мы получили выше, поскольку матрицы из $c(Sp(1))$ имеют вид $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ с $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Задачи. 1. Доказать связность (см. § 4) групп $GL(n, \mathbb{C})$, $U(n)$, $Sp(n)$.

2. Доказать, что для любой матрицы $X$ справедлива формула: $\det(\exp X) = e^{\operatorname{Sp} X}$.

3. Проверить, что для группы $SL(2, \mathbb{R})$ образ экспоненциального отображения не покрывает всей группы.

4. Описать структуру касательных пространств в единице групп $U(n)$, $SU(n)$, $SO(p, q)$, $SU(p, q)$.

5. Найти все однопараметрические подгруппы в $SL(2, \mathbb{R})$.

## § 15. Конформные преобразования многомерных евклидовых и псевдоевклидовых пространств

Пусть заданы две метрики $g_{\alpha\beta}$ и $g'_{\alpha\beta}$ в области $U$ пространства $\mathbb{R}^n$ с координатами $x^1, \ldots, x^n$. Мы скажем, что эти две метрики определяют одну и ту же конформную структуру, если $g'_{\alpha\beta}(x) = \lambda(x) g_{\alpha\beta}(x)$, $\lambda(x) \neq 0$. Более общо, метрика, конформно эквивалентная данной метрике $g_{\alpha\beta}$, получается из нее заменами координат $x = x(y)$ и умножениями на числовую функцию $\lambda(x)$.

Определение 1. Отображение $\varphi$: $U \to U$ области $U$ с метрикой $g_{\alpha\beta}$ в себя называется *конформным*, если метрика $g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_l}{y\partial\beta} g_{hl} \frac{\partial x^l}{\partial y^\beta}$ пропорциональна исходной:

$$g'_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}, \quad \lambda = \lambda(x).$$

Рассмотрим далее псевдоевклидовы метрики типа $(p, q)$ в $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n_{p,q}$ с метрикой $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\alpha}\delta_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\alpha} = \pm 1$. Нас будут особо интересовать пространства Евклида $\mathbb{R}^n$ с положительной метрикой и пространства Минковского $\mathbb{R}^n_1 = \mathbb{R}^n_{1,n-1}$.

Среди конформных преобразований этих пространств имеются линейные. Очевидно, линейные конформные преобразования сводятся к следующим:

а) движения — группа $O(p, q)$, $\lambda(x) \equiv 1$;

б) растяжения (дилатации)

$$x \mapsto \lambda x, \quad \lambda = \mathrm{const};$$

в) суперпозиции движений и дилатаций

$$x \mapsto \lambda A(x), \quad A \in O(p, q), \quad \lambda = \mathrm{const}.$$

Кроме того, имеются сдвиги (также движения)

$$x \mapsto x + x_0.$$

Это — «очевидные» конформные преобразования. Кроме них, имеются еще так называемые *инверсии*

$$\text{г)} \qquad x^\alpha \to \frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{\langle x - x_0,\, x - x_0\rangle}, \tag{1}$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ — скалярное произведение

$$\langle x - x_0,\, x - x_0\rangle = \left(x^\alpha - x_0^\alpha\right)\left(x^\beta - x_0^\beta\right) g_{\alpha\beta}(x).$$

Для инверсий имеем

$$\lambda(x) = \mathrm{const}\, \langle x - x_0,\, x - x_0\rangle^{-4}. \tag{2}$$

При $n = 1$ все преобразования конформны.

При $n = 2$ имеется большое количество конформных преобразований, определяющихся одной произвольной комплексно аналитической функцией (см. § 12).

Для $n > 2$ положение меняется. Имеет место

Теорема 1 (Лиувилля). *Всякое гладкое (требуется не менее четырех непрерывных производных у функций, задающих отображение* *)) *конформное преобразование области евклидова (псевдоевклидова) пространства размерности $n \geqslant 3$ является суперпозицией движения, дилатации и инверсии.*

Дадим доказательство для $n = 3$.

Евклидов и псевдоевклидов случай в доказательстве, по существу, не различаются. Поэтому мы будем работать с обычной евклидовой метрикой. Пусть $y^\alpha = y^\alpha(x^1, \ldots, x^n)$ есть отображение области $U \subset \mathbb{R}^n$ в область $V \subset \mathbb{R}^n$. Без ограничения общности можно считать, что точка $O = (0, \ldots, 0)$ лежит в обеих областях $U$ и $V$, причем $y^\alpha(O) = O$. Конформность означает, что $A = \left(a_\beta^\alpha\right) = \left(\dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\right)$ есть матрица линейного конформного преобразования во всех точках $x \in U$. Иначе говоря, для векторов $dx = (dx^\alpha)$ и $dy = A\, dx$, $dy^\alpha = a_\beta^\alpha dx^\beta$, имеем

$$|dy| = \lambda(x)\, |dx|. \tag{3}$$

Пусть $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ — три вектора, которые все попарно ортогональны: $\langle \eta_i, \eta_j\rangle = 0$, $i \neq j$. Имеем

$$0 = \langle \eta_i, \eta_j\rangle = \langle A\eta_i, A\eta_j\rangle \tag{4}$$

для всех точек $x \in U$, $A = A(x) = \left(\dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\right)$. Дифференцируя (4) по

---

*) В действительности теорема справедлива и при меньшей гладкости, но мы не будем этим заниматься.

направлению третьего вектора $\eta_k$, $i \neq k$, $j \neq k$, получим

$$\eta_k^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\langle A\eta_i, A\eta_j\rangle = \left\langle \eta_k^\nu \frac{\partial^2 y}{\partial x^\beta\,\partial x^\nu}\eta_i^\beta,\ A\eta_j\right\rangle + \left\langle A\eta_i,\ \eta_k^\nu \frac{\partial^2 y}{\partial x^\beta\,\partial x^\nu}\eta_j^\beta\right\rangle. \tag{5}$$

Переставляя циклически индексы $(i, j, k)$, получим из (5) три тождества. Складывая два из них и вычитая третье, имеем

$$\left\langle \frac{\partial^2 y}{\partial x^\nu\,\partial x^\beta}\eta_1^\nu\eta_2^\beta,\ A\eta_3\right\rangle = 0 \tag{6}$$

(возможны перестановки индексов 1, 2, 3).

Таким образом, вектор $\frac{\partial^2 y}{\partial x^\nu\,\partial x^\beta}\eta_1^\nu\eta_2^\beta$ ортогонален вектору $A\eta_3$, если вектор $\eta_3$ был ортогонален к обоим векторам $\eta_1$, $\eta_2$.

Поскольку $n = 3$, отсюда имеем

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^\nu\,\partial y^\beta}\eta_1^\nu\eta_2^\beta = \mu(x)(A\eta_1) + \nu(x)(A\eta_2). \tag{7}$$

Коэффициенты $\mu$ и $\nu$ по определению имеют вид

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{|A\eta_1|^2}\left\langle \frac{\partial^2 y}{\partial x^\nu\,\partial x^\beta}\eta_1^\nu\eta_2^\beta,\ A\eta_1\right\rangle,\\ \nu &= \frac{1}{|A\eta_2|^2}\left\langle \frac{\partial^2 y}{\partial x^\nu\,\partial x^\beta}\eta_1^\nu\eta_2^\beta,\ A\eta_2\right\rangle.\end{aligned} \tag{8}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{\lambda^2|\eta_1|^2}\left[\frac{1}{2}\eta_2^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\langle A\eta_1, A\eta_1\rangle\right] = \frac{\eta_2^\alpha\frac{\partial\lambda}{\partial x^\alpha}}{\lambda(x)},\\ \nu &= \frac{\eta_1^\alpha\frac{\partial\lambda}{\partial x^\alpha}}{\lambda(x)}.\end{aligned} \tag{9}$$

Обозначим $1/\lambda(x)$ через $\rho(x)$; $|A\eta_1|^2 = \lambda(x)|\eta_1|^2$. Разделив (9) на $\lambda(x)$ и используя (8), получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\nu\,\partial x^\beta}(\rho y\eta_1^\nu\eta_2^\beta) = \left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^\nu\,\partial x^\beta}\eta_1^\nu\eta_2^\beta\right)y. \tag{10}$$

Дифференцируя (10) по направлению третьего вектора $\eta_3$, получим

$$\frac{\partial^3(\rho y)}{\partial x^\nu\,\partial x^\beta\,\partial x^\delta}\eta_1^\nu\eta_2^\beta\eta_3^\delta = \left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^\nu\,\partial x^\beta}\eta_1^\nu\eta_2^\beta\right)A\eta_1 + \left(\frac{\partial^3\rho}{\partial x^\delta\,\partial x^\nu\,\partial x^\beta}\eta_1^\nu\eta_2^\beta\eta_3^\delta\right)y. \tag{11}$$

Крайние члены этого равенства симметричны относительно перестановок $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Поэтому и средний член должен быть симметричен:

$$\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^\gamma\,\partial x^\beta}\,\eta_1^\gamma\eta_2^\beta\right)\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\delta}\,\eta_3^\delta\right)=\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^\gamma\,\partial x^\beta}\,\eta_2^\gamma\eta_3^\beta\right)\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\delta}\,\eta_1^\delta\right). \tag{12}$$

Так как $A\eta_3\neq 0$, $A\eta_1\neq 0$ и $A\eta_2\neq 0$, получаем

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x^\gamma\,\partial x^\delta}\,\eta_1^\gamma\eta_2^\delta\equiv 0. \tag{13}$$

Итак, билинейная форма (13) обращается в нуль на любой паре ортогональных векторов. Поэтому ее матрица пропорциональна метрике $g_{\gamma\delta}$ с некоторым множителем $\sigma(x)$:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x^\gamma\,\partial x^\delta}=\sigma(x)\,g_{\gamma\delta}. \tag{14}$$

Покажем, что $\sigma(x)=\mathrm{const}$. Пусть $\xi_i$ — любые векторы. Дифференцируя (14), имеем

$$\frac{\partial^3\rho}{\partial x^\gamma\,\partial x^\beta\,\partial x^\delta}\,\xi_1^\gamma\xi_2^\beta\xi_3^\delta=\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x^\gamma}\,\xi_1^\gamma\right)\langle\xi_2,\xi_3\rangle. \tag{15}$$

Переставляя $\xi_1$ и $\xi_2$ и вычитая полученные равенства друг из друга, получаем

$$\left\langle\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x^\alpha}\,\xi_1^\alpha\right)\xi_2-\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x^\gamma}\,\xi_2^\gamma\right)\xi_1,\ \xi_3\right\rangle=0. \tag{16}$$

Из этого равенства для всех векторов $\xi_i$ следует $\sigma=\mathrm{const}$. Окончательно имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^\gamma\,\partial x^\beta}=\sigma g_{\gamma\beta},\\ \sigma=\mathrm{const},\quad \rho=\frac{1}{\lambda}=a_1|x-x_0|^2+b_1,\quad a_i,\ b_i=\mathrm{const}.\end{gathered} \tag{17}$$

Для обратного отображения $x=x(y)$ получаем

$$\lambda(x)=\frac{1}{\rho(x)}=a_2|y-y_0|^2+b_2. \tag{18}$$

Условие $\lambda\rho=1$ приобретает вид

$$(a_1|x-x_0|^2+b_1)(a_2|y-y_0|^2+b_2)=1. \tag{19}$$

Так как $y(0)=0$, то $x_0=y_0=0$. Из этого следует, что конформное отображение преобразует любую сферу в сферу.

Рассмотрим семейство сфер $|x|=R$. Так как $y(0)=0$, радиальный луч $(0, y)$ переходит в радиальный луч $(0, x)$. Далее,

$$|y|=\int_0^x|dy|=\int_0^x\lambda(x)\,|dx|=\int_0^{|x|}\frac{dt}{at^2+b}. \tag{20}$$

Этот интеграл дает трансцендентную функцию от верхнего предела, если $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Это противоречит (19). Значит, либо $a = 0$, либо $b = 0$.

Случай $a = 0$. Тогда $\rho = \lambda = \text{const}$. Это — линейное отображение.

Случай $b = 0$, $a \neq 0$. Применим инверсию $x^* = x/|x|^2$, мы сведем этот случай к предыдущему, так как $|x^*| = 1/|x|$.

Для евклидовых метрик и $n = 3$ теорема доказана. Заметим, что евклидовость метрики не играла роли в доказательстве. Поэтому теорема верна и для псевдоевклидовых метрик при $n = 3$.

Видоизменения доказательства для $n > 3$ не очень значительны. Размерность использовалась только при выводе равенства (7) с тройкой ортогональных векторов $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$.

Задача. Докажите (7) для любой размерности $n \geqslant 3$.

После этого теорема автоматически будет следовать из дальнейших выкладок, которые не зависят от $n$.

Конформные преобразования определялись нами для областей в пространстве — евклидовом или псевдоевклидовом. Действительно, инверсии имеют особую точку $x = x_0$, которая переходит в $\infty$ при отображении (метрика евклидова). В псевдоевклидовом случае особое множество, как видно из уравнений (2), имеет вид

$$\langle x - x_0, x - x_0 \rangle = 0,$$

т. е. световой конус, проходящий через точку $x_0$.

Заметим, что группа конформных преобразований одинакова у всех метрик $g_{\alpha\beta}$, отличающихся множителем $\lambda(x)$. Поэтому конформные преобразования можно моделировать на любом пространстве с римановой метрикой, конформно эквивалентной евклидовой метрике $g_{\alpha\beta} = \lambda(x)\delta_{\alpha\beta}$ в «евклидовых» координатах. В частности, метрика $n$-мерной сферы $S^n$, заданной уравнением

$$\sum_{\alpha=0}^{n} (x^\alpha)^2 = 1,$$

конформно эквивалентна евклидовой метрике в некоторых других координатах. При $n = 2$ такие координаты уже указывались в § 9. В пространстве любой размерности конформно евклидовы координаты на сфере (без верхнего полюса) вводятся, как и при $n = 2$, стереографической проекцией на плоскость $(x^1, \ldots, x^n)$ и обозначаются через $x^1, \ldots, x^n$. Метрика имеет вид (см. § 9 для $n = 2$)

$$g_{\alpha\beta} = g(x)\,\delta_{\alpha\beta}, \quad g(x) = \frac{R^4}{(R^2 + r^2)^2}, \tag{21}$$

$$r^2 = (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2, \qquad R = \text{const}.$$

В координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ мы можем рассмотреть все конформные преобразования, полученные в теореме Лиувилля: это — преобразования из группы $O(n)$, трансляции $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, дилатации и инверсии, а также их суперпозиции.

С другой стороны, на сфере $S^n$ имеется группа ее движений $O(n+1)$. Кроме того, сферу можно считать границей единичного шара $S^n = \partial D^{n+1}$, $|x| \leqslant R$, на котором в координатах $(x^0, \ldots, x^n)$ определена метрика Лобачевского (см. § 10)

$$\widetilde{g}_{ab} = \frac{R^4}{(R^2 - r^2)^2}\delta_{ab}, \quad r^2 = \sum_{i=0}^{n}(x^i)^2 < R^2. \tag{22}$$

Группа преобразований метрики Лобачевского на шаре $D^{n+1}$ есть $O(n+1, 1)$ — эта группа шире, чем группа $O(n+1) \subset O(n+1, 1)$. Можно представлять себе пространство Лобачевского реализованным как квадратичная поверхность в пространстве Минковского $\mathbb{R}_1^{n+2}$ с координатами $(z^0, \ldots, z^{n+1})$ и метрикой

$$dl^2 = (dz^0)^2 - \sum_{a=1}^{n+1}(dz^a)^2. \tag{23}$$

Пространство Лобачевского выделяется уравнением

$$(z^0)^2 - \sum_{a=1}^{n+1}(z^a)^2 = 1. \tag{24}$$

Между координатами $(z^1, \ldots, z^{n+1})$ и $(x^0, \ldots, x^n)$ имеется связь (см. (10.6), где $x^0 = u$, $x^1 = v$, $z^1 = x$, $z^2 = y$):

$$z^\alpha = \frac{2R^2 x^{\alpha-1}}{R^2 - r^2}, \quad \alpha = 1, \ldots, n, \tag{25}$$

$$r^2 = \sum_{\alpha=1}^{n+1}(x^{\alpha-1})^2.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Группа Лоренца $O(n+1, 1)$, действуя на пространстве Лобачевского $L^{n+1}$, порождает действие на сфере $S^n$ (например, если $L^{n+1}$ реализовано как шар $D^{n+1}$ с границей $S^n$ и метрикой* (22)). *Все эти преобразования конформны на сфере $S^n$ в стандартной метрике, не имеют особенностей и содержат базисные преобразования, а значит, и всю группу конформных преобразований $S^n$ (или $\mathbb{R}^n$), которая тем самым совпадает с $O(n+1, 1)$.*

Необходимо сопоставить трансляции, дилатацию и инверсию в $\mathbb{R}^n$ с преобразованиями из группы $O(n+1, 1)$. Все эти преобразования представлены уже для $n = 1$, где вычисления совсем просты:

$$\text{трансляция } (x \mapsto x + a) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{a^2}{2}+1 & a & -\frac{a^2}{2} \\ a & 1 & -a \\ \frac{a^2}{2} & a & 1-\frac{a^2}{2} \end{pmatrix} \in O(2, 1),$$

$$\text{дилатация } (x \mapsto \pm \lambda x, \lambda > 0) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2+1}{2\lambda} & 0 & \frac{\lambda^2-1}{2\lambda} \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ \frac{\lambda^2-1}{2\lambda} & 0 & \frac{\lambda^2+1}{2\lambda} \end{pmatrix} \in O(2, 1),$$

$$\text{инверсия } \left(x \mapsto \frac{1}{x}\right) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in O(2, 1).$$

Эти преобразования конформны на сфере $S^n$ и вместе с группой $O(n)$ порождают всю группу $O(n+1, 1)$.

Задача. Докажите, что группа конформных преобразований пространства $\mathbb{R}_1^n$ аналогичным образом изоморфна группе $O(n, 2)$. Вообще, конформные преобразования в пространстве $\mathbb{R}_{p,q}^n$ составляют группу $O(p+1, q+1)$. В частности, для пространства Минковского $\mathbb{R}_1^4$ группа конформных преобразований изоморфна $O(4, 2)$.

Замечание. Кроме того, группа $O(4, 2)$ оказывается локально изоморфной группе $SU(2, 2)$. Мы этот изоморфизм строить не будем.