где a, c — вещественные константы, b — комплексная. Получим метрику вида

$$dl^2 = g(z, \bar{z})\,dz\,d\bar{z} = \frac{dw\,d\bar{w}}{(aw\bar{w} + bw + \bar{b}\bar{w} + c)^2}. \tag{31}$$

Кривизна этой метрики равна $K = 4(ac - b\bar{b})$. Форму (31) дробно-линейными преобразованиями $w = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ можно привести к виду:

а) $\dfrac{4R^2 dz\,d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}$, $\quad K = 4(ac - b\bar{b}) = R^{-2} > 0$;

б) $dz\,d\bar{z}$, $\quad K = 4(ac - b\bar{b}) = 0$;

в) $\dfrac{4R^2\,dz\,d\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}$, $\quad K = 4(ac - b\bar{b}) = -R^{-2} < 0$.

Получаем метрики сферы, евклидовой плоскости и плоскости Лобачевского. Теорема доказана.

Задача. Пусть метрика имеет вид

$$dl^2 = dx^2 + f(x)\,dy^2, \quad 0 < f(x) < \infty.$$

Доказать, что метрика приводится к конформному виду

$$dl^2 = g(u, v)\,(du^2 + dv^2).$$

§ 14. Группы преобразований как поверхности в N-мерном пространстве

1. Координаты в окрестности единицы. Рассмотрим группу матриц $GL(n, \mathbb{R})$ с детерминантом, не равным нулю:

$$A = (a^i_j), \quad \det(a^i_j) \neq 0. \tag{1}$$

Условие (1) задает область в пространстве всех матриц, обозначаемом через $M(n, \mathbb{R})$. Это — линейное пространство размерности n^2. Таким образом, полная линейная группа есть область в линейном пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$. Координатами в пространстве $M(n, \mathbb{R})$ служат матричные элементы a^i_j. Если $A = (a^i_j)$, $B = (b^i_j)$ — две матрицы n-го порядка, то их произведение $C = AB$ имеет вид $C = (c^i_j)$,

$$c^i_j = a^i_k b^k_j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Из формулы (2) вытекает, что координаты произведения двух матриц выражаются через координаты сомножителей при помощи гладких функций (которые даже являются многочленами от координат). Другими словами, закон умножения определяет гладкое отображение прямого произведения:

$$GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R}),$$

где $(A, B) \mapsto AB$.

Введем в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$ всех матриц n-го порядка евклидову метрику, полагая

$$|A|^2 = \sum_{i,j} |a^i_j|^2, \quad A = (a^i_j). \tag{3}$$

Очевидно, будем иметь

$$|A + B| \leqslant |A| + |B|. \tag{4}$$

По отношению к произведению матриц метрика (3) обладает следующим свойством.

Лемма 1. *Имеет место неравенство*

$$|AB| \leqslant |A||B|. \tag{5}$$

Доказательство. Это вытекает из следующего неравенства:

$$(\sum x_i y_i)^2 \leqslant (\sum x_i^2)(\sum y_i^2)^2 \tag{6}$$

[вывод неравенства (6): $\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right) - \left(\sum x_i y_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum (x_i y_j - x_j y_i)^2$]. Лемма доказана.

Построим другую удобную систему координат в окрестности единичной матрицы $1 \in GL(n, \mathbb{R})$. Рассмотрим в пространстве всех матриц единичный шар (без границы) $|X| < 1$, $X = (x^i_j)$.

Лемма 2. *Если* $|X| < 1$, *то матрица* $A = 1 + X$ *обратима*,

$$A = 1 + X \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Доказательство. Рассмотрим ряд из матриц вида

$$B = 1 - X + X^2 - X^3 + \ldots \tag{7}$$

Покажем, что этот ряд сходится. Используя неравенства (4) и (5), будем иметь

$$|X^m - X^{m+1} + X^{m+2} - \ldots \pm X^{m+k-1}| \leqslant$$
$$\leqslant |X^m| \cdot |1 + |X| + \ldots + |X|^{k-1}| = |X|^m \frac{1 - |X|^k}{1 - |X|}.$$

Поэтому последовательность частичных сумм ряда (7) фундаментальна при $|X| < 1$ и этот ряд сходится. Но в то же время

$$AB = (1 + X)(1 - X + X^2 - X^3 + \ldots) = 1, \ B = A^{-1}.$$

Лемма доказана.

Введем координаты на окрестности единицы в группе $GL(n,\mathbb{R})$, задаваемой условиями

$$|A-1|<1. \tag{8}$$

Если $A=(a^i_j)$, то координата x^i_j матрицы A равна

$$x^i_j(A)=a^i_j-\delta^i_j, \quad x^i_j(1)=0, \tag{9}$$

$$\delta^i_j=\begin{cases}1 & \text{при } i=j,\\ 0 & \text{при } i\neq j.\end{cases}$$

Замечание. Аналогично можно ввести координаты в окрестности с центром в произвольной точке B_0, $B_0\in GL(n,\mathbb{R})$. Действительно, если мы все матрицы в этой окрестности умножим на B_0^{-1}, то окрестность переедет в окрестность единицы, где координаты уже построены. Формально эта процедура задается так: если $C=B_0^{-1}=(c^i_j)$, то положим

$$\begin{aligned} y^i_j(A)&=c^i_k a^k_j-\delta^i_j,\\ y^i_j(B_0)&=0. \end{aligned} \tag{10}$$

Координаты y^i_j пригодны для таких матриц A, что

$$|A-B_0|<|B_0|. \tag{11}$$

Таким образом, мы построили для группы $GL(n,\mathbb{R})$ локальные координаты в окрестности произвольной точки.

Касательное пространство в единице к группе $GL(n,\mathbb{R})$ естественно отождествляется с пространством всех матриц n-го порядка. Рассмотрим кривую $A(t)\in GL(n,\mathbb{R})$, т. е. семейство матриц $A(t)$, зависящих от параметра t. Пусть эта кривая проходит через единицу при $t=0$, т. е. $A(0)=1$. Тогда касательный вектор (вектор скорости) этой кривой при $t=0$ — это матрица $\dot{A}(t)|_{t=0}$. Наоборот, пусть X — любая матрица. Тогда кривая $A(t)=1+tX$ при t, достаточно близких к нулю, лежит в $GL(n,\mathbb{R})$. Очевидно, что

$$A(0)=1, \quad \dot{A}(0)=X;$$

тем самым доказано совпадение совокупности всех векторов, касательных в единице к группе $GL(n,\mathbb{R})$, и совокупности всех матриц n-го порядка.

Рассмотренные в §§ 4 и 6 группы преобразований задавались уравнениями в пространстве всех матриц. Так, группа $SL(n,\mathbb{R})$ матриц n-го порядка с определителем 1 задается одним уравнением

$$\det A=1. \tag{12}$$

Это — гиперповерхность в пространстве всех матриц, целиком лежащая в $GL(n,\mathbb{R})$.

Теорема 1. $SL(n, \mathbb{R})$ — *неособая поверхность в пространстве всех матриц.*

Доказательство. Докажем сначала, что $1 \in SL(n, \mathbb{R})$ — неособая точка этой гиперповерхности. Для этого достаточно доказать (см. § 7, п. 2), что касательное пространство к $SL(n, \mathbb{R})$ в этой точке имеет размерность точно $n^2 - 1$. Действительно, пусть $\det A(t) = 1$, причем $A(0) = 1$, и $\frac{d}{dt} A(t)|_{t=0} = X$. По правилу дифференцирования определителя имеем

$$0 = \frac{d}{dt}(\det A(t))|_{t=0} = \operatorname{Sp} X,$$

где Sp обозначает след. Поэтому $\operatorname{Sp} X = 0$ — уравнение касательного пространства к $SL(n, \mathbb{R})$ в точке 1 (напомним, что коэффициентами этого уравнения служат элементы матрицы Якоби $\partial \det A/\partial a_j^i$, $A = (a_j^i)$, при $A = 1$). Итак, мы доказали, что касательное пространство в единице к группе $SL(n, \mathbb{R})$ совпадает с совокупностью матриц со следом 0. Размерность пространства таких матриц равна $n^2 - 1$. Поэтому точка 1 на группе — это неособая точка в $SL(n, \mathbb{R})$. Далее, пусть B — любая точка группы $SL(n, \mathbb{R})$ — произвольная унимодулярная матрица. Умножим все матрицы, лежащие в окрестности матрицы B, на B^{-1}. Тогда B перейдет в 1, и эта окрестность сдвинется в окрестность единицы. Это отображение — гладкое и невырожденное; поэтому точка B является неособой. Теорема доказана.

Использованный здесь метод, основанный на исследовании касательного пространства в единице группы, мы применим и для других матричных групп. При этом мы всегда будем доказывать только неособость соответствующей поверхности в точке 1. (Из доказательства теоремы 1 видно, что этого достаточно.)

Рассмотрим теперь группу $O(n)$ ортогональных матриц n-го порядка. Соответствующая поверхность в $\mathbb{R}^{n^2}$ задается системой уравнений

$$\sum_k a_k^i a_k^j = \delta^{ij}, \quad A^{\mathrm{T}} A = 1, \quad A = (a_j^i). \tag{13}$$

Среди уравнений (13) есть, очевидно, совпадающие, которые получаются при перестановке индексов i и j. Остается $n(n+1)/2$ уравнений. Мы должны показать, что ранг этой системы уравнений равен $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$. Это означает, что размерность касательного пространства к группе $O(n)$ равна $n(n-1)/2$. Докажем, что касательное пространство к $O(n)$ в единице совпадает с пространством всех кососимметрических матриц. Если $A(t) \in O(n)$, $A(0) = 1$ — семейство ортогональных матриц, $X = \frac{d}{dt} A(t)|_{t=0}$, то $0 = \frac{d}{dt}(A^{\mathrm{T}}(t) A(t))_{t=0} = X^{\mathrm{T}} + X = 0$ (ср. § 5, п. 3). Это и есть уравнение касательного пространства в единице группы $O(n)$, совпадающего с пространством кососимметрических матриц. Ясно, что размерность пространства всех кососимметрических матриц равна $n(n-1)/2$ (в качестве декартовых координат в этом пространстве можно взять матричные элементы x_j^i с $i<j$). Отсюда следует неособость поверхности $O(n)$.

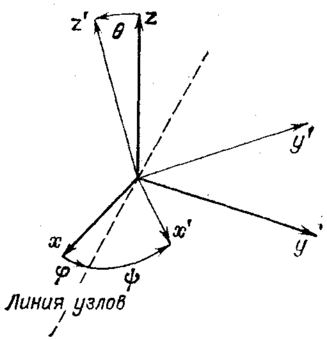

Рис. 17

В частности, группа $SO(n)$, которая есть связная компонента группы $O(n)$, также есть неособая поверхность в пространстве матриц $\mathbb{R}^{n^2}$.

Пример. Рассмотрим группу $SO(3)$ вращений трехмерного пространства. В качестве локальных координат на этой неособой поверхности можно взять известные из аналитической геометрии углы Эйлера. Если вращение переводит систему координат (x, y, z) в (x', y', z') (рис. 17), то такое вращение можно представить в виде последовательного выполнения трех:

а) Вращение на угол φ вокруг оси z. При этом ось x перейдет в линию узлов.

б) Вращение на угол θ вокруг линии узлов. Ось z переходит в ось z'.

в) Вращение на угол ψ вокруг оси z'. Линия узлов переходит в ось x'.

Можно ввести и другие локальные координаты на $SO(3)$. Каждое вращение можно задать, указав ось вращения и угол вращения φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Ось можно считать направленной: мы считаем, что вращение вокруг оси на угол φ происходит против часовой стрелки. Каждое вращение можно задать, таким образом, вектором $\bar{\varphi}$: направление вектора $\bar{\varphi}$ задает ось вращения, модуль $|\bar{\varphi}|$ — угол вращения. Таким образом, любой точке группы $SO(3)$ соответствует точка из шара радиуса π в трехмерном пространстве — конец вектора $\bar{\varphi}$. Поскольку вращения на угол π и на угол $-\pi$ совпадают, то на поверхности этого шара — двумерной сфере радиуса π — пары диаметрально противоположных точек изображают одно и то же вращение из группы $SO(3)$.

В такой системе координат единица группы совпадает с началом координат, а касательное пространство в единице совпадает с самим трехмерным векторным пространством.

Рассмотрим теперь комплексный случай. Группа $GL(n, \mathbb{C})$ — область в пространстве $M(n, \mathbb{C})$ всех матриц. $M(n, \mathbb{C})$ — это комплексное пространство $\mathbb{C}^{n^2}$ размерности n^2. С вещественной точки зрения это — область в пространстве $\mathbb{R}^{2n^2}$. Группа $SL(n, \mathbb{C})$ — это комплексная поверхность размерности n^2-1 (вещественная размерность равна $2n^2-2$). Касательное пространство группы $SL(n, \mathbb{C})$ в точке 1 также совпадает с пространством комплексных матриц со следом нуль.

Рассмотрим теперь унитарную группу $U(n)$. Она задается в пространстве всех комплексных матриц n-го порядка уравнениями

$$f^{ij}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_k^i \bar{a}_k^j = \delta^{ij}, \quad A = (a_j^i), \text{ или } A\bar{A}^{\mathrm{T}} = 1. \tag{14}$$

Мы видим, что функции $f^{ij}(A)$ не являются комплексно аналитическими: $\dfrac{\partial f^{ij}}{\partial \bar{a}_k^j} \neq 0$. Поэтому группа $U(n)$ не является комплексной поверхностью. Докажем ее неособость. Каждое уравнение $f^{ij} = \delta^{ij}$ в вещественном смысле задает два уравнения

$$\operatorname{Re} f^{ij} = \delta^{ij}, \quad \operatorname{Im} f^{ij} = 0.$$

Заметим, что имеют место тождества

$$f^{ij} = \bar{f}^{ji},$$

поэтому уравнения $f^{ij} = 0$ и $f^{ji} = 0$ при $i \neq j$ эквивалентны. Кроме того, $\operatorname{Im} f^{ii} = 0$. Поэтому уравнение $f^{ii} = 1$ дает только одно вещественное условие на матрицу A. Получаем таким образом $n + 2\dfrac{n(n-1)}{2} = n^2$ различных вещественных уравнений. Нужно доказать, что касательное пространство в единице к группе $U(n)$ имеет (вещественную) размерность $2n^2 - n^2 = n^2$. Это пространство совпадает с совокупностью всех косоэрмитовых матриц n-го порядка:

$$\bar{X}^{\mathrm{T}} = -X. \tag{15}$$

Действительно, если $A(t) \in U(n)$, $A(0) = 1$, то

$$A(t) \cdot \bar{A}^{\mathrm{T}}(t) = 1, \quad \left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=0} = X,$$

$$0 = \frac{d}{dt}(A\bar{A}^{\mathrm{T}})\big|_{t=0} = X + \bar{X}^{\mathrm{T}}.$$

Размерность пространства всех косоэрмитовых матриц равна n^2. Декартовы координаты в нем таковы: $\frac{1}{i} x_k^k$, $k = 1, \ldots, n$, $\operatorname{Re} x_j^i$, $\operatorname{Im} x_j^i$ при $i < j$.

Группа $SU(n)$ унитарных матриц с определителем 1 также представляет собой неособую вещественную поверхность размерности $n^2 - 1$. Ее касательное пространство в единице совпадает с пространством всех косоэрмитовых матриц со следом нуль.

Пример. Рассмотрим группу $SU(2)$. Мы видели (§ 11, п. 3), что матрицы из $SU(2)$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2+|b|^2=1.$$

Если $a=x+iy$, $b=u+iv$, то уравнение $|a|^2+|b|^2=1$ задает трехмерную сферу радиуса 1 в четырехмерном пространстве с координатами x, y, u, v.

2. Экспонента от матрицы. Пусть T — касательное пространство в единице к группе $GL(n, \mathbb{R})$. Построим отображение касательного пространства на саму группу:

$$\exp\colon\ T \to GL(n, \mathbb{R}), \quad \exp(0)=1, \tag{16}$$

полагая

$$\exp X = 1+\frac{X}{1!}+\frac{X^2}{2!}+\ldots \tag{17}$$

Лемма 3. 1) *Ряд (17) сходится для всех матриц X.*

2) *Если матрицы X и Y коммутируют, $XY=YX$, то*

$$\exp(X+Y)=(\exp X)(\exp Y). \tag{18}$$

3) *Матрица $A=\exp X$ обратима и*

$$A^{-1}=\exp(-X). \tag{19}$$

4) $\exp(X^T)=(\exp X)^T$.

Доказательство. Используя неравенства (4) и (5), для ряда (17) будем иметь

$$\left|\frac{X^m}{m!}+\frac{X^{m+1}}{(m+1)!}+\ldots+\frac{X^{m+k-1}}{(m+k-1)!}\right|<\frac{|X|^m}{m!}+\ldots+\frac{|X|^{m+k-1}}{(m+k-1)!}.$$

Но ряд $e^{|X|}$ сходится при всех значениях $|X|$. Поэтому последовательность частичных сумм ряда (17) фундаментальна при всех $|X|$ и этот ряд сходится. Докажем формулу (18). Используя перестановочность матриц X и Y, получим

$$\exp X \exp Y = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{Y^l}{l!}\right)=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\sum_{k+l=m}\frac{m!}{k!\,l!}X^kY^l\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(X+Y)^m=\exp(X+Y).$$

Формула (19) вытекает из (18), так как матрицы X и $Y=-X$ коммутируют и $\exp(0)=1$. Утверждение 4) очевидно. Лемма доказана.

Пусть G — одна из рассмотренных выше матричных групп ($G=GL(n, \mathbb{R})$, $O(n)$, $U(n)$ и т. д.). Пусть T — касательное пространство к группе G в единице. Покажем, что отображение exp переводит T в G.

Лемма 4. 1) *Если* $G=SL(n,\mathbb{R})$ *и* $X\in T$, *т. е.* $\operatorname{Sp} X=0$, *то* $A=\exp X\in SL(n, R)$, *т. е.* $\det A=1$.

2) *Если* $G=O(n)$ *и* $X\in T$, *т. е. матрица* X *кососимметрична, то* $A=\exp X\in O(n)$, *т. е. матрица* A *ортогональна.*

3) *Если* $G=U(n)$ *и* $X\in T$, *т. е. матрица* X *косоэрмитова, то* $A=\exp X\in U(n)$, *т. е. матрица* A *унитарна.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{Sp} X=0$. Рассмотрим семейство матриц вида

$$A(t)=\exp(tX),$$

t — параметр. В силу леммы 3 имеем

$$A(t_1+t_2)=A(t_1)A(t_2)$$

(матрицы t_1X и t_2X коммутируют). Если $f(t)=\det A(t)=\det\exp(tX)$, то $f(t_1+t_2)=f(t_1)f(t_2)$. Следовательно, $f(t)=e^{ct}$, где c — константа. Покажем, что $c=0$. Имеем: $f(t)=\det\exp(tX)=\det(1+tX+o(t))=t\operatorname{Sp} X+o(t)$. Если $\operatorname{Sp} X=0$, то $c=\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0}=0$. Утверждение 1) доказано.

Пусть матрица X кососимметрична:

$$X^{\mathrm{T}}=-X.$$

Тогда матрицы X и X^{T} коммутируют между собой. Пусть $A=\exp X$. Тогда в силу леммы 3 будем иметь

$$A^{\mathrm{T}}A=(\exp X)^{\mathrm{T}}\exp X=\exp\left(X^{\mathrm{T}}+X\right)=1,\qquad A\in O(n).$$

Утверждение 2) доказано.

Пусть теперь матрица X косоэрмитова:

$$\overline{X}^{\mathrm{T}}=-X$$

(черта означает комплексное сопряжение). Пусть $A=\exp X$. Тогда опять в силу леммы 3 будем иметь

$$\overline{A}^{\mathrm{T}}A=\overline{\exp X}^{\mathrm{T}}\exp X=\exp\overline{X}^{\mathrm{T}}\exp X=$$
$$=\exp\left(X+\overline{X}^{\mathrm{T}}\right)=1,\qquad A\in U(n).$$

Лемма доказана.

Из леммы 4 вытекает, что для групп $G=SO(n)$, $SU(n)$ экспонента $\exp X$ также лежит в G, если матрица X лежит в T.

Лемма 5. *В некоторой окрестности начала координат отображение* $\exp X$ *взаимно однозначно.*

Доказательство. Достаточно проверить, что якобиан отображения exp отличен от нуля в точке 0 (в начале координат).

Пусть $A = (a^i_j) = \exp X$, $X = (x^i_j)$. Имеем

$$\frac{\partial a^k_l}{\partial x^i_j} = \delta^k_i \delta^j_l + \ldots,$$

где многоточием обозначены члены, обращающиеся в нуль при $X = 0$. Таким образом, матрица Якоби отображения exp имеет вид: $\left.\left(\frac{\partial a^k_l}{\partial x^i_j}\right)\right|_{x=0} = \delta^k_i \delta^j_l$. Это — единичная матрица порядка n^2, что и доказывает лемму.

Отображение exp позволяет ввести удобные локальные координаты в окрестности единицы группы: координатами здесь служат декартовы координаты (x^i_j) в окрестности нуля в касательном пространстве T. Явная формула для координат x^i_j такова: если A лежит в окрестности единицы группы G, то

$$x^i_j(A) = (\ln A)^i_j = \left[(A-1) - \frac{(A-1)^2}{2} + \frac{(A-1)^3}{3} - \ldots\right]^i_j. \tag{20}$$

В целом отображение exp может не быть взаимно однозначным (даже не быть отображением на всю группу G — см. ниже задачу 3).

З а м е ч а н и е. Рассмотрим в пространстве T прямую, проходящую через начало координат, т. е. семейство матриц вида tX, t — параметр. Тогда семейство матриц $A(t) = \exp(tX)$ образует *однопараметрическую подгруппу*

$$\begin{gathered} A(s)A(t) = A(s+t), \qquad A(0) = 1, \\ A(-t) = A^{-1}(t). \end{gathered} \tag{21}$$

П р и м е р. В группе $SO(3)$ для произвольной оси имеется очевидная однопараметрическая подгруппа вращений вокруг этой оси. Заметим, что $A(t+2\pi) = A(t)$. Для вращений вокруг оси z имеем

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp\left[t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right].$$

3. Кватернионы. Множество кватернионов — это совокупность $\mathbb{H}$ линейных комбинаций с вещественными коэффициентами вида

$$q \in \mathbb{H}, \quad q = a + bi + cj + dk, \tag{22}$$

где i, j, k — некоторые линейно независимые символы. Введем билинейное умножение в $\mathbb{H}$, положив

$$\begin{gathered} ij = k = -ji, \qquad jk = i = -kj, \qquad ki = j = -ik, \\ i^2 = j^2 = k^2 = -1 \end{gathered} \tag{23}$$

и кватернионы, у которых $b = c = d = 0$, коммутируют со всеми остальными. Легко проверить, что $\mathbb{H}$ с так определенным умножением превращается в ассоциативную, но не коммутативную алгебру над полем вещественных чисел. Эту алгебру можно представить в матричном виде.

Лемма 6. *Сопоставим каждому кватерниону* $q = a + bi + cj + dk$ *матрицу* $A(q) \in M(2, \mathbb{C})$, *полагая*

$$A(q) = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \tag{24}$$

(*здесь* i — *мнимая единица!*). *Тогда*

$$A(q_1 q_2) = A(q_1) A(q_2). \tag{25}$$

Замечание. Формула (25) означает, что отображение $q \mapsto A(q)$ является гомоморфизмом.

Доказательство. Достаточно проверить (25) при $q = i$, j, k. Имеем

$$A(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad A(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(k) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Теперь нетрудно проверить, что

$$A(i) A(j) = A(k)$$

и т. д.

Замечание. Матрицы

$$\sigma_x = -iA(k), \quad \sigma_y = -iA(j), \quad \sigma_z = -iA(i) \tag{27}$$

часто называются *матрицами Паули*. Эти матрицы таковы, что

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1, \quad \sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x = i\sigma_z, \ \ldots \tag{28}$$

Введем операцию сопряжения в $\mathbb{H}$, полагая

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk \quad \text{для} \quad q = a + bi + cj + dk. \tag{29}$$

Лемма 7. *Отображение* $q \mapsto \bar{q}$ — *антиавтоморфизм алгебры* $\mathbb{H}$, *т. е.*

$$\overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2, \quad \overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1. \tag{30}$$

Доказательство. Это сразу следует из того, что

$$A(\bar{q}) = \bar{A}^{\mathrm{T}}(q), \tag{31}$$

а отображение $A \mapsto \bar{A}^{\mathrm{T}}$ — антиавтоморфизм алгебры матриц $M(2, \mathbb{C})$.

Определим норму кватерниона $|q|^2$, полагая

$$|q|^2 = q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad \text{для} \quad q = a + bi + cj + dk. \tag{32}$$

Прямое вычисление показывает, что

$$|q|^2 = \det A(q); \tag{33}$$

поэтому норма обладает свойством

$$|q_1 q_2|^2 = |q_1|^2 |q_2|^2. \tag{34}$$

Следствие. *Совокупность кватернионов $\mathbb{H}$ образует «тело». Это означает, что для каждого отличного от нуля кватерниона q, где $|q|^2 \neq 0$, определен обратный кватернион q^{-1} такой, что*

$$qq^{-1} = 1.$$

Доказательство. Можно положить

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}; \tag{35}$$

тогда $qq^{-1} = q\bar{q}/|q|^2 = 1$.

Совокупность кватернионов с нормой 1 обозначим через $\mathbb{H}_1$. В силу (34) это группа по умножению, а из (35) следует, что если $q \in \mathbb{H}_1$, то $q^{-1} = \bar{q}$.

В четырехмерном пространстве $\mathbb{R}^4$ с координатами (a, b, c, d) $\mathbb{H}_1$ — это гиперповерхность, задаваемая уравнением

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |q|^2 = 1. \tag{36}$$

Поэтому $\mathbb{H}_1$ совпадает с единичной трехмерной сферой в $\mathbb{R}^4$. Заметим, что если $q = a + bi + cj + dk$, $1 = |q|^2$ и $x = a + bi$, $y = c + di$, то $|x|^2 + |y|^2 = 1$ и матрица $A(q)$ имеет вид

$$A(q) = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Поэтому (см. § 11, п. 3) группа $\mathbb{H}_1$ изоморфна группе $SU(2)$.

Мы видели (§ 13, п. 2), что группа $SO(3)$ вращений сферы изоморфна факторгруппе $SO(3) \approx SU(2)/\pm 1$. Укажем еще один способ доказать этот факт.

Пусть $\mathbb{H}_0$ — трехмерное пространство кватернионов x, удовлетворяющих условию $\bar{x} = -x$. Метрика в этом пространстве задается формулой $|x|^2 = x\bar{x} = -x^2$. Очевидно, это пространство евклидово.

Лемма 8. *Если $|q|^2 = 1$, то преобразование*

$$\alpha_q\colon\ x \mapsto qxq^{-1}, \quad x \in \mathbb{H}_0, \tag{38}$$

есть вращение трехмерного евклидова пространства $\mathbb{H}_0 = \mathbb{R}^3$.

Доказательство. Так как $\bar{x} = -x$, $\bar{q} = q^{-1}$, то $\overline{qxq^{-1}} = \bar{q}^{-1}\bar{x}\bar{q} = -qxq^{-1}$. Поэтому трехмерное пространство $\mathbb{H}_0$ при преобразовании α_q переходит в себя. Кроме того, $|qxq^{-1}| = |x|$, т. е. длина вектора в $\mathbb{H}_0$ сохраняется. Лемма доказана.

Таким образом, отображение $q \mapsto \alpha_q$ есть гомоморфизм группы $\mathbb{H}_1 = SU(2)$ в группу вращений трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$. Легко показать, что образом этого гомоморфизма служит вся группа вращений, что $\alpha_{-q}=\alpha_q$ и что если $\alpha_{q_1}=\alpha_{q_2}$, то $q_1=\pm q_2$. Из этого и вытекает, что $SO(3)\approx SU(2)/\pm 1$.

Другой пример. Построим изоморфизм групп $SU(2)\times\times SU(2)/\pm 1\approx SO(4)$. Пусть $p, q\in \mathbb{H}_1\approx SU(2)$. Тогда отображение

$$\alpha_{p,q}\colon x\mapsto pxq^{-1},\quad x\in\mathbb{H}\approx\mathbb{R}^4, \tag{39}$$

сохраняет квадрат нормы кватерниона x и является ортогональным преобразованием четырехмерного пространства $\mathbb{H}$. Ясно, что $\alpha_{-p,-q}=\alpha_{p,q}$. Образ отображения $(p, q)\mapsto\alpha_{p,q}$ лежит в группе $SO(4)$ в силу связности группы $SU(2)\times SU(2)/\pm 1$.

Рассмотрим теперь n-мерное кватернионное пространство $\mathbb{H}^n$ с базисом $e_1, \ldots, e_n$ и кватернионными координатами $(q^1, \ldots, q^n)$. Имеет место важное замечание: любой кватернион $q=a+bi+ +cj+dk$ можно представить в виде

$$q=x+yj=x+j\bar{y},\quad x=a+bi,\quad y=c+di, \tag{40}$$

где x и y можно считать просто комплексными числами. Если $u+vj$ — другой кватернион, то имеет место следующее тождество:

$$(x+yj)(u+vj)=(x+yj)(u+j\bar{v})=(xu-y\bar{v})+(xv+y\bar{u})j. \tag{41}$$

Теперь пространство $\mathbb{H}^n$ можно рассматривать как $2n$-мерное комплексное пространство $\mathbb{C}^{2n}$ с базисом $e_1, \ldots, e_n, je_1, \ldots, je_n$ и с комплексными координатами $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n$, где $q^k= =x^k+y^kj$. Действительно, используя представление (40), получаем

$$q^ke_k=x^ke_k+y^kje_k=x^ke_k+y^k(je_k). \tag{42}$$

Пусть $GL(n, \mathbb{H})$—группа обратимых кватернионно линейных преобразований пространства $\mathbb{H}^n$. Каждое преобразование $\Lambda\in GL(n, \mathbb{H})$ задается матрицей $\lambda_l^k\in\mathbb{H}$, $k, l=1, \ldots, n$, причем кватернионные координаты $q^1, \ldots, q^n$ преобразуются по закону

$$(q^k)\to(q^l\lambda_l^k)=(q'^k) \tag{43}$$

(порядок сомножителей существен). Используя тождество (41), мы получим, что комплексные координаты в $\mathbb{C}^{2n}$ преобразуются по закону

$$\begin{gathered} x^k\to(x^la_l^k-y^l\bar{b}_l^k)=(x'^k),\\ y^k\to(x^lb_l^k+y^l\bar{a}_l^k)=(y'^k),\\ \lambda_l^k=a_l^k+b_l^kj. \end{gathered} \tag{44}$$

Таким образом, каждое $\mathbb{H}$-линейное преобразование пространства $\mathbb{H}^n$ дает комплексно линейное преобразование соответствующего пространства $\mathbb{C}^{2n}$. Мы получаем гомоморфизм групп:

$$GL(n, \mathbb{H}) \xrightarrow{c} GL(2n, \mathbb{C}), \tag{45}$$

причем из (44) вытекает, что если $\Lambda = A + Bj$, то

$$c(\Lambda) = \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Замечание. По аналогии с § 11, п. 1 образ гомоморфизма c можно было определить как совокупность комплексных матриц, коммутирующих с оператором J умножения на j, $J = c(j)$.

Определим теперь в $\mathbb{H}^n$ квадратичную форму $|\xi|^2$, полагая

$$|\xi|^2 = \sum_{k=1}^{n} |q^k|^2 = \sum_{k=1}^{n} q^k\bar{q}^k, \quad \xi = q^k e_k. \tag{47}$$

Если $q = x + yj$, то $|q|^2 = |x|^2 + |y|^2$, поэтому в комплексных координатах (x^k, y^k), $q^k = x^k + y^k j$, квадратичная форма (47) совпадает со стандартным квадратом модуля вектора:

$$\sum |q^k|^2 = \sum |x^k|^2 + \sum |y^k|^2. \tag{48}$$

Соответствующий аналог эрмитовой формы в $\mathbb{H}^n$ имеет вид

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathbb{H}} = \sum_{k=1}^{n} q_1^k \bar{q}_2^k, \quad \xi_1 = (q_1^k), \quad \xi_2 = (q_2^k). \tag{49}$$

Определение 1. Группой $Sp(n)$ называется совокупность всех кватернионных преобразований, сохраняющих форму (49).

В комплексных координатах форма $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{H}}$ выражается так:

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathbb{H}} = \sum_{k=1}^{n} (x_1^k + y_1^k j)\overline{(x_2^k + y_2^k j)} =$$
$$= \sum_k (x_1^k \bar{x}_2^k + y_1^k \bar{y}_2^k) + \sum_k (y_1^k x_2^k - x_1^k y_2^k) j. \tag{50}$$

Пусть $\Lambda \in Sp(n)$. Из формулы (50) вытекает, что Λ сохраняет эрмитову форму $\sum_k (x_1^k \bar{x}_2^k + y_1^k \bar{y}_2^k) = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathbb{C}}$ и, кроме того, кососимметрическую форму $\sum_k y_1^k x_2^k - x_1^k y_2^k$. Таким образом, $c(Sp(n))$ содержится в $U(2n)$ и состоит из унитарных преобразований пространства $\mathbb{C}^{2n}$, сохраняющих кососимметрическую форму $\sum_k (y_1^k x_2^k - x_1^k y_2^k)$.

Пример. Группа $Sp(1)$ изоморфна $SU(2)$. Действительно, $c(Sp(1)) \subset U(2)$, причем матрицы из $c(Sp(1))$ сохраняют форму $y_1x_2 - x_1y_2$, т. е. сохраняют «площадь» комплексного параллелограмма, натянутого на векторы (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Поэтому все преобразования из $c(Sp(1))$ унимодулярны. Этот же результат мы получили выше, поскольку матрицы из $c(Sp(1))$ имеют вид $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ с $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Задачи. 1. Доказать связность (см. § 4) групп $GL(n, \mathbb{C})$, $U(n)$, $Sp(n)$.

2. Доказать, что для любой матрицы X справедлива формула: $\det(\exp X) = e^{\mathrm{Sp}\, X}$.

3. Проверить, что для группы $SL(2, \mathbb{R})$ образ экспоненциального отображения не покрывает всей группы.

4. Описать структуру касательных пространств в единице групп $U(n)$, $SU(n)$, $SO(p, q)$, $SU(p, q)$.

5. Найти все однопараметрические подгруппы в $SL(2, \mathbb{R})$.

§ 15. Конформные преобразования многомерных евклидовых и псевдоевклидовых пространств

Пусть заданы две метрики $g_{\alpha\beta}$ и $g'_{\alpha\beta}$ в области U пространства $\mathbb{R}^n$ с координатами $x^1, \ldots, x^n$. Мы скажем, что эти две метрики определяют одну и ту же конформную структуру, если $g'_{\alpha\beta}(x) = \lambda(x) g_{\alpha\beta}(x)$, $\lambda(x) \neq 0$. Более общо, метрика, конформно эквивалентная данной метрике $g_{\alpha\beta}$, получается из нее заменами координат $x = x(y)$ и умножениями на числовую функцию $\lambda(x)$.

Определение 1. Отображение φ: $U \to U$ области U с метрикой $g_{\alpha\beta}$ в себя называется *конформным*, если метрика $g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_l}{y\partial\beta} g_{hl} \frac{\partial x^l}{\partial y^\beta}$ пропорциональна исходной:

$$g'_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}, \quad \lambda = \lambda(x).$$

Рассмотрим далее псевдоевклидовы метрики типа (p, q) в $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n_{p,q}$ с метрикой $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\alpha}\delta_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\alpha} = \pm 1$. Нас будут особо интересовать пространства Евклида $\mathbb{R}^n$ с положительной метрикой и пространства Минковского $\mathbb{R}^n_1 = \mathbb{R}^n_{1,n-1}$.

Среди конформных преобразований этих пространств имеются линейные. Очевидно, линейные конформные преобразования сводятся к следующим:

а) движения — группа $O(p, q)$, $\lambda(x) \equiv 1$;

б) растяжения (дилатации)

$$x \mapsto \lambda x, \quad \lambda = \mathrm{const};$$

в) суперпозиции движений и дилатаций

$$x \mapsto \lambda A(x), \quad A \in O(p, q), \quad \lambda = \mathrm{const}.$$

Кроме того, имеются сдвиги (также движения)

$$x \mapsto x + x_0.$$