Тензоры 1-го ранга:

2. Вектор $\xi=(\xi^i)$ (типа вектора скорости) преобразуется по формуле

$$\tilde{\xi}^j=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z^j}{\partial x^i}\xi^i.$$

3. Ковектор $\xi=(\xi_i)$ (типа градиента функции) преобразуется по формуле

$$\tilde{\xi}_j=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\frac{\partial x^i}{\partial z^j}.$$

Тензоры 2-го ранга:

4. Скалярное произведение векторов g_{ij} преобразуется по формуле

$$\tilde{g}_{ij}=\sum_{k,l}g_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^l}{\partial z^j}.$$

5. Скалярное произведение ковекторов g^{ij} преобразуется по формуле

$$\tilde{g}^{ij}=\sum_{k,l}g^{kl}\frac{\partial z^i}{\partial x^k}\frac{\partial z^j}{\partial x^l}.$$

6. Линейный оператор на векторах (ковекторах) $A=(a^i_j)$ преобразуется по формуле

$$\tilde{a}^i_j=\sum_{k,l}a^k_l\frac{\partial x^l}{\partial z^j}\frac{\partial z^i}{\partial x^k}.$$

Здесь $x^i=x^i(z^1,\ldots,z^n)$, $z^j=z^j(x^1,\ldots,x^n)$, причем

$$z^j(x^1(z^1,\ldots,z^n),\ldots,x^n(z^1,\ldots,z^n))=z^j;$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial z^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial z^j}=\delta^i_j.$$

§ 17. Общее определение тензора

1. Закон преобразования компонент тензоров произвольного ранга. Итак, в предыдущем параграфе были разобраны тензоры 1-го ранга (векторы и ковекторы) и тензоры 2-го ранга (квадратичные формы на векторах g_{ij}, квадратичные формы на ковекторах g^{ij} и линейные преобразования — операторы a^i_j).

Теперь мы можем дать определение тензоров общего вида.

Определение 1. *Тензором* (*тензорным полем*) *типа* (p, q) *ранга* $p+q$ называется объект, задаваемый набором чисел $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$

в произвольной системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$, числовая запись которого зависит от системы координат по следующему закону: если $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n)$, $z^j = z^j(x^1, \ldots, x^n)$; $z(x(z)) = z$, то имеет место формула

$$T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \sum_{(k),(l)} {}'T^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial z^{k_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial z^{k_p}} \frac{\partial z^{l_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial z^{l_q}}{\partial x^{j_q}}; \tag{1}$$

здесь ${}'T^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q}$ — числовая запись тензора в координатах (z) и $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ — числовая запись тензора в координатах (x).

Индексы $(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_q)$ и $(k_1, \ldots, k_p; l_1, \ldots, l_q)$ меняются от 1 до n (тензоры в n-мерном пространстве).

Таким образом:

вектор скорости — тензор типа $(1, 0)$,

ковектор — тензор типа $(0, 1)$,

квадратичная форма на векторах — тензор типа $(0, 2)$,

квадратичная форма на ковекторах — тензор типа $(2, 0)$,

линейный оператор на векторах или ковекторах — тензор типа $(1, 1)$.

Теорема 1. *Компоненты* ${}'T^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q}$ *можно выразить через* $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ *по формуле*

$${}'T^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q} = \sum_{(i)(j)} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \frac{\partial z^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial z^{k_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial z^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial z^{l_q}}. \tag{2}$$

Доказательство. Используем соотношения

$$\sum_j \frac{\partial x^i}{\partial z^j} \frac{\partial z^j}{\partial x^k} = \delta^i_k; \qquad \sum_j \frac{\partial z^k}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial z^q} = \delta^k_q,$$

вытекающие из того факта, что преобразования $x = x(z)$ и $z = z(x)$ обратны друг другу:

$$x^i(z(x)) = x^i; \qquad z^q(x(z)) = z^q.$$

Рассмотрим соотношение (1) как линейное уравнение с правыми частями $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ и неизвестными ${}'T^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q}$. Решая это уравнение, нужно получить (2).

В силу (1) имеет место формула

$$\sum_{i,j} T^i_j \frac{\partial z^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial z^{k_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial z^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial z^{l_q}} =$$

$$= \sum_{i,j} \left(\sum_{r,s} {}'T^r_s \frac{\partial x^{i_1}}{\partial z^{r_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial z^{r_p}} \frac{\partial z^{s_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial z^{s_q}}{\partial x^{j_q}} \right) \frac{\partial z^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial z^{k_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial z^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial z^{l_q}} =$$

$$= \sum_{i,j,r,s} {}'T^r_s \frac{\partial x^i}{\partial z^r} \frac{\partial z^s}{\partial x^j} \frac{\partial z^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial z^l} = \sum_{r,s} {}'T^r_s \delta^s_l \delta^k_r \equiv {}'T^k_l;$$

здесь

$$i=(i_1, \ldots, i_p); \quad j=(j_1, \ldots, j_q);$$
$$l=(l_1, \ldots, l_q); \quad s=(s_1, \ldots, s_q);$$
$$k=(k_1, \ldots, k_p); \quad r=(r_1, \ldots, r_p).$$

Таким образом, приходим к соотношениям (2). Теорема доказана.

Перечислим простейшие свойства тензоров.

В любой заданной точке пространства тензоры образуют линейное пространство: если $T = \left(T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\right)$ и $S = \left(S^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\right)$ — тензоры типа (p, q), то их линейная комбинация $\lambda T+\mu S=U$ с компонентами $U^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \lambda T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \mu S^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_p}$ тоже есть тензор типа (p, q) в той же самой точке. Важно отметить, что тензор — объект, прикрепленный к точке, и не существует никакого правила сложения тензоров, прикрепленных к разных точкам.

Размерность линейного пространства тензоров типа (p, q) (в точке) в n-мерном пространстве равна n^{p+q}. Если базисные координатные векторы в n-мерном пространстве с системой координат $x^1, \ldots, x^n$ обозначить через $e_1, \ldots, e_n$, а базисные ковекторы — через $e^1, \ldots, e^n$, то любой тензор формально удобно записать в таком виде:

вектор $\xi = \sum\limits_i \xi^i e_i \left(\text{например, } \dfrac{dx}{dt} = \sum \dfrac{dx^i}{dt} e_i\right)$,

ковектор $\xi = \sum\limits_i \xi_i e^i \left(\text{например, } \operatorname{grad} f = \sum \dfrac{\partial f}{\partial x^i} e^i\right)$,

квадратичная форма $(g) = \sum\limits_{i,j} g_{ij} e^i \otimes e^j$ (для векторов),

квадратичная форма $(g) = \sum\limits_{i,j} g^{ij} e_i \otimes e_j$ (для ковекторов),

линейный оператор $A = \sum\limits_{i,j} a^i_j e_i \otimes e^j$.

Любой тензор $T = \left(T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\right)$ запишется так:

$$T = \sum_{i,j} T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots e^{j_q}. \tag{3}$$

Существенно отметить, что в этой записи порядок индексов важен — нельзя поменять местами, вообще говоря, e_{i_1} и e_{i_2} и т. д.

Итак, базис в линейном пространстве тензоров типа (p, q) в данной точке пространства (x) имеет вид

$$e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}, \tag{4}$$

где i, j независимо принимают значения $1, \ldots, n$; таким образом, базис состоит из n^{p+q} элементов. При замене координат $x^i =$

$=x^i(z^1, \ldots, z^n)$ мы переходим к другому базису в линейном пространстве тензоров, прикрепленных к данной точке,— к базису, связанному с координатными векторами системы z в данной точке.

Взаимное выражение в данной точке пространства этих базисов друг через друга происходит согласно формулам

$$e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q} =$$
$$= \sum_{k,l} \frac{\partial z^{k'_1}}{\partial x^{i_1}} \ldots \frac{\partial z^{k'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial z^{l'_1}} \ldots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial z^{l'_q}} e_{k'_1} \otimes \ldots \otimes e_{k'_p} \otimes e^{l'_1} \otimes \ldots \otimes e^{l'_q}. \tag{4'}$$

Разберем несколько примеров.

1. *Тензор напряжений* (трехмерный случай). В сплошной среде в каждой точке $x=(x^1, x^2, x^3)$ сила давления, действующая на малую площадку площади ΔS, ортогональную единичному вектору n, вычисляется как $(\Delta S)P(n)$, где P — линейный оператор: $P=(P^i_j)$. Тензор P^i_j называется тензором напряжений. Если $n = \sum_{j=1}^3 n^j e_j$, то $P(n) = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 n^j P^i_j\right) e_i$ или $\{P(n)\}^i = \sum_{j=1}^3 n^j P^i_j$. Например, в случае применимости закона Паскаля $P^i_j = \delta^i_j p$, где p — число, называемое давлением в данной точке.

2. *Тензор деформации*. Если сплошная среда задана в координатах x^1, x^2, x^3 и задано смещение каждой точки среды

$$x^i \to x^i + u^i(x),$$

то говорят, что среда подверглась деформации. Если первоначально расстояние между близкими точками среды было, например, евклидово в координатах x^1, x^2, x^3:

$$(\Delta l)^2 = \sum (\Delta x^i)^2 = \sum_{i=1}^3 (x^i - {}'x^i)^2,$$

то после деформации между теми же точками будет другое расстояние $(\Delta \bar l)^2 = \sum [(x^i + u^i(x)) - {}'x^i - u^i({}'x)]^2$. Очевидно,

$$(\Delta \bar l)^2 = (\Delta l)^2 + 2\sum_{i=1}^3 \Delta x^i \Delta u^i + \sum_{i=1}^3 (\Delta u^i)^2,$$
$$\Delta x^i = x^i - {}'x^i,$$
$$\Delta u^i = u^i(x) - u^i({}'x) \approx \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \Delta x^j.$$

Поэтому при $\Delta x^i \to 0$

$$(d\bar l)^2 = (dl)^2 + 2\sum_{i,j} dx^i\, dx^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \sum_{k,l,i} \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \frac{\partial u^i}{\partial x^l} dx^k\, dx^l.$$

При этом верно равенство

$$2\sum_{i,j}\frac{\partial u^i}{\partial x^j}dx^i\,dx^j=\sum_{i,j}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j}+\frac{\partial u^j}{\partial x^i}\right)dx^i\,dx^j,$$

так как

$$\sum_{i,j}\frac{\partial u^i}{\partial x^j}dx^i\,dx^j=\sum_{i,j}\frac{\partial u^j}{\partial x^i}dx^i\,dx^j.$$

Определение 2. Разность $(d\bar{l})^2-(dl)^2=\sum_{i,j}\eta_{ij}dx^i\,dx^j+\sum_{k,l,i}\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\frac{\partial u^i}{\partial x^l}dx^k\,dx^l$ называется тензором деформации среды. Здесь $\eta_{ij}=\frac{\partial u^i}{\partial x^j}+\frac{\partial u^j}{\partial x^i}$.

Если u^i — малые смещения, то квадратичной частью по u^i пренебрегают. Получается *тензор малой деформации*

$$\eta_{ij}=\frac{\partial u^i}{\partial x^j}+\frac{\partial u^j}{\partial x^i}.$$

Согласно закону Гука, малая деформация среды вызывает напряжение, линейно зависящее от деформации. Поэтому между тензорами напряжений и деформации должна быть линейная связь:

$$P=U(\eta).$$

Эта линейная связь является тензором 4-го ранга. В индексной записи: $P^i_j=\sum_{k,l}U^{ikl}_j\eta_{kl}$; здесь $P=(P^i_j)$, $\eta=(\eta_{kl})$, $U=(U^{ikl}_j)$. Тензор U^{ikl}_j 4-го ранга описывается 81 компонентой. Неужели действительно закон Гука в сплошной среде описывается 81 величиной?

Если координаты евклидовы, то мы можем (относительно ортогональных преобразований) не различать векторов и ковекторов — и вообще верхних и нижних индексов тензора — они преобразуются одинаково. Тензор $U=U^{ikl}_j$ в евклидовых координатах определяется 81 числом. Это число можно значительно уменьшить, введя гипотезу изотропности среды по направлениям. Она означает, что тензор U в каждой точке должен быть таким, что его числовая запись во всех координатах, отличающихся на вращения вокруг этой точки (включая отражения), одинакова, т. е. не меняется при ортогональных преобразованиях. Эта гипотеза выполнена в жидкостях, но в твердом теле верна далеко не всегда.

При наличии изотропности можно воспользоваться следующей важной теоремой, которую мы приводим без доказательства (поскольку речь идет об ортогональных преобразованиях, мы можем не делать различия между верхними и нижними индексами).

Теорема 2. *Класс тензоров 4-го ранга, инвариантных относительно ортогональных преобразований, определяется тремя параметрами* λ, μ, ν; *его составляют тензоры*

$$U_{ijkl} = \lambda\delta_{ik}\delta_{jl} + \mu\delta_{ij}\delta_{kl} + \nu\delta_{il}\delta_{jk}.$$

На языке переходов от двухиндексных тензоров η_{ij} к двухиндексным тензорам P_{ij} этот тензор описывается формулой

$$P_{ij} = \lambda\eta_{ij} + \mu(\mathrm{Sp}\,\eta)\delta_{ij} + \nu\eta_{ji},$$

где $\mathrm{Sp}\,\eta = \sum\limits_i \eta_{ii}$. Если вспомнить, что рассматриваемые нами тензоры η и P симметричны, $\eta_{ji} = \eta_{ij}$ и $P_{ij} = P_{ji}$, то можно отбросить слагаемое с ν. Окончательный вывод: в изотропном веществе любой линейный закон связи между двумя физическими (симметричными) тензорами 2-го ранга, описываемый тензором 4-го ранга, зависит лишь от двух постоянных в каждой точке среды.

Естественно поставить вопрос, какими бывают изотропные тензоры 1-го, 2-го и 3-го ранга.

Очевидно, не бывает векторов и ковекторов, координаты которых не менялись бы при вращениях.

Что касается тензоров 2-го ранга, то тензор (η_{ij}) переходит при преобразовании $x \to x$, $y \to -y$ в тензор(η'_{ij}) с $\eta'_{11} = \eta_{11}$, $\eta'_{22} = \eta_{22}$, $\eta'_{12} = -\eta_{12}$, $\eta'_{21} = -\eta_{21}$, а при преобразовании $x \to y$, $y \to x$ в тензор(η''_{ij}) с $\eta''_{11} = \eta_{22}$, $\eta''_{22} = \eta_{11}$, $\eta''_{12} = \eta_{21}$, $\eta''_{21} = \eta_{12}$; равенства $\eta_{ij} = \eta'_{ij} = \eta''_{ij}$ показывают, что $\eta_{11} = \eta_{22}$, $\eta_{12} = \eta_{21} = 0$, т. е. что $\eta_{ij} = \lambda\delta_{ij}$. Таким образом, $\lambda\delta_{ij}$ — единственный изотропный тензор 2-го ранга.

Можно показать, что изотропных тензоров 3-го ранга не бывает.

Подчеркнем, что гипотеза изотропности предполагает наличие римановой метрики (мы формулировали ее для евклидовой метрики), в то время как понятие тензора не связано с метрикой — сама метрика есть разновидность тензора. Поэтому стоит посмотреть, какие тензоры инвариантны не только относительно вращений, но вообще относительно линейных преобразований. При этом уже важно различать верхние и нижние индексы.

Прежде всего ясно, что ненулевой тензор ранга (p, q) может быть инвариантным только при $p = q$: при подобном растяжении системы координат в $\lambda \neq 1$ раз все компоненты тензора умножатся на λ^{q-p}, что равно 1 только при $p - q = 0$. В частности, инвариантный тензор обязан иметь четный ранг. Среди тензоров 2-го ранга инвариантен только тензор $\eta^i_j = \lambda\delta^i_j$: это видно из того, что уже вращательно инвариантных тензоров 2-го ранга больше нет. Оказывается, что инвариантных тензоров 4-го ранга имеется двухпараметрическое семейство: $U^{ij}_{kl} = \lambda\delta^i_k\delta^j_l + \mu\delta^i_l\delta^j_k$.

2. Алгебраические операции над тензорами. Введем сначала следующие удобные обозначения. Пусть в системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ заданы компоненты $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ тензора типа (p, q). Пусть дана другая система координат $(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ (штрихи мы ставим у индексов), причем

$$x^{k'} = x^{k'}(x^1, \ldots, x^n), \quad k' = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Компоненты нашего тензора в штрихованной системе координат обозначим через $T^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q}$. Тогда закон преобразования (1) примет вид

$$T^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} = \sum_{(i),(j)} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} \tag{6}$$

или

$$T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \sum_{(i')(j')} T^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}} \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}}. \tag{7}$$

Кроме того, введем следующее правило обращения с тензорами: если в формулу некоторый индекс входит дважды, то по этому индексу подразумевается суммирование от 1 до n (n — размерность пространства), а знак суммы $\sum$ можно не писать. Так, в формуле (6) будет производиться суммирование по дважды повторяющимся — сверху и снизу — индексам $i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_q$; в формуле (7) дважды повторяются индексы $i'_1, \ldots, i'_p; j'_1, \ldots, j'_q$; индексы i_1 и i'_1 и т. д. считаются независимыми.

Использование этого правила, а также использование штрихованных индексов позволяет избежать ошибок при написании формул тензорного анализа.

Введем теперь три важнейшие алгебраические операции над тензорами. Определим их сначала в некоторой фиксированной системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$.

1) Перестановка индексов. Пусть σ — некоторая перестановка чисел $(1, \ldots, q)$: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & q \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(q) \end{pmatrix}$. Перестановка σ действует на наборах $(j_1, \ldots, j_q)$ по правилу

$$\sigma(j_1, \ldots, j_q) = (j_{\sigma(1)}, \ldots, j_{\sigma(q)}). \tag{8}$$

Мы будем говорить, что тензор $\widetilde{T}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ получается из тензора $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ перестановкой нижних индексов, если

$$\widetilde{T}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = T^{i_1 \ldots i_p}_{\sigma(j_1, \ldots, j_q)}. \tag{9}$$

Перестановка верхних индексов определяется аналогично. Нельзя переставлять между собой нижний и верхний индексы — такая операция не инвариантна относительно замены координат.

2) Свертка (след). Для тензора $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ типа $(p,\ q)$ его сверткой по индексам $(i_k,\ j_l)$ будет тензор $\widetilde{T}^{i_1\ldots i_{p-1}}_{j_1\ldots j_{q-1}}$ типа $(p-1,\ q-1)$, определяемый формулой

$$\widetilde{T}^{i_1\ldots i_{p-1}}_{j_1\ldots j_{q-1}} = T^{i_1\ldots i_{k-1} i i_k\ldots i_{p-1}}_{j_1\ldots j_{l-1} i j_l\ldots j_{q-1}} \tag{10}$$

(напомним, что по дважды входящему — сверху и снизу — индексу i производится суммирование от 1 до n). Например, свертка тензора T^i_j типа $(1,\ 1)$ — это скаляр T^i_i (след $\operatorname{Sp} T$ линейного оператора T^i_j).

3) Умножение (тензорное). Если заданы два тензора $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ и $P^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_l}$ типов $(p,\ q)$ и $(k,\ l)$ соответственно, то их произведением будет тензор $S = T \otimes P$ типа $(p+k,\ q+l)$ с компонентами

$$S^{i_1\ldots i_{p+k}}_{j_1\ldots j_{q+l}} = T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} P^{i_{p+1}\ldots i_{p+k}}_{j_{q+1}\ldots j_{q+l}} \tag{11}$$

(порядок сомножителей существен). Заметим, что тензорное умножение ассоциативно.

Лемма 1. *В результате операций* 1), 2), 3) *получается снова тензор, причем результаты их применений не зависят от выбора системы координат.*

Доказательство. 1). Пусть σ переставляет между собой только индексы k и l:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k & \ldots & l & \ldots & q \\ 1 & \ldots & l & \ldots & k & \ldots & q \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\widetilde{T}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_k\ldots j_l\ldots j_q} = T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_l\ldots j_k\ldots j_q}. \tag{12}$$

При переходе к штрихованной системе координат будем иметь $\widetilde{T}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_l\ldots j_k\ldots j_q} =$

$$= T^{i'_1\ldots i'_p}_{j'_1\ldots j'_q} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}} \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{j'_k}}{\partial x^{j_l}} \cdots \frac{\partial x^{j'_l}}{\partial x^{j_k}} \cdots \frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}}. \tag{13}$$

Изменим обозначение индексов в правой части: j'_k обозначим через j'_l, j'_l — через j'_k. Это не изменит всего выражения, так как по этим индексам производится суммирование. Тогда правая часть формулы (13) примет вид

$$T^{i'_1\ldots i'_p}_{j'_1\ldots j'_l\ldots j'_k\ldots j'_q}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\ldots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}}\frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}}\ldots\frac{\partial x^{j'_l}}{\partial x^{j_l}}\ldots\frac{\partial x^{j'_k}}{\partial x^{j_k}}\ldots\frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}}=$$

$$=\tilde T^{i'_1\ldots i'_p}_{j'_1\ldots j'_q}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\ldots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}}\frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}}\ldots\frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}},$$

т. е. мы доказали, что $\tilde T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ — компоненты тензора типа $(p,\ q)$.

2) Для тензора, свернутого по индексам i_k и j_l, будем иметь ($\widehat{i}_k$ и $\widehat{j}_l$ означает, что эти индексы пропущены)

$$\tilde T^{i_1\ldots\widehat{i}_k\ldots i_p}_{j_1\ldots\widehat{j}_l\ldots j_q}=T^{i'_1\ldots i'_p}_{j'_1\ldots j'_q}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\ldots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}}\frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}}\ldots\frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}}\bigg|_{i_k=j_l=i}=$$

$$=T^{i'_1\ldots i'_p}_{j'_1\ldots j'_q}\delta^{j'_l}_{i'_k}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\ldots\frac{\partial \widehat{x}^{i_k}}{\partial x^{i'_k}}\ldots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}}\frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}}\ldots\frac{\partial \widehat{x}^{j'_l}}{\partial x^{j_l}}\ldots\frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}}=$$

$$=\tilde T^{i'_1\ldots\widehat{i}'_k\ldots i'_p}_{j'_1\ldots\widehat{j}'_l\ldots j'_q}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\ldots\frac{\partial \widehat{x}^{i_k}}{\partial x^{i'_k}}\ldots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}}\frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}}\ldots\frac{\partial \widehat{x}^{j'_l}}{\partial x^{j_l}}\ldots\frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}},$$

где мы воспользовались равенством $\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'_k}}\dfrac{\partial x^{j'_l}}{\partial x^i}=\delta^{j'_l}_{i'_k}$. Тензорность произведения (11) очевидна. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь примеры применения построенных операций.

Примеры. 1. Пусть даны вектор ξ^i и ковектор η_j. Можно составить их произведение — тензор $T^i_j=\xi^i\eta_j$ типа (1, 1) и его след $T^i_i=\xi^i\eta_i$. Последний представляет собой скаляр — *скалярное произведение вектора и ковектора.*

2. Если даны вектор ξ^i и линейный оператор A^k_l, то их произведение $T^{ik}_l=A^k_l\xi^i$ есть тензор типа (2, 1). Свертка

$$\eta^k=T^{ik}_i=A^k_i\xi^i$$

есть снова вектор — результат применения оператора A^k_l к исходному вектору ξ^i.

Замечание. Используя введенное скалярное произведение векторов и ковекторов, отнесем каждому вектору ξ^i линейный дифференциальный оператор первого порядка на функциях; так как $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ — ковектор (градиент функции), то выражение

$$\partial_\xi f = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{14}$$

будет скаляром (производная функции по направлению ξ). В частности, если $e_1, \ldots, e_n$ — базис в пространстве векторов, где координаты вектора e_k равны $(e_k)^i = \delta^i_k$, то из формулы (14) получаем, что

$$\partial_{e_k}(f) = \frac{\partial f}{\partial x^k}. \tag{15}$$

Поэтому при нашем соответствии базисные векторные поля переходят в операторы $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Таким образом, вектору ξ соответствует дифференциальный оператор

$$\partial_\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{16}$$

Задачи. 1. Проверить, что перестановка верхнего и нижнего индексов $T^{\ldots i_k \ldots}_{\ldots j_l \ldots} \to T^{\ldots j_l \ldots}_{\ldots i_k \ldots}$ не есть тензорная операция. (Привести пример.)

2. Тензор 2-го ранга называется невырожденным, если соответствующая матрица невырождена. Показать, что для невырожденного тензора 2-го ранга обратная матрица также будет тензором.

§ 18. Тензоры типа $(0, k)$

1. Дифференциальная форма записи тензоров с нижними индексами. Рассмотрим для начала случай тензоров типа (0, 1) — ковекторов. Выше мы имели пример ковектора — градиент функции $T_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Напомним, что в анализе дифференциалом функции называлось выражение

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i. \tag{1}$$

Если задана замена $x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$, то

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'}, \tag{2}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right) dx^{i'} = \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} dx^{i'}, \tag{3}$$

т. е. выражение df инвариантно относительно замен координат.