]. \tag{11}$$

Репер (e_1, e_2, n) в каждой точке поверхности ортонормирован, и при этом вектор n нормален поверхности, а векторы e_1, e_2 ее касаются. По определению коэффициенты второй квадратичной формы имеют вид

$$b_{11} = L = \langle r_{uu}, n\rangle, \quad b_{12} = M = \langle r_{uv}, n\rangle, \quad b_{22} = \langle r_{vv}, n\rangle = N. \tag{12}$$

Из формул (10) и (12) следует, что векторы r_{uu}, r_{uv}, r_{vv} в базисе e_1, e_2, n имеют координаты

$$\begin{aligned}
r_{uu} &= \left(\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial u}, -\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial v}, L\right), \\
r_{uv} &= \left(\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial v}, \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial u}, M\right), \\
r_{vv} &= \left(-\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial v}, N\right).
\end{aligned} \tag{13}$$

Следовательно, имеет место формула

$$\langle r_{uu}, r_{vv}\rangle - \langle r_{uv}, r_{uv}\rangle = LN - M^2 - \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2\right]. \tag{14}$$

Из формул (10), (14) получаем

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &= \langle r_{uuv}, r_v\rangle + \langle r_{uv}, r_{uv}\rangle = \\
&= \frac{\partial}{\partial v}\langle r_{uu}, r_v\rangle - \langle r_{uu}, r_{vv}\rangle + \langle r_{uv}, r_{uv}\rangle = \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} - (LN - M^2) + \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Отсюда, согласно (8.26), для гауссовой кривизны будем иметь

$$K = \frac{LN - M^2}{g^2} = \frac{\det(b_{ij})}{\det(g_{ij})} = -\frac{1}{2g}\Delta \ln g.$$

Теорема доказана.

Если метрика (7) записана в комплексном виде:

$$dl^2 = g(z, \bar{z})\,dz\,d\bar{z},$$

то формула (8) для гауссовой кривизны примет вид

$$K = -\frac{2}{g}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \bar{z}}\ln g. \qquad (15)$$

2. Метрики сферы и плоскости Лобачевского в конформном виде. В действительности конформные координаты для сферы уже были найдены в § 9. Рассмотрим сферу радиуса $R=1$ и ее стереографическую проекцию на экваториальную плоскость с координатами (x, y). Напомним, что в координатах (x, y) метрика сферы dl^2 имела вид (формула 9.4))

$$dl^2 = 4\frac{dx^2+dy^2}{(1+x^2+y^2)^2}. \qquad (16)$$

Если $z = x+iy$, $\bar{z} = x-iy$, то формула (16) примет вид

$$dl^2 = \frac{4}{(1+|z|^2)^2}\,dz\,d\bar{z}, \qquad (17)$$

где z — координата на комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Для плоскости Лобачевского мы имели формулу для dl^2 в координатах $(x; y)$ стереографической проекции (формула (10.7) при $R=1$):

$$dl^2 = \frac{4}{(1-(x^2+y^2))^2}(dx^2+dy^2). \qquad (18)$$

В комплексной записи формула (18) примет вид

$$dl^2 = \frac{4}{(1-|z|^2)^2}\,dz\,d\bar{z}, \quad |z|<1, \qquad (19)$$

где z — комплексная координата в единичном круге (метрика модели Пуанкаре). Если мы отобразим единичный круг на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$, полагая $z=\frac{1+iw}{1-iw}$, то метрика плоскости Лобачевского примет вид

$$dl^2 = -\frac{4}{(w-\bar{w})^2}\,dw\,d\bar{w}, \quad \operatorname{Im} w>0 \qquad (20)$$

(метрика модели Клейна).

Выясним, как устроены группы движений этих метрик в комплексной реализации. Мы видели в предыдущем пункте, что дробно-линейные преобразования заведомо сохраняют конформный вид метрики. Будем искать движения наших метрик среди дробно-линейных преобразований (мы докажем в гл. 4, что других движений нет)

$$z = \frac{aw+b}{cw+d}, \quad ad-bc=1. \qquad (21)$$

Для метрики сферы будем иметь

$$dl^2 = \frac{4dz\,d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2} = \frac{4dw\,d\bar{w}}{[|aw+b|^2+|cw+d|^2]^2} =$$
$$= \frac{4dw\,d\bar{w}}{[|b|^2+|d|^2+w(a\bar{b}+c\bar{d})+\bar{w}(\bar{a}b+\bar{c}d)+(|a|^2+|c|^2)|w|^2]^2}. \qquad (22)$$

Чтобы преобразование (21) было движением метрики сферы (17), должны выполняться, стало быть, такие равенства:

$$|b|^2+|d|^2=1, \quad a\bar{b}+c\bar{d}=0, \quad |a|^2+|c|^2=1, \qquad (23)$$

причем мы считаем, что $ad-bc=1$.

Таким образом, матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ лежит в $SU(2)$. Напомним (§ 11, п. 3), что при отождествлении группы $SL(2, \mathbb{C})$ с группой всех дробно-линейных преобразований мы должны перейти к факторгруппе по подгруппе (± 1). Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 3. *Дробно-линейная группа (собственных) движений метрики сферы S^2 изоморфна факторгруппе $SU(2)/\pm 1$.*

Следствие. *Имеет место изоморфизм групп $SU(2)/\pm 1 \approx \approx SO(3)$.* (Проверьте с помощью стереографической проекции!)

Замечание. Чтобы получить полную совокупность движений сферы, мы должны добавить к вращениям еще и отражения. Это соответствует присоединению к дробно-линейным преобразованиям $z=\frac{aw+b}{cw+d}$, где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2)$, комплексного сопряжения $z \mapsto \bar{z}$.

Перейдем к плоскости Лобачевского. Начнем с модели Пуанкаре. Вычисление, аналогичное предыдущему, показывает, что после преобразования (21) будем иметь

$$dl^2 =$$
$$= \frac{4dz\,d\bar{z}}{(1-|z|^2)^2} = \frac{4dw\,d\bar{w}}{[|d|^2-|b|^2+(c\bar{d}-a\bar{b})w+(\bar{a}b-\bar{c}d)\bar{w}+(|c|^2-|a|^2)|w|^2]^2}.$$

Следовательно, должны выполняться условия

$$|d|^2-|b|^2=1, \quad |c|^2-|a|^2=-1, \quad c\bar{d}-a\bar{b}=0, \qquad (24)$$

причем $ad-bc=1$. Таким образом, мы получаем, что матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ лежит в группе $SU(1, 1)$. Заметим, что выполнение условий (24) гарантирует, что при дробно-линейном преобразовании $z=\frac{aw+b}{cw+d}$ единичный круг переходит в себя, так как его граничная окружность $|z|=1$ переходит в окружность $|w|=1$.

Рассмотрим теперь модель Клейна. Отыщем прежде всего преобразования вида (21), переводящие верхнюю полуплоскость

$\operatorname{Im} z > 0$ в себя. Для этого должно выполняться условие:

$$\text{если } \operatorname{Im} w = 0, \text{ то } \operatorname{Im} z = 0. \tag{25}$$

Нетрудно видеть, что если w вещественно и $z = \frac{aw+b}{cw+d}$, то мнимая часть $\operatorname{Im} z$ имеет вид

$$\operatorname{Im} z = w^2 \operatorname{Im}(a\bar{c}) + w \operatorname{Im}(b\bar{c} + a\bar{d}) + \operatorname{Im}(b\bar{d}).$$

В силу произвольности w должны выполняться равенства

$$\operatorname{Im} a\bar{c} = \operatorname{Im}(b\bar{c} + a\bar{d}) = \operatorname{Im}(b\bar{d}) = 0.$$

Тем самым из требования (25) уже вытекает, что a, b, c, d — вещественные числа. Все преобразования (21) с вещественными a, b, c, d оказываются движениями метрики Лобачевского в модели Клейна: $dl^2 = \frac{4dz\,d\bar{z}}{-(z-\bar{z})^2}$. Вычисления, аналогичные разобранным выше случаям, мы приводить не будем. Замечательно, что все дробно-линейные преобразования, сохраняющие область определения метрики Лобачевского, автоматически оказываются движениями. Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 4. *Дробно-линейная группа* (*собственных*) *движений метрики Лобачевского изоморфна*:

а) *группе* $SU(1, 1)/\pm 1$ *в модели Пуанкаре*,

б) *группе* $SL(2, \mathbb{R})/\pm 1$ *в модели Клейна*,

в) *группе* $SO(1, 2)$ (*точнее, ее связной компоненте*).

Следствие. *Группы* $SU(1, 1)/\pm 1$, $SL(2, \mathbb{R})\pm 1$ *и связная компонента группы* $SO(1, 2)$ *изоморфны*. (Проверьте заменой координат!)

Замечание. Чтобы получить полную группу движений в модели Пуанкаре, нужно присоединить к дробно-линейным преобразованиям комплексное сопряжение $z \mapsto \bar{z}$ (очевидно, оно переводит единичный круг в себя и дает движение метрики (19)).

В модели Клейна следует добавить преобразование $z \mapsto -\bar{z}$, переводящее в себя верхнюю полуплоскость и дающее движение метрики (20).

3. Поверхности постоянной кривизны. Пусть метрика поверхности записана в комплексном виде: $dl^2 = g(z, \bar{z})\,dz\,d\bar{z}$. Полагая $g = e^{\varphi}$, будем иметь для гауссовой кривизны (формулы (8), (15))

$$K = -\frac{1}{2} e^{-\varphi} \Delta\varphi, \quad K = -2e^{-\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\, \partial \bar{z}}. \tag{26}$$

Если кривизна K постоянна, то для функции φ получаем уравнение (Лиувилля)

$$\Delta\varphi = -2Ke^{\varphi}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\, \partial \bar{z}} = -\frac{K}{2} e^{\varphi}. \tag{27}$$

Теорема 5. *Поверхность с метрикой* $dl^2 = g(z, \bar{z})\,dz\,d\bar{z}$ *постоянной кривизны* $K = \mathrm{const}$ *(локально) изометрична*: а) *сфере при* $K > 0$; б) *евклидовой плоскости при* $K = 0$; в) *плоскости Лобачевского при* $K < 0$.

Доказательство. Из (26) будем иметь

$$0 = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{K}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{-\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial\bar{z}}\right) = e^{-\varphi}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^2\,\partial\bar{z}} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial\bar{z}}\right) =$$

$$= e^{-\varphi}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right),$$

откуда $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = \psi(z)$, где $\psi(z)$ — аналитическая функция. Сделав комплексно аналитическую замену $z = f(w)$, получим

$$g(z, \bar{z}) \to g\left|\frac{df}{dw}\right|^2, \quad \varphi \to \tilde{\varphi}(w, \bar{w}) = \varphi(z, \bar{z}) + \ln\frac{df}{dz} + \ln\frac{d\bar{f}}{d\bar{z}}.$$

В новых переменных мы также будем иметь $\dfrac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial w^2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial w}\right)^2 = \tilde{\psi}(w)$, где $\tilde{\psi}(w)$ — аналитическая функция от w, для которой получаем выражение

$$\tilde{\psi}(w) = \psi(z)(f')^2 + \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

Здесь $f' = \dfrac{df}{dw}$. Можно выбрать функцию f так, чтобы функция $\tilde{\psi}(w)$ обратилась в нуль. Для этого нужно решить уравнение

$$\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = -\psi(f(w))(f')^2 \tag{28}$$

(левая часть этого уравнения в теории функций комплексного переменного называется «производная Шварца»)*).

После сделанной замены получим

$$\frac{\partial^2 e^{-\varphi/2}}{\partial w^2} = -\frac{1}{2}e^{-\varphi/2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2\right) = 0. \tag{29}$$

Из вещественности $e^{-\varphi/2}$ получаем также

$$\frac{\partial^2 e^{-\varphi/2}}{\partial\bar{w}^2} = 0. \tag{30}$$

Из (29) и (30) следует

$$e^{-\varphi/2} = aw\bar{w} + bw + \bar{b}\bar{w} + c,$$

*) Разрешимость этого уравнения в рамках данной книги постулируется.

где a, c — вещественные константы, b — комплексная. Получим метрику вида

$$dl^2 = g(z, \bar{z})\,dz\,d\bar{z} = \frac{dw\,d\bar{w}}{(aw\bar{w} + bw + \bar{b}\bar{w} + c)^2}. \tag{31}$$

Кривизна этой метрики равна $K = 4(ac - b\bar{b})$. Форму (31) дробно-линейными преобразованиями $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ можно привести к виду:

а) $\frac{4R^2 dz\,d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}$, $\quad K = 4(ac - b\bar{b}) = R^{-2} > 0$;

б) $dz\,d\bar{z}$, $\quad K = 4(ac - b\bar{b}) = 0$;

в) $\frac{4R^2\,dz\,d\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}$, $\quad K = 4(ac - b\bar{b}) = -R^{-2} < 0$.

Получаем метрики сферы, евклидовой плоскости и плоскости Лобачевского. Теорема доказана.

Задача. Пусть метрика имеет вид

$$dl^2 = dx^2 + f(x)\,dy^2, \quad 0 < f(x) < \infty.$$

Доказать, что метрика приводится к конформному виду

$$dl^2 = g(u, v)\,(du^2 + dv^2).$$

§ 14. Группы преобразований как поверхности в N-мерном пространстве

1. Координаты в окрестности единицы. Рассмотрим группу матриц $GL(n, \mathbb{R})$ с детерминантом, не равным нулю:

$$A = (a^i_j), \quad \det(a^i_j) \neq 0. \tag{1}$$

Условие (1) задает область в пространстве всех матриц, обозначаемом через $M(n, \mathbb{R})$. Это — линейное пространство размерности n^2. Таким образом, полная линейная группа есть область в линейном пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$. Координатами в пространстве $M(n, \mathbb{R})$ служат матричные элементы a^i_j. Если $A = (a^i_j)$, $B = (b^i_j)$ — две матрицы n-го порядка, то их произведение $C = AB$ имеет вид $C = (c^i_j)$,

$$c^i_j = a^i_k b^k_j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Из формулы (2) вытекает, что координаты произведения двух матриц выражаются через координаты сомножителей при помощи гладких функций (которые даже являются многочленами от координат). Другими словами, закон умножения определяет гладкое