Задача. Докажите следующую формулу замены переменных:

$$\int f(\theta(\theta'))\, J^{-1}\, d\theta_1' \wedge \ldots \wedge d\theta_n' = \int f(\theta)\, d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_n, \tag{38}$$

где $J = \det(\partial\theta_i/\partial\theta_j')$.

Указание. Если $f(\theta)$ — одночлен старшей степени, то формула (38) очевидна. Требует отдельного анализа то, что младшие члены, содержащиеся в полиноме $f(\theta)$, дадут нулевой вклад после замены, как показывает пример выше.

Задачи. 1. Пусть $\omega^j = a_i^j dx^i$. Доказать формулу

$$\omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_k} = J^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k},$$

где $J^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k}$ — минор матрицы (a_i^j), стоящий на пересечении строк с номерами $i_1, \ldots, i_k$ и столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_k$. В частности,

$$\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n = \det(a_i^j)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

2. Найти размерность пространства k-форм (в данной точке).

3. Доказать, что $\sum\limits_k a_{i_k}^j \varepsilon_{i_1 \ldots i_{k-1} j i_{k+1} \ldots i_n} = \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} \operatorname{Sp}(a_i^j)$, где $\operatorname{Sp}(a_i^j) = a_i^i$ — след матрицы.

§ 19. Тензоры в римановом и псевдоримановом пространстве

1. Поднятие и опускание индексов. Пусть g_{ij} — тензор типа (0, 2), задающий риманову или псевдориманову метрику. Напомним, что если заданы два вектора ξ^i, η^j, то можно определить их скалярное произведение, положив

$$\langle \xi, \eta \rangle = \xi^i \eta^j g_{ij}. \tag{1}$$

(Мы использовали здесь операцию тензорного произведения и свертки.)

Аналогично, если g^{ij} — тензор типа (2, 0), то он задает скалярное произведение ковекторов ξ_j, η_i по формуле

$$\langle \xi, \eta \rangle = g^{ij} \xi_j \eta_i. \tag{2}$$

В присутствии метрики g_{ij} можно определить весьма важную операцию опускания индексов. Если $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ — тензор типа (p, q), то можно построить тензор $T^{i_2 \ldots i_p}_{i_1 j_1 \ldots j_q}$ типа $(p-1,\ q+1)$, полагая

$$T^{i_2 \ldots i_p}_{i_1 j_1 \ldots j_q} = g_{i_1 k} T^{k i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}. \tag{3}$$

Легко видеть, что это снова тензор (итерация операций умножения на тензор g_{ij} и свертки).

Переход от тензора $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ к тензору $T^{i_2\ldots i_p}_{i_1 j_1\ldots j_q}$ называется *опусканием индекса* i_1 с помощью метрики g_{ij}.

Пример. Если ξ^i — вектор, то после опускания индекса мы получим ковектор

$$\xi_i = g_{ij}\xi^j. \tag{4}$$

Таким образом, опускание индексов задает линейное отображение пространства векторов в пространство ковекторов. Это соответствие можно описать следующим образом: если $\langle,\rangle$ — соответствующее g_{ij} скалярное произведение, то вектору η соответствует линейная форма (ковектор), принимающая на векторе ξ значение $\langle\xi, \eta\rangle$.

Наоборот, для поднятия нижних индексов при наличии метрики g_{ij} необходимо рассмотреть обратную метрику, т. е. такую матрицу g^{ij}, что

$$g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k \tag{5}$$

(напомним, что $\det(g_{ij}) \neq 0$).

По определению имеем

$$T^{j_1 i_1\ldots i_p}_{j_2\ldots j_q} = g^{j_1 k}T^{i_1\ldots i_p}_{k j_2\ldots j_q}. \tag{6}$$

Лемма 1. *Если мы опустим индекс, а потом поднимем, то получим исходный тензор.*

Доказательство. Опустив у тензора $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ индекс i_1, получим тензор $g_{i_1 k}T^{k i_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$. Подняв после этого индекс i_1, получим тензор

$$g^{i_1 l}g_{lk}T^{k i_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \delta^{i_1}_k T^{k i_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q},$$

совпадающий с исходным. Лемма доказана.

Матрица g^{ij} задает скалярное произведение ковекторов, как мы видели выше. Таким образом, заданием метрики g_{ij} мы определили и скалярное произведение ковекторов g^{ij}. Это скалярное произведение на ковекторах однозначно определяется требованием, чтобы после операции поднятия индексов мы получили то же скалярное произведение, что и для векторов. Это вытекает из следующего утверждения.

Лемма 2. *Верно следующее равенство: для пары векторов $\xi = (\xi^i)$, $\eta = (\eta^i)$ и соответствующей пары ковекторов $\hat\xi = (\hat\xi_i) = (g_{ij}\xi^j)$, $\hat\eta = (\hat\eta_i) = (g_{ij}\eta^j)$ их скалярные произведения совпадают: $\langle\hat\xi, \hat\eta\rangle = \langle\xi, \eta\rangle$.*

Доказательство. Так как $\langle\xi, \eta\rangle = g_{ij}\xi^i\eta^j$ и $\langle\hat\xi, \hat\eta\rangle = g^{ij}\hat\xi_j\hat\eta_i$, то

$$\langle\hat\xi, \hat\eta\rangle = g^{ij}\hat\xi_j\hat\eta_i = g^{ij}g_{jk}\xi^k g_{il}\eta^l = \delta^i_k\xi^k g_{il}\eta^l = \xi^i g_{ik}\eta^k = \langle\xi, \eta\rangle.$$

Лемма доказана.

Замечание. Нетрудно видеть, что пока мы использовали только невырожденность тензора g_{ij}, $g=\det(g_{ij})\neq 0$; положительная определенность (и даже симметричность) в предыдущих утверждениях и формулах роли не играли. В гл. 5 мы будем проводить аналогичные конструкции для кососимметрической метрики в связи с гамильтоновым формализмом.

2. Собственные значения квадратичной формы. Пусть задан линейный оператор T_i^j — тензор типа (1, 1). Если нет метрики, то не имеет смысла говорить о симметричности или косой симметричности этого тензора, так как нельзя переставлять между собой индексы i и j.

Если же имеется метрика g_{ij}, то можно опустить индекс: $T_{ij}= g_{ik}T_j^k$; мы получим при этом тензор типа (0, 2), определяющий билинейную форму $\{,\}_T$ от двух векторов. Если $\langle,\rangle$ — скалярное произведение, соответствующее метрике g_{ij}, то эта билинейная форма имеет вид

$$\{\xi,\eta\}_T=\langle\xi,T\eta\rangle=\xi^i g_{ij}T_k^j\eta^k, \tag{7}$$
$$\xi=(\xi^i),\quad \eta=(\eta^i).$$

Определение 1. Говорят, что линейный оператор T_i^j в пространстве с метрикой g_{ij} *симметричен* (*кососимметричен*), если билинейная форма $T_{ij}=g_{ik}T_j^k$ симметрична, $T_{ji}=T_{ij}$ (кососимметрична, $T_{ji}=-T_{ij}$).

Теорема 1. *Линейный оператор $T=(T_j^i)$ в пространстве с римановой или псевдоримановой метрикой g_{ij} симметричен или кососимметричен в том и только в том случае, если для любых векторов $\xi=(\xi^i)$, $\eta=(\eta^i)$ выполняется соотношение*

$$\langle T\xi,\eta\rangle=\langle\xi,T\eta\rangle \ (\textit{симметричность}), \tag{8}$$
$$\langle T\xi,\eta\rangle=-\langle\xi,T\eta\rangle \ (\textit{косая симметричность}). \tag{9}$$

Теорема является очевидным следствием формулы (7).

Пусть теперь в римановом или псевдоримановом пространстве задана симметрическая билинейная форма T_{ij}. Тогда, подняв индекс, можно рассмотреть оператор $T_j^i=g^{ik}T_{kj}$.

Определение 2. Собственные значения оператора $T_j^i= g^{ik}T_{kj}$ называются *собственными значениями квадратичной формы T_{ij} в метрике g_{ij}*.

Если λ — собственное значение оператора T_j^i, ξ^i — соответствующий собственный вектор, то по определению имеем

$$T_j^i\xi^j=\lambda\xi^i \Leftrightarrow g^{ik}T_{kj}\xi^j=\lambda\xi^i. \tag{10}$$

Тем самым собственный вектор ξ^i есть решение системы уравнений

$$T_{kj}\xi^j=\lambda g_{ki}\xi^i,\qquad k=1,\ldots,n \tag{11}$$

(ср. систему (10)).

След $\operatorname{Sp} T^i_j$ и детерминант $\det T^i_j$ линейного оператора $T^i_j = g^{ik}T_{kj}$ являются метрическими инвариантами формы T_{ij} (т. е. инвариантами, зависящими от метрики). В частности, след имеет вид

$$T^i_i = g^{ik}T_{ik}. \tag{12}$$

Пример. На поверхности $r = r(u, v)$, $r = (x, y, z)$, в пространстве $\mathbb{R}^3$ возникало две квадратичные формы ($x^1 = u$, $x^2 = v$):

1) метрика $g_{ij}dx^idx^j$ — тензор g_{ij};

2) вторая квадратичная форма $b_{ij}dx^idx^j$ — тензор b_{ij} (здесь суммирование проводится по повторяющимся индексам от 1 до 2, так как поверхность двумерна).

В § 8 были получены формулы:

$$\text{гауссова кривизна } K = \frac{\det(b_{ij})}{\det(g_{ij})},$$

$$\text{средняя кривизна } H = b^i_i = g^{ij}b_{ij}.$$

Таким образом, средняя кривизна — это след двумерного тензора b_{ij} в присутствии метрики g_{ij}. Для гауссовой кривизны имеем

$$K = (\det(g_{ij}))^{-1}\det(b_{ij}) = \det\left(g^{ik}b_{kj}\right) = \det\left(b^i_j\right).$$

Тем самым гауссова кривизна также есть метрический инвариант второй квадратичной формы.

3. Оператор *. В присутствии метрики g_{ij} можно задать операцию $*$ отождествления кососимметрических тензоров типа $(0, k)$ и $(0, n-k)$.

Определение 3. Если $T_{i_1\ldots i_k}$ — кососимметрический тензор типа $(0, k)$, то через $*T$ будет обозначаться кососимметрический тензор типа $(0, n-k)$, задаваемый формулой

$$(*T)_{i_{k+1}\ldots i_n} = \frac{1}{k!}\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\ldots i_n}T^{i_1\ldots i_k}, \tag{13}$$

где $T^{i_1\ldots i_k}$ — соответствующий тензору $T_{i_1\ldots i_k}$ тензор типа $(k, 0)$:

$$T^{i_1\ldots i_k} = g^{i_1j_1}\ldots g^{i_kj_k}T_{j_1\ldots j_k}. \tag{14}$$

Мы видели в п. 2 § 18, что $\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\ldots i_n}$ в n-мерном пространстве есть тензор относительно замен координат с положительным якобианом. Поэтому $*T$ будет тензором относительно таких замен, а его косая симметричность очевидна.

Замечание. Имеет место формула (проверьте)

$$*(*T) = (-1)^{k(n-k)}\operatorname{sgn}(g)\,T. \tag{15}$$

4. Тензоры в евклидовом пространстве. В евклидовом пространстве метрика g_{ij} в евклидовых координатах имеет вид $g_{ij} =$

$=\delta_{ij}$. Поэтому при опускании (поднятии) индексов компоненты любого тензора не меняются:

$$T^{i_2\ldots i_p}_{i_1 j_1\ldots j_q}=\delta_{i_1 i}T^{i i_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}=T^{i_1 i_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}. \qquad (16)$$

Таким образом, в евклидовых координатах нет различия между верхними и нижними индексами; все индексы, например, можно считать нижними. Такая запись будет инвариантна относительно замен, сохраняющих евклидову метрику, т. е. относительно ортогональных преобразований и трансляций.

В частности, в евклидовых координатах матрица оператора и матрица соответствующей ему квадратичной формы совпадают. Набор компонент градиента преобразуется как вектор при движениях евклидова пространства и т. д.

Рассмотрим для случая трехмерного евклидова пространства с евклидовыми координатами x, y, z действие оператора $*$:

$$*\,dx=dy\wedge dz,\quad *dy=-dx\wedge dz,\quad *\,dz=dx\wedge dy$$

(проверьте). Любая 1-форма (ковектор) имеет вид $\omega=P\,dx+ +Q\,dy+R\,dx$. Для такой формы

$$*\,\omega=P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy,$$

$$*\,(*\,\omega)=\omega.$$

Если f — скаляр, то $*\,f=f\,dx\wedge dy\wedge dz$ — форма 3-го ранга и $*\,(f\,dx\wedge dy\wedge dz)=f$.

Задачи. 1. Пусть $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — рассматривавшийся выше (см. п. 2 § 18) кососимметрический тензор в трехмерном евклидовом пространстве. Доказать следующие формулы:

а) $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\lambda\mu\nu}=\begin{vmatrix}\delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu}\\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu}\\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu}\end{vmatrix}$,

б) $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\lambda\mu\gamma}=\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu}-\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda}$,

в) $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\lambda\beta\gamma}=2\delta_{\alpha\lambda}$,

г) $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}=6$

(везде суммирование по повторяющимся индексам подразумевается); $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера.

2. Пусть

$$\omega_1=\sum_{i_1<\ldots<i_p}T_{i_1\ldots i_p}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p},$$

$$\omega_2=\sum_{j_1<\ldots<j_p}S_{j_1\ldots j_p}dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_p}.$$

Положим $\{\omega_1,\omega_2\}=\frac{1}{p!}g^{i_1j_1}\ldots g^{i_pj_p}T_{i_1\ldots i_p}S_{j_1\ldots j_p}$. Доказать, что $\omega_1\wedge *\,\omega_2=\{\omega_1,\omega_k\}\sqrt{|g|}\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$.