как $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ — ковектор (градиент функции), то выражение

$$\partial_\xi f = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{14}$$

будет скаляром (производная функции по направлению ξ). В частности, если $e_1, \ldots, e_n$ — базис в пространстве векторов, где координаты вектора e_k равны $(e_k)^i = \delta^i_k$, то из формулы (14) получаем, что

$$\partial_{e_k}(f) = \frac{\partial f}{\partial x^k}. \tag{15}$$

Поэтому при нашем соответствии базисные векторные поля переходят в операторы $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Таким образом, вектору ξ соответствует дифференциальный оператор

$$\partial_\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{16}$$

Задачи. 1. Проверить, что перестановка верхнего и нижнего индексов $T^{\ldots i_k \ldots}_{\ldots j_l \ldots} \to T^{\ldots j_l \ldots}_{\ldots i_k \ldots}$ не есть тензорная операция. (Привести пример.)

2. Тензор 2-го ранга называется невырожденным, если соответствующая матрица невырождена. Показать, что для невырожденного тензора 2-го ранга обратная матрица также будет тензором.

§ 18. Тензоры типа $(0, k)$

1. Дифференциальная форма записи тензоров с нижними индексами. Рассмотрим для начала случай тензоров типа (0, 1) — ковекторов. Выше мы имели пример ковектора — градиент функции $T_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Напомним, что в анализе дифференциалом функции называлось выражение

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i. \tag{1}$$

Если задана замена $x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$, то

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'}, \tag{2}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right) dx^{i'} = \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} dx^{i'}, \tag{3}$$

т. е. выражение df инвариантно относительно замен координат.

Аналогично, если мы любому ковектору T_i поставим в соответствие выражение $T_i dx^i$ (дифференциальную форму), то это выражение будет инвариантно относительно замены координат.

Что такое символы dx^i? Базисные ковекторные поля e^i преобразуются по закону

$$e^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} e^{i'}, \quad T_i e^i = T_{i'} e^{i'}. \tag{4}$$

Последнее равенство означает просто, что T_i (соответственно $T_{i'}$) — координаты ковектора в базисе $e^1, \ldots, e^n$ (соответственно $e^{1'}, \ldots, e^{n'}$).

Мы видим, что базисные ковекторы e^i преобразуются по тому же закону, что и dx^i:

$$e^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} e^{i'} \leftrightarrow dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'}, \tag{5}$$

$$e^i \leftrightarrow dx^i, \quad e^{i'} \leftrightarrow dx^{i'}.$$

Можно сказать, что символы dx^i — это базисные ковекторы e^i. Дифференциальная форма $T_i dx^i$ соответствует разложению $T_i e^i$ ковектора по базису. Мы видели в предыдущем параграфе, что любой ковектор — это линейная форма на векторах. В частности, значение линейной формы $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ на векторе $\Delta\xi = \Delta x^i e_i$ равно по определению

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \Delta\xi\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \Delta x^i. \tag{6}$$

Это выражение называется, как известно, главной линейной частью приращения функции f при сдвиге вдоль вектора $\Delta\xi$.

Рассмотрим второй важный случай — тензоры типа (0, 2). Базис в пространстве таких тензоров составляют произведения

$$e^i \otimes e^j. \tag{7}$$

Разложение любого тензора T_{ij} по базису (7) имеет вид

$$T_{ij} e^i \otimes e^j. \tag{8}$$

Тензор T_{ij} — это билинейная форма на векторах. Действительно, если ξ^i, η^j — два вектора, то выражение

$$T_{ij} \xi^i \eta^j \tag{9}$$

есть скаляр — значение билинейной формы T на векторах ξ, η.

Любой тензор типа (0, 2) распадается в сумму симметрического и кососимметрического ($T_{ji} = -T_{ij}$). Это очевидно из следующего тождества:

$$T_{ij} = T_{ij}^{\mathrm{sym}} + T_{ij}^{\mathrm{alt}},$$
$$T_{ij}^{\mathrm{sym}} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}); \quad T_{ij}^{\mathrm{alt}} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}). \tag{10}$$

Из формул (10) получаем базис в пространстве симметрических тензоров

$$\frac{e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i}{2}, \quad i \leqslant j, \tag{11}$$

и в пространстве кососимметрических тензоров

$$e^i \wedge e^j = e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i, \quad i < j. \tag{12}$$

Если тензор T_{ij} симметрический, то его разложение по базису (11) имеет вид

$$T_{ij}e^i \otimes e^j = \sum_{i \leqslant j} T_{ij}e^i \otimes e^j + \sum_{i > j} T_{ij}e^i \otimes e^j =$$
$$= \sum_i T_{ii}e^i \otimes e^i + \sum_{i<j} 2T_{ij}\left(\frac{e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i}{2}\right). \tag{13}$$

Если тензор T_{ij} кососимметрический, то его разложение по базису (12) имеет вид

$$T_{ij}e^i \otimes e^j = \sum_{i<j} T_{ij}e^i \otimes e^j + \sum_{i>j} T_{ij}e^i \otimes e^j = \sum_{i<j} T_{ij}\, e^i \wedge e^j. \tag{14}$$

В дифференциальной форме базис (11) записывается в виде $dx^i dx^j = dx^j dx^i$, базис (12) записывается в виде $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge \wedge dx^i$.

Пример. Риманова метрика g_{ij} — пример симметрического тензора типа (0, 2). Его разложение по базису $dx^i dx^j$ имеет вид

$$g_{ij}dx^i dx^j. \tag{15}$$

Это — известная формула для квадрата элемента длины dl^2.

2. Кососимметрические тензоры типа (0, k).

Определение 1. Кососимметрическим тензором (типа (0, k)) называется тензор $T_{i_1, \ldots, i_k}$ такой, что

$$T_{\sigma(i_1, \ldots, i_k)} = \operatorname{sgn}(\sigma)\, T_{i_1 \ldots i_k}. \tag{16}$$

Здесь $\operatorname{sgn}(\sigma) = \pm 1$ — знак перестановки σ, действие перестановки σ на набор $(i_1, \ldots, i_k)$ определено формулой (8) § 17. Это определение не зависит от выбора системы координат ввиду тензорного характера операции перестановки индексов. Таким образом, тензор $T_{i_1 \ldots i_k}$ меняет знак при любой нечетной перестановке индексов и сохраняет свое значение при четной перестановке индексов.

Замечание. Если ранг k больше размерности пространства n, то кососимметрический тензор $T_{i_1\ldots i_k}$ тождественно равен нулю (обязательно будет пара совпадающих индексов).

Для кососимметрических тензоров мы будем в целях удобства использовать язык дифференциальных форм. Базис в пространстве таких тензоров состоит из элементов

$$dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k},\quad i_1<\ldots<i_k, \tag{17}$$

где

$$dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}=\sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}(\sigma)\,e^{\sigma\,(i_1}\otimes\ldots\otimes e^{i_k)} \tag{18}$$

(суммирование по всем перестановкам индексов). Как и в предыдущем пункте, мы получим для кососимметрического тензора $T_{i_1\ldots i_k}$ соответствующую дифференциальную форму

$$T_{i_1\ldots i_k}e^{i_1}\otimes\ldots\otimes e^{i_k}=\sum_{i_1<\ldots<i_k}T_{i_1\ldots i_k}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}. \tag{19}$$

Выражение $dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$ кососимметрично относительно перестановок индексов:

$$dx^{\sigma(i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k)}=\operatorname{sgn}(\sigma)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}. \tag{20}$$

Пример. Рассмотрим кососимметрические тензоры типа $(0,\ n)$ в n-мерном пространстве. Каждый такой тензор $T_{i_1\ldots i_n}$ определяется одним числом $T_{1\,2\ldots n}$. Действительно,

$$T_{\sigma(1,\ldots,n)}=\operatorname{sgn}(\sigma)\,T_{1\,2\ldots n}, \tag{21}$$

а если среди индексов $i_1,\ \ldots,\ i_n$ есть хотя бы два совпадающих, то компонента $T_{i_1\ldots i_n}$ равна нулю. Таким образом, мы имеем единственный базисный тензор — это $dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$.

Компоненты этого тензора в физической литературе обозначаются $\varepsilon_{i_1\ldots i_n}$. Ясно, что компонента $\varepsilon_{i_1\ldots i_n}$ отлична от нуля, лишь если среди индексов $i_1\ldots i_n$ нет повторяющихся; тогда

$$\varepsilon_{i_1\ldots i_n}=\begin{cases}+1 & \text{при}\ \operatorname{sgn}(i_1,\ \ldots,\ i_n)=+1,\\ -1 & \text{при}\ \operatorname{sgn}(i_1,\ \ldots,\ i_n)=-1.\end{cases} \tag{22}$$

Очевидно, $T_{i_1\ldots i_n}=T_{1\,2\ldots n}\varepsilon_{i_1\ldots i_n}$.

Как преобразуются кососимметрические тензоры n-го ранга при замене координат?

Теорема 1. *Кососимметрические тензоры ранга, равного размерности пространства, при замене координат* $x^{i'}=x^{i'}(x^1,\ \ldots,\ x^n)$ *преобразуются по закону*

$$T_{1\,2\ldots n}=T_{1'2'\ldots n'}J, \tag{23}$$

где $J=\det\left(\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right)$ *— якобиан замены.*

Доказательство. Проверим формулу (23) для базисного тензора $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n}$. Имеем

$$\varepsilon_{12\ldots n} = \varepsilon_{i'_1 \ldots i'_n} \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^{i'_n}}{\partial x^{i_n}} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{\partial x^{\sigma(i'_1,}}{\partial x^1} \ldots \frac{\partial x^{i'_n)}}{\partial x^n}.$$

Эта формула и есть определение детерминанта J.

Пример. Пусть тензор g_{ij} типа (0, 2) является невырожденной квадратичной формой и $g = \det(g_{ij})$. При замене координат $x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^n)$ матрица g_{ij} преобразуется по закону

$$g_{i'j'} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}$$

или, в матричной форме, $G' = A^{\mathrm{T}} G A$, где $A = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)$, $G = (g_{ij})$, $G' = (g_{i'j'})$. Поэтому определитель $g = \det G$ преобразуется по закону

$$g' = \det G' = \det\left(A^{\mathrm{T}} G A\right) = (\det A)^2 \det G. \tag{24}$$

Следовательно, $\sqrt{|g'|} = \sqrt{|g|}\,|\det A|$. Таким образом, доказано

Следствие. *Выражение* $\sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ *является тензором относительно таких замен координат, что* $J = \det A = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right) > 0.$

Форма $\sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ называется *элементом объема*, задаваемым метрикой g_{ij}.

Комплексный случай. Если задано *комплексное* пространство с координатами $z^1, \ldots, z^n$; $\bar z^1, \ldots, \bar z^n$, где $z^\alpha = x^\alpha + iy^\alpha$, $\bar z^\alpha = x^\alpha - iy^\alpha$, то дифференциальные формы можно записывать в виде

$$T = \sum T^{(p,q)}, \quad p + q = k,$$

где слагаемые

$$T^{(p,q)} = \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_p \\ j_1 < \ldots < j_q}} T_{i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_q} dz^{i_1} \wedge \ldots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar z^{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar z^{j_q} \tag{25}$$

называются «формами типа (p, q)».

Например, пусть задана форма вида

$$\Omega = T_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta,$$

где $T_{\beta\alpha} = -\bar{T}_{\alpha\beta}$. Тогда матрица $(iT_{\alpha\beta})$ удовлетворяет условию

$$iT_{\beta\alpha} = \overline{iT_{\alpha\beta}}$$

и является матрицей эрмитовой формы $\sum iT_{\alpha\beta} dz^\alpha d\bar{z}^\beta$. Таким образом, в комплексном случае эрмитова метрика задается формой типа (1, 1).

3. Внешнее произведение дифференциальных форм. Внешняя алгебра. В качестве приложения введенных в § 17 алгебраических операций над тензорами определим внешнее произведение двух кососимметрических тензоров типа $(0, p)$ и типа $(0, q)$ (дифференциальных форм ранга p и q соответственно). Пусть

$$\begin{gathered}\omega_1 = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} T_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},\\ \omega_2 = \sum_{j_1 < \ldots < j_q} S_{j_1 \ldots j_q} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.\end{gathered} \tag{26}$$

Определим форму ω ранга $p+q$:

$$\omega = \omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_{k_1 < \ldots < k_{p+q}} R_{k_1 \ldots k_{p+q}} dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_{p+q}}, \tag{27}$$

полагая

$$R_{k_1 \ldots k_{p+q}} = \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \frac{\operatorname{sgn}(\sigma)}{p!\,q!} T_{\sigma(k_1 \ldots k_p} S_{k_{p+1} \ldots k_{p+q})}. \tag{28}$$

Величины $R_{k_1 \ldots k_{p+q}}$ образуют тензор, получаемый из тензоров $T_{i_1 \ldots i_p}$, $S_{j_1 \ldots j_q}$ комбинацией операций тензорного произведения и перестановки индексов. Этот тензор кососимметричен по построению, и определение (28) не зависит от выбора координат.

Лемма 1. *Внешнее умножение дифференциальных форм — билинейная ассоциативная операция, причем*

$$\omega_2 \wedge \omega_1 = (-1)^{pq} \omega_1 \wedge \omega_2, \tag{29}$$

если ω_1 — форма ранга p, ω_2 — форма ранга q.

Доказательство. Билинейность очевидна; ассоциативность проверяется непосредственно из формулы (28). Формула (29) вытекает из того, что знак перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots q & q+1 & \ldots p+q \\ p+1 & \ldots p+q & 1 & \ldots p \end{pmatrix}$$

равен $(-1)^{pq}$ (проверьте!). Лемма доказана.

Замечание. Нетрудно проверить, что для базисных форм $\omega_1 = dx^i$, $\omega_2 = dx^j$ внешнее произведение (28) совпадает с определенным в п. 2 символом $dx^i \wedge dx^j$. Вообще, если $\omega_1 = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$, $\omega_2 = dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}$, то

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}. \tag{30}$$

Внешнее произведение задает в пространстве форм в данной точке структуру *внешней алгебры*.

4. Кососимметрические тензоры типа $(k, 0)$ (поливекторы). Интеграл от антикоммутирующих переменных. Кососимметрические тензоры с верхними индексами часто называют *поливекторами*. Для их описания также удобно использовать язык внешней алгебры. Если $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис векторов, то задается базис кососимметрических тензоров типа $(k, 0)$ — поливекторов — аналогично (17), (18), $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$, $i_1 < \ldots < i_k$, где свертка с базисными формами такова $(e^j \leftrightarrow dx^j)$:

$$\left(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}, e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_k}\right) = \delta_{i_1}^{j_1} \ldots \delta_{i_k}^{j_k}, \tag{31}$$

$j_1 < \ldots < j_k$. В полной аналогии с тензорами типа $(0, k)$ поливекторы образуют внешнюю алгебру, натянутую на символы $e_1, \ldots, e_n$. Аналогично теореме 1 устанавливается следующая

Теорема 2. *При замене координат верна формула*

$$T^{12\ldots n} = J^{-1} T^{1'2'\ldots n'}, \tag{32}$$

где $J = \det\left(\partial x^{i'}/\partial x^j\right)$ — якобиан замены.

Доказательство не отличается от доказательства теоремы 1.

Следуя современной литературе по квантовой теории поля, введем «интеграл от антикоммутирующих переменных» $\theta_1, \ldots, \theta_n$:

$$\int\limits_{R^n} \ldots \int f(\theta_1, \ldots, \theta_n)\, d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_n; \tag{33}$$

здесь считается, что $f(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ — полином во внешней алгебре с образующими $\theta_1, \ldots, \theta_n$, интеграл берется только по всему пространству (не по области!). При линейных заменах в θ-пространстве величина $d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_n$ по определению преобразуется так:

$$d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_n = J^{-1} d\theta_1' \wedge \ldots \wedge d\theta_n', \tag{34}$$

где $J = \det\left(\partial\theta_i/\partial\theta_j'\right)$ — обычное число. Правила интегрирования по определению таковы:

$$\int\limits_{R} \theta_j d\theta_j = 1, \quad \int\limits_{R} d\theta_j = 0, \tag{35}$$

$$\iint\limits_{R^2} f(\theta_1) \wedge g(\theta_2)\, d\theta_1 \wedge d\theta_2 = \left(\int\limits_{R} f(\theta_1)\, d\theta_1\right) \wedge \left(\int\limits_{R} g(\theta_2)\, d\theta_2\right) \tag{36}$$

(остальные правила самоочевидны), где $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ — произвольный набор внешних образующих. Из формул (31), (32) вытекает вывод: после сопоставления $d\theta_j \to e_j$, $\theta_j \to e^j$ величина $d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_n$ сведется к базисному поливектору — тензору типа $(n, 0)$, старший член коэффициента $f(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ — к тензору типа $(0, n)$, а «интеграл» — это их обычная свертка. Таким образом, интеграл от антикоммутирующих переменных — это обычная свертка тензоров, записанных в формализме Картана внешних алгебр как для форм, так и для поливекторов. Полезность этой интерпретации определяется следующим фактом.

Задача. Пусть $f(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \exp\left(\frac{1}{2} a^{ij}\theta_i \wedge \theta_j\right)$, $a^{ji} = -a^{ij}$. Доказать формулу

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \ldots \int f(\theta_1, \ldots, \theta_n)\, d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_n = \sqrt{\det\left(a^{ij}\right)}. \tag{37}$$

Выражение (33) на пространстве $\mathbb{R}^n$ дает тензор типа (n, n), кососимметрический отдельно по нижним и отдельно по верхним индексам. Такой тензор есть скаляр в $\mathbb{R}^n$.

Замена $\theta(\theta')$ в интеграле (33) может быть и нелинейной. Требуется только, чтобы она сохраняла, как говорят, $\mathbb{Z}_2$-градуировку, т. е. полиномы $\theta(\theta')$ должны быть линейной комбинацией выражений нечетной степени во внешней алгебре.

Пример. Пусть $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $f(\theta) = \theta_1$. Тогда по определению имеем

$$\int f(\theta)\, d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3 = 0.$$

Рассмотрим такую замену:

$$\theta_1 = \theta_1' + \theta_1' \wedge \theta_2' \wedge \theta_3', \quad \theta_2 = \theta_2', \quad \theta_3 = \theta_3'.$$

Напишем матрицу Якоби этой замены (точные определения см. ниже):

$$\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\theta_j'}\right) = \begin{pmatrix} 1 + \theta_2' \wedge \theta_3' & -\theta_1' \wedge \theta_3' & \theta_1' \wedge \theta_2' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якобиан $J = \det\left(\partial\theta_i/\partial\theta_j'\right)$ имеет вид $J = 1 + \theta_2' \wedge \theta_3'$; $J^{-1} = 1 - \theta_2' \wedge \theta_3'$. Проверьте следующее тождество:

$$\int f(\theta(\theta'))\, J^{-1}\, d\theta_1' \wedge d\theta_2' \wedge d\theta_3' = 0.$$

Более общо, если

$$\theta_i = a_{ij}(\theta_1', \ldots, \widehat{\theta}_j', \ldots, \theta_n') + \theta_j' \wedge b_{ij}(\theta_1', \ldots, \widehat{\theta}_j', \ldots, \theta_n'),$$

то мы полагаем

$$\frac{\partial\theta_i}{\partial\theta_j'} = b_{ij}(\theta_1', \ldots, \widehat{\theta}_j', \ldots, \theta_n').$$

Очевидно, при $\mathbb{Z}_2$-градуированных заменах элементы матрицы Якоби коммутируют.

Задача. Докажите следующую формулу замены переменных:

$$\int f(\theta(\theta'))\, J^{-1}\, d\theta_1' \wedge \ldots \wedge d\theta_n' = \int f(\theta)\, d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_n, \qquad (38)$$

где $J = \det(\partial\theta_i/\partial\theta_j')$.

Указание. Если $f(\theta)$ — одночлен старшей степени, то формула (38) очевидна. Требует отдельного анализа то, что младшие члены, содержащиеся в полиноме $f(\theta)$, дадут нулевой вклад после замены, как показывает пример выше.

Задачи. 1. Пусть $\omega^j = a_i^j dx^i$. Доказать формулу

$$\omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_k} = J^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k},$$

где $J^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k}$ — минор матрицы (a_i^j), стоящий на пересечении строк с номерами $i_1, \ldots, i_k$ и столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_k$. В частности,

$$\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n = \det(a_i^j)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

2. Найти размерность пространства k-форм (в данной точке).

3. Доказать, что $\sum\limits_k a^j_{i_k} \varepsilon_{i_1\ldots i_{k-1} j i_{k+1}\ldots i_n} = \varepsilon_{i_1\ldots i_n} \operatorname{Sp}(a_i^j)$, где $\operatorname{Sp}(a_i^j) = a_i^i$ — след матрицы.

§ 19. Тензоры в римановом и псевдоримановом пространстве

1. Поднятие и опускание индексов. Пусть g_{ij} — тензор типа (0, 2), задающий риманову или псевдориманову метрику. Напомним, что если заданы два вектора ξ^i, η^j, то можно определить их скалярное произведение, положив

$$\langle \xi, \eta \rangle = \xi^i \eta^j g_{ij}. \qquad (1)$$

(Мы использовали здесь операцию тензорного произведения и свертки.)

Аналогично, если g^{ij} — тензор типа (2, 0), то он задает скалярное произведение ковекторов ξ_j, η_i по формуле

$$\langle \xi, \eta \rangle = g^{ij} \xi_j \eta_i. \qquad (2)$$

В присутствии метрики g_{ij} можно определить весьма важную операцию опускания индексов. Если $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ — тензор типа (p, q), то можно построить тензор $T^{i_2\ldots i_p}_{i_1 j_1\ldots j_q}$ типа $(p-1, q+1)$, полагая

$$T^{i_2\ldots i_p}_{i_1 j_1\ldots j_q} = g_{i_1 k} T^{k i_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}. \qquad (3)$$

Легко видеть, что это снова тензор (итерация операций умножения на тензор g_{ij} и свертки).