Глава 3

ТЕНЗОРЫ. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

§ 16. Примеры тензоров

Как мы уже привыкли, многие величины, например расстояние от точки до некоторого фиксированного центра и другие, задаются в виде числовых функций от точки в пространстве. Если у нас имеется несколько таких величин, то мы уже имеем несколько функций точки (или, как говорят, вектор-функцию точки). В трехмерном пространстве для полной характеризации положения точки в пространстве необходимо знать значение не менее трех числовых функций, именуемых координатами точки (x^1, x^2, x^3): каждая из координат x^i есть функция точки, а совокупность (x^1, x^2, x^3) полностью определяет эту точку. Мы встречались с разными типами координат — например, на плоскости имеются декартовы координаты (x^1, x^2) и полярные, где $x^1 = r\cos\varphi$, $x^2 = r\sin\varphi$; в пространстве — декартовы, цилиндрические (r, z, φ) или сферические (r, θ, φ).

Таким образом, координаты — это набор числовых функций точки, которые полностью определяют положение этой точки в пространстве. Точно так же координатами любой физической системы называется такой набор числовых функций от состояния этой системы, которые полностью его определяют (состояние системы — это точка «пространства всех возможных состояний» системы). Например, состояние движущейся материальной точки определяется шестью числами: тремя координатами и тремя компонентами вектора скорости; здесь мы имеем дело с шестимерным пространством состояний.

Оказывается, тем не менее, что понятие числовой функции точки или совокупности таких функций недостаточно. Дело в том, что многие геометрические и физические величины могут быть описаны в виде набора числовых функций только после того, как в пространстве уже задан какой-то набор координат (x^1, x^2, x^3); числовая запись этих величин может сильно измениться, если мы зададим другие координаты z^1, z^2, z^3,

$$x^i = x^i(z^1, z^2, z^3), \quad i = 1, 2, 3.$$

Чтобы уяснить себе эту возможность, мы рассмотрим понятие вектора, например вектора скорости при движении вдоль некоторой кривой

$$z^j = z^j(t), \quad j = 1, 2, 3;$$
$$x^i = x^i(z^1(t), z^2(t), z^3(t)) = x^i(t); \quad i = 1, 2, 3.$$

В координатах (z^1, z^2, z^3) мы имеем компоненты вектора скорости в виде

$$\left(\frac{dz^1}{dt}, \frac{dz^2}{dt}, \frac{dz^3}{dt}\right)\Big|_{t=t_0} = (\eta^1, \eta^2, \eta^3).$$

При записи той же кривой в других координатах x^1, x^2, x^3 мы получим другие компоненты того же вектора

$$\left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt}\right)\Big|_{t=t_0} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$$

и при этом

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial z^j}\frac{dz^j}{dt}; \quad i = 1, 2, 3.$$

Таким образом, для компонент вектора мы имеем формулу преобразования их числовой записи при замене координат

$$\begin{aligned} \xi^i &= \sum_{j=1}^{3} \eta^j \frac{\partial x^i}{\partial z^j}, \quad i = 1, 2, 3; \\ x^i &= x^i(z^1, z^2, z^3), \end{aligned} \tag{1}$$

(ξ^1, ξ^2, ξ^3) — компоненты вектора в координатах x^1, x^2, x^3 в заданной точке,

(η^1, η^2, η^3) — компоненты вектора в координатах z^1, z^2, z^3 в той же точке.

Тензоры — это важнейший из классов величин, числовая запись которых меняется при изменении координат. Вектор — это простейший и наиболее наглядный пример тензора. Разумеется, тривиальным примером тензора является скаляр, который не меняется при замене координат.

Прежде чем вводить математически точное понятие тензора, мы рассмотрим другие примеры, с которыми нам уже приходилось многократно встречаться.

1. Градиент числовой функции. Как мы привыкли говорить и думать, градиент числовой функции $f(x^1, x^2, x^3)$ в декартовых координатах x^1, x^2, x^3 — это вектор с компонентами

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3}\right) = (\xi^1, \xi^2, \xi^3).$$

Посмотрим, как выглядит градиент той же функции в других координатах z^1, z^2, z^3, где

$$x^i = x^i(z^1, z^2, z^3) = x^i(z); \quad i = 1, 2, 3.$$

Имеем

$$\operatorname{grad} f(x^1(z), x^2(z), x^3(z)) = \left(\frac{\partial f}{\partial z^1}, \frac{\partial f}{\partial z^2}, \frac{\partial f}{\partial z^3}\right) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3);$$

$$\frac{\partial f}{\partial z^i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial z^i}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Итак, мы имеем ответ:

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x^j}{\partial z^i} \xi_j; \tag{2}$$

(ξ_1, ξ_2, ξ_3) — компоненты градиента в координатах (x^1, x^2, x^3), (η_1, η_2, η_3) — компоненты градиента в координатах (z^1, z^2, z^3).

Сравним теперь две формулы преобразования числовой записи для вектора скорости кривой и градиента функции.

$$\text{Вектор скорости: } \xi^i = \sum_{j=1}^{3} \eta^j \frac{\partial x^i}{\partial z^j}.$$

$$\text{Градиент: } \eta_i = \sum_{j=1}^{3} \xi_j \frac{\partial x^j}{\partial z^i}.$$

Это — разные формулы!

Для сопоставления этих формул введем матрицу Якоби $A = (a^i_j)$, где $a^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial z^j}$, и транспонированную матрицу $A^{\mathrm{T}} = (b^j_k)$, где $b^j_k = a^k_j$.

Для векторов ξ и η мы перепишем формулы (1) и (2) в виде

$$\xi = A\eta \quad \text{(вектор скорости)}, \tag{1'}$$

$$\eta = A^{\mathrm{T}}\xi \quad \text{(градиент)}. \tag{2'}$$

Если матрица A^{T} имеет обратную $(A^{\mathrm{T}})^{-1}$, то мы можем переписать формулу (2′):

$$\begin{gathered} (A^{\mathrm{T}})^{-1}\eta = (A^{\mathrm{T}})^{-1}A^{\mathrm{T}}\xi = \xi, \\ \xi = (A^{\mathrm{T}})^{-1}\eta \quad \left(\text{или } \xi_i = \sum_{j=1}^{3} \eta_j \frac{\partial z^j}{\partial x^i}\right). \end{gathered} \tag{3}$$

В каком случае законы преобразования векторов скорости и градиентов функций при переходе от системы координат x к системе z совпадут?

Из формул (1), (2) и (3) мы получаем

$$\xi = A\eta \qquad \text{(вектор скорости)},$$

$$\xi = (A^{\mathrm{T}})^{-1}\eta \quad \text{(градиент функции)}.$$

Окончательный вывод состоит в том, что для совпадения формул преобразования (1) и (3) необходимо иметь равенство матриц

$$A=(A^{\mathrm{T}})^{-1} \quad \text{или} \quad A^{\mathrm{T}}A=1,$$

т. е. $A=(a^i_j)=\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)$ — ортогональная матрица (см. § 4). (Заметим в скобках, что замена координат $x=x(z)$ такая, что в каждой точке матрица Якоби $A=\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)$ ортогональна, является линейным ортогональным преобразованием $A=\mathrm{const}$.)

Итак, градиент функции при заменах координат преобразуется иначе, чем вектор скорости. Это — другой вид тензора, который иногда называют «ковектором», в отличие от векторов скорости.

2. Риманова метрика. Как уже говорилось, в n-мерном пространстве или в области пространства метрические понятия (такие, как длины и углы) задаются с помощью набора функций $g_{ij}(x)$, $i=1, \ldots, n$, $j=1, \ldots, n$, если заданы координаты $(x^1, \ldots, x^n)$. Для длины кривой мы имели, по определению, формулу

$$l=\int_a^b \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(x(t))\,\dot{x}^i\dot{x}^j}\,dt, \tag{4}$$

где $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$ и квадратичная форма $\sum g_{ij}\xi^i\xi^j$ положительна. Это — квадратичная форма, определенная на векторах типа «векторов скорости» в каждой данной точке $(x)=(x^1, \ldots, x^n)$ и зависящая от точки. Мы называли g_{ij} римановой метрикой. При замене координат

$$x^i=x^i(z^1, \ldots, z^n), \qquad i=1, \ldots, n,$$

формула длины кривой приобретает вид

$$l=\int_a^b \sqrt{\sum_{i,j} \tilde{g}_{ij}(z(t))\,\dot{z}^i\dot{z}^j}\,dt,$$

где $x^i(t)=x^i(z^1(t), \ldots, z^n(t))$, причем закон преобразования компонент метрики имеет вид

$$\tilde{g}_{ij}(z)=\sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}(x)\frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^l}{\partial z^j}. \tag{5}$$

Итак, квадратичные формы на векторах преобразуются по закону (5). Это еще один вид тензора (называемый тензором 2-го ранга).

Итак, у нас имеются уже несколько типов тензоров:

а) скаляр (не преобразуется),

б) вектор (преобразуется по закону (1)),

в) ковектор (преобразуется по закону (2)),

г) риманова метрика (преобразуется по закону (5)).

Напомним, что риманова метрика (g_{ij}) в данных координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ была нужна для того, чтобы определить понятие длины вектора в данной точке: если задан вектор $\xi=(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ в точке $x=(x^1, \ldots, x^n)$, то квадрат длины $|\xi|^2$ равен $\sum g_{ij}(x)\xi^i\xi^j$. В частности, это применялось к векторам скорости параметризованных кривых для определения длины кривой как интеграла от длины вектора скорости.

Закон преобразования (5) для компонент метрики при замене координат однозначно вытекает из закона (1) для компонент вектора и очевидного требования, чтобы длина кривой не зависела от того, в каких координатах производится ее вычисление. Фактически длина кривой есть интеграл по времени от длины вектора скорости. Следовательно, необходимо, чтобы квадрат длины вектора скорости

$$|\xi|^2=\sum g_{ij}\xi^i\xi^j$$

не зависел от выбора координат. Из этого требования и из формул (1) для компонент вектора вытекает закон преобразования (5) для компонент метрики (g_{ij}).

3. Если мы хотим определить инвариантное понятие квадрата длины ковектора, преобразующегося по закону (2) (или (3)), то мы должны ввести компоненты $(g^{ij}(x))$ и положить

$$|\xi|^2=\sum g^{ij}(x)\xi_i\xi_j \quad (\text{в точке } x),$$
$$\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

При замене $x^i=x^i(z)$, $i=1, \ldots, n$, мы получим закон преобразования

$$\begin{aligned} \eta_i &= \sum_{j=1}^{n}\xi_j\frac{\partial x^j}{\partial z^i}, \\ \widetilde{g}^{ij}(z) &= \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl}\frac{\partial z^i}{\partial x^k}\frac{\partial z^j}{\partial x^l}, \end{aligned} \tag{6}$$

и длина не будет зависеть от выбора координат:

$$|\eta|^2=|\xi|^2=\sum\widetilde{g}^{ij}\eta_i\eta_j=\sum g^{ij}\xi_i\xi_j.$$

Здесь

$\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — запись ковектора в координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ в точке (x).

$\eta=(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — запись того же ковектора в той же точке, но в координатах $(z^1, \ldots, z^n)$.

Закон преобразования (6) дает еще один тип тензора (2-го ранга).

4. Наконец, следует разобрать еще один недостающий тип тензоров 2-го ранга — линейные операторы на векторах.

Предположим, что в каждой точке пространства с координатами $x^1, \ldots, x^n$ задана матрица $\left(a_j^i(x)\right) = A(x)$, которая определяет линейное преобразование векторов в каждой точке $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Это линейное преобразование $A(x)$ имеет вид $\eta = A\xi$, где

$$\eta^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i(x)\,\xi^j; \tag{7}$$

здесь $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ — вектор в точке x.

Та же самая матрица определяет линейное преобразование ковекторов по формуле $\eta = A\xi$, где

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{n} a_j^i \xi_i. \tag{8}$$

При замене координат $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n)$ из формул (1), (7) можно вывести, что компоненты матрицы A преобразуются по закону $A \to {}'A = \left({}'a_j^i\right)$:

$${}'a_j^i = \sum \frac{\partial z^i}{\partial x^k} a_l^k \frac{\partial x^l}{\partial z^j}, \tag{9}$$

где $x^i = x^i(z)$, $z^j = z^j(x)$ и $z^i(x(z)) = z^i$; при этом

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial z^j} = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Для ковектора мы можем переписать формулу (2) в виде

$$\xi_i = \sum \eta_j \frac{\partial z^j}{\partial x^i},$$

так как

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z^j}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial z^k} = \delta_k^j.$$

Соберем теперь в таблицу законы преобразования для вектора, ковектора и всех трех видов тензоров 2-го ранга.

Законы преобразования:

1. Скаляр (тензор 0-го ранга) не преобразуется.

Тензоры 1-го ранга:

2. Вектор $\xi=(\xi^i)$ (типа вектора скорости) преобразуется по формуле

$$\tilde{\xi}^j=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z^j}{\partial x^i}\xi^i.$$

3. Ковектор $\xi=(\xi_i)$ (типа градиента функции) преобразуется по формуле

$$\tilde{\xi}_j=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\frac{\partial x^i}{\partial z^j}.$$

Тензоры 2-го ранга:

4. Скалярное произведение векторов g_{ij} преобразуется по формуле

$$\tilde{g}_{ij}=\sum_{k,l}g_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^l}{\partial z^j}.$$

5. Скалярное произведение ковекторов g^{ij} преобразуется по формуле

$$\tilde{g}^{ij}=\sum_{k,l}g^{kl}\frac{\partial z^i}{\partial x^k}\frac{\partial z^j}{\partial x^l}.$$

6. Линейный оператор на векторах (ковекторах) $A=(a_j^i)$ преобразуется по формуле

$$\tilde{a}_j^i=\sum_{k,l}a_l^k\frac{\partial x^l}{\partial z^j}\frac{\partial z^i}{\partial x^k}.$$

Здесь $x^i=x^i(z^1,\ldots,z^n)$, $z^j=z^j(x^1,\ldots,x^n)$, причем

$$z^j(x^1(z^1,\ldots,z^n),\ldots,x^n(z^1,\ldots,z^n))=z^j;$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial z^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial z^j}=\delta_j^i.$$

§ 17. Общее определение тензора

1. Закон преобразования компонент тензоров произвольного ранга. Итак, в предыдущем параграфе были разобраны тензоры 1-го ранга (векторы и ковекторы) и тензоры 2-го ранга (квадратичные формы на векторах g_{ij}, квадратичные формы на ковекторах g^{ij} и линейные преобразования — операторы a_j^i).

Теперь мы можем дать определение тензоров общего вида.

Определение 1. *Тензором (тензорным полем) типа* (p, q) *ранга* $p+q$ называется объект, задаваемый набором чисел $T_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p}$