§ 21. Тензоры ранга 2 в псевдоевклидовом пространстве и их собственные значения

1. Кососимметрические тензоры. Инварианты электромагнитного поля. Разберем важный пример тензоров — кососимметрические тензоры 2-го ранга в пространстве Минковского $\mathbb{R}^4_{1,3}$. В частности, электромагнитное поле F_{ik} является таким тензором, и мы принимаем соответствующую терминологию, называя тензор полем и т. д.

Определение 1. *Инвариантами* поля F_{ik} называются коэффициенты характеристического многочлена

$$P(\lambda)=\det(F_{ik}-\lambda g_{ik}), \tag{1}$$

где g_{ik} — метрика Минковского.

Введем векторы электрического и магнитного полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, полагая

$$\begin{gathered} E_\alpha=F_{0\alpha}, \quad \alpha=1,\,2,\,3; \\ -H^1=F_{23}, \quad -H^2=F_{31}, \quad -H^3=F_{12}. \end{gathered} \tag{2}$$

Матрица F_{ik} принимает тогда следующий вид:

$$F_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -H^3 & H^2 \\ -E_2 & H^3 & 0 & -H^1 \\ -E_3 & -H^2 & H^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Лемма 1. *Характеристический многочлен тензора F_{ik} имеет вид*

$$P(\lambda)=-\lambda^4+(\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2)\lambda^2+\langle \mathbf{E},\,\mathbf{H}\rangle^2. \tag{4}$$

Доказательство получается прямым вычислением определителя матрицы $(F_{ik}-\lambda g_{ik})$, где матрица F_{ik} имеет вид (3). Другое доказательство легко получить при помощи доказанной ниже теоремы 1 о каноническом виде кососимметрических тензоров в псевдоевклидовом пространстве.

Замечание. Хотя матрица F_{ik} в данной точке кососимметрична, ввиду неевклидовости метрики она, вообще говоря, не может быть приведена к стандартной блочной форме при помощи лоренцева преобразования.

Переводя формулы (2) на язык дифференциальных форм, мы получаем

$$\begin{aligned} F &= \sum_{i<j} F_{ij}dx^i\wedge dx^j = \\ &= E_\alpha dx^0\wedge dx^\alpha - H^1dx^2\wedge dx^3 - H^2dx^3\wedge dx^1 - H^3dx^1\wedge dx^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ являются векторами лишь по отношению к вращениям трехмерного пространства $(x^1,\,x^2,\,x^3)$. Так как F_{ik} —

тензор, при лоренцевых преобразованиях вида

$$x^1 = \frac{x^{1'} + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad x^2 = x^{2'};\quad x^3 = x^{3'};\quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x^{1'}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{6}$$

где $x^0 = ct$, $x^{0'} = ct'$, для векторов **E** и **H** имеем

$$\begin{gathered} E_1 = E_1';\quad E_2 = \frac{E_2' + \frac{v}{c}H^{3'}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad E_3 = \frac{E_3' - \frac{v}{c}H^{2'}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \\ H^1 = H^{1'};\quad H^2 = \frac{H^{2'} - \frac{v}{c}E_3'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad H^3 = \frac{H^{3'} + \frac{v}{c}E_2'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \end{gathered} \tag{7}$$

Тензоры вида F_{ik} в данной точке образуют шестимерное векторное пространство. Выясним, как действует в этом пространстве оператор $*$.

Лемма 2. *Справедлива формула*

$$\begin{aligned} *F = -\sum_{\alpha=1}^{3} H^\alpha dx^0 \wedge dx^\alpha - E_1 dx^2 \wedge dx^3 - \\ - E_2 dx^3 \wedge dx^1 - E_3 dx^1 \wedge dx^2, \end{aligned} \tag{8}$$

где форма F имеет вид

$$F = E_\alpha dx^0 \wedge dx^\alpha - H^1 dx^2 \wedge dx^3 - H^2 dx^3 \wedge dx^1 - H^3 dx^1 \wedge dx^2.$$

Доказательство. Оператор $*$ действует так:

$$(*F)_{ik} = \frac{1}{2}\varepsilon_{iklm}F^{lm};\quad F^{lm} = g^{lp}g^{mq}F_{pq}. \tag{9}$$

Здесь g_{ij} — метрика Минковского,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix};$$

тензор F^{ik} будет иметь вид

$$F^{0\alpha} = -F_{0\alpha} = -E_\alpha;\quad F^{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta};\quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \tag{10}$$

Отсюда немедленно следует утверждение леммы.

Следствие. *Квадрат оператора $*$ равен -1.*

Введем в пространстве $\mathbb{R}^6$ кососимметрических тензоров 2-го ранга структуру комплексного линейного пространства, полагая

$$(a+bi)F = aF + b * F. \tag{11}$$

В силу следствия это определение корректно: $i^2F = **F = -F$. Получаем трехмерное комплексное пространство $\mathbb{C}^3$.

Замечание. Мы будем считать, что $\mathbf{E}$ есть вещественная часть тензора F, а $\mathbf{H}$ — его мнимая часть. Это не противоречит предыдущим определениям. Действительно, умножим $\mathbf{E}+i\mathbf{H}$ на i:

$$i(\mathbf{E}+i\mathbf{H}) = -\mathbf{H}+i\mathbf{E}.$$

В силу леммы 2 именно так действует оператор $*$. Таким образом, координаты z^1, z^2, z^3 в $\mathbb{C}^3$ можно ввести, положив

$$z^\alpha = E_\alpha + iH^\alpha, \quad \alpha = 1.\ 2,\ 3. \tag{12}$$

Оператор $*$ инвариантен относительно преобразований из группы $SO(1, 3)$. Поэтому последние являются комплексно линейными преобразованиями нашего пространства $\mathbb{C}^3$. Более того, как легко видеть, они сохраняют квадратичную форму

$$\langle F, F\rangle = -*(F \wedge *F + iF \wedge F) = -\frac{1}{2}(F_{ik}F^{ki} + i\varepsilon^{ijkl}F_{ij}F_{kl}). \tag{13}$$

Запишем эту форму в координатах z^1, z^2, z^3. Имеем

$$\langle F, F\rangle = -H^2 + E^2 + 2i\langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle = (\mathbf{E}+i\mathbf{H})^2 = \sum_{\alpha=1}^{3}(z^\alpha)^2. \tag{14}$$

Таким образом, форма (13) есть скалярный квадрат комплексного 3-вектора $\mathbf{E}+i\mathbf{H}$.

Комплексно линейные преобразования пространства $\mathbb{C}^3$, сохраняющие скалярный квадрат, называются, по аналогии с вещественным случаем, *комплексно ортогональными*, а образуемая ими группа обозначается через $O(3, \mathbb{C})$; ее не следует смешивать с $U(3)$.

Итак, введение комплексной структуры в пространство кососимметрических тензоров 2-го ранга определяет гомоморфизм группы Лоренца $SO(1, 3)$ в $O(3, \mathbb{C})$.

Величины $\operatorname{Re}\langle F, F\rangle = E^2 - H^2$, $\frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle F, F\rangle = \langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle$ являются инвариантами электромагнитного поля.

Разберем теперь вопрос о приведении лоренцевыми преобразованиями кососимметрического тензора ранга 2 к каноническому виду.

Теорема 1. 1. *Пусть* $\langle F, F\rangle = E^2 - H^2 + 2i\langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle \neq 0$.

а) *Если* $\langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle \neq 0$, *то лоренцевым преобразованием можно привести тензор* F *к такому виду, что векторы* $\mathbf{E}$ *и* $\mathbf{H}$ *параллельны и оба отличны от нуля.*

б) *Если* $\langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle = 0$, $E^2 - H^2 \neq 0$, *то можно привести тензор* F *к такому виду, что* $\mathbf{E} \neq 0$, $\mathbf{H} = 0$ *при* $E^2 - H^2 > 0$ *или* $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{H} \neq 0$ *при* $E^2 - H^2 < 0$.

Каноническая форма тензора F *в обоих случаях такова*:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & E' & 0 & 0 \\ -E' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -H' \\ 0 & 0 & H' & 0 \end{pmatrix}, \qquad (15)$$

где $E'^2 - H'^2 = E^2 - H^2$, $E'H' = \langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle$.

2. *Пусть* $\langle F, F\rangle = 0$, т. е. $E^2 - H^2 = 0$, $\langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle = 0$. *Тогда после любого лоренцева преобразования векторы* $\mathbf{E}$ *и* $\mathbf{H}$ *будут взаимно перпендикулярны и будут иметь равные длины. Тензор* F_{ik} *можно привести в этом случае к виду*

$$F = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ -E & 0 & -E & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Доказательство. Пусть $\langle F, F\rangle \neq 0$. Положим $F = c \cdot n$, где $c = \sqrt{\langle F, F\rangle}$ и $\langle n, n\rangle = 1$. Поворотом из $SO(3, \mathbb{C})$ вектор n можно перевести в любой другой, в частности в вещественный вектор n'. Представим c в виде $E' + iH'$; новый вектор электрического поля имеет вид

$$\mathbf{E}' = E'n', \qquad (17)$$

а новый вектор магнитного поля — вид

$$\mathbf{H}' = H'n', \qquad (18)$$

причем $c^2 = E'^2 - H'^2 + 2i\langle \mathbf{E}', \mathbf{H}'\rangle = \langle F, F\rangle = E^2 - H^2 + 2i\langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle$. Векторы $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$ параллельны. Выбирая в качестве n' единичный вектор оси x^1, мы получаем канонический вид (15). Утверждение 1, а) теоремы 1 доказано. Если же $\langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle = 0$, то $\langle \mathbf{E}', \mathbf{H}'\rangle = \langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle = 0$. Поэтому или $E' = 0$ или $H' = 0$. Утверждение 1, б) тем самым доказано: если $E^2 - H^2 > 0$, то $H' = 0$; если $E^2 - H^2 < 0$, то $E' = 0$.

Докажем, наконец, 2. Вещественными вращениями можно добиться, чтобы вектор $\mathbf{E}$ был направлен вдоль оси x^1. Тогда вектор $\mathbf{H}$ лежит в плоскости (x^2, x^3). Вращением в этой плоскости можно направить его вдоль оси x^3.

Теорема доказана.

2. Симметрические тензоры и собственные значения. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля. Пусть T_{ik} — симметрический тензор типа (0, 2) в пространстве Минковского с метрикой g_{ik}.

Определение 2. *Собственными значениями тензора* T_{ik} называются решения уравнения

$$P(\lambda)=\det(T_{ik}-\lambda g_{ik})=0. \qquad (19)$$

Напомним, что эти собственные значения λ — собственные значения оператора $T^i_k=g^{ij}T_{jk}$. Соответствующие собственные векторы определяются как решения системы

$$T_{ik}\xi^k=\lambda g_{ik}\xi^k, \quad P(\lambda)=0. \qquad (20)$$

Из-за псевдоевклидовости метрики матрицу T_{ik} нельзя, вообще говоря, привести к диагональному виду преобразованием Лоренца. Мы разберем детально типы симметрических тензоров в двумерном пространстве Минковского $\mathbb{R}^2_1$. Имеет место

Теорема 2. 1. *Если уравнение* $P(\lambda)=0$ *имеет два различных вещественных корня* $\lambda_0\neq\lambda_1$, *то матрица* T_{ik} *приводится (лоренцевым преобразованием) к виду*

$$\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0\\ 0 & -\lambda_1\end{pmatrix}. \qquad (21)$$

2. *Если уравнение* $P(\lambda)=0$ *имеет два комплексно сопряженных корня* $\lambda_{0,1}=\alpha\pm i\beta$, *то матрица* T_{ik} *приводится к виду*

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & -\alpha\end{pmatrix}. \qquad (22)$$

3. *Если уравнение* $P(\lambda)=0$ *имеет два совпадающих корня* $\lambda_0=\lambda_1=\lambda$, *то матрица* T_{ik} *в любых координатах имеет вид*

$$\begin{pmatrix}\lambda+\mu & -\mu\\ -\mu & -\lambda+\mu\end{pmatrix}, \qquad (23)$$

где величина μ *не является инвариантом тензора* T_{ik} *и, вообще говоря, не может быть сделана нулевой лоренцевым преобразованием.*

Доказательство. Пусть собственные значения $\lambda_0\neq\lambda_1$ (вещественные или комплексные) различны. Им отвечает пара линейно независимых собственных векторов ξ_0, ξ_1, которые находятся из системы (20). Покажем, что эти векторы ортогональны. Имеем $\xi^i_0T_{ik}\xi^k_1=\lambda_0g_{ik}\xi^i_0\xi^k_1=\lambda_1g_{ik}\xi^i_0\xi^k_1$, поэтому $\langle\xi_0,\xi_1\rangle=g_{ik}\xi^i_0\xi^k_1=0$. Пусть $\lambda_0\neq\lambda_1$ вещественны. Тогда один из собственных векторов времениподобен, а другой пространственноподобен. Выбирая их в качестве новых координатных осей, получаем доказательство утверждения 1 теоремы 2.

Пусть $\lambda_{0,1}=\alpha\pm i\beta$. Соответствующие собственные векторы также будут комплексно сопряжены: $\xi_{0,1}=a\pm ib$. Нормируем эти векторы условиями

$$\langle a+ib,\ a+ib\rangle=\langle a-ib,\ a-ib\rangle=2.$$

Вместе с условием ортогональности $\langle \xi_0, \xi_1 \rangle = 0$ это дает

$$\langle a, b\rangle = 0, \quad \langle a, a\rangle + \langle b, b\rangle = 0, \quad \langle a, a\rangle - \langle b, b\rangle = 2.$$

Отсюда $|a|^2 = 1$, $|b|^2 = -1$. В базисе a, b тензор T_{ik} примет вид (22). Утверждение 2 доказано.

Пусть теперь $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda$. Допустим, что собственному значению λ отвечает ровно один собственный вектор ξ. (Если бы таких векторов было два, то матрица T_{ik} приводилась бы к диагональному виду $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$, т. е. к виду (23) с $\mu = 0$.) Покажем, что ξ — изотропный вектор. Действительно, в противном случае ортогональное дополнение вектора ξ было бы собственным подпространством, не содержащим ξ. Таким образом, $|\xi|^2 = 0$, и из этого следует, что

$$(\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 = 0 \Rightarrow \xi^0 = \xi^1$$

(если $\xi^0 = -\xi^1$, то нужно еще сделать отражение). Система (20) запишется поэтому в виде

$$T_{00} + T_{01} = \lambda, \quad T_{10} + T_{11} = -\lambda,$$

откуда $T_{00} = \lambda + \mu$, $T_{11} = -\lambda + \mu$, $T_{01} = -\mu = T_{10}$. Теорема доказана.

Пусть теперь F_{ik} — кососимметрический тензор в пространстве Минковского $\mathbb{R}^4_1$. По тензору F_{ik} построим симметрический тензор T_{ik}, полагая

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(-g^{lm}F_{il}F_{km} + \frac{1}{4} F_{lm}F^{lm}g_{ik}\right). \tag{24}$$

Если F_{ik} — тензор электромагнитного поля, то тензор T_{ik} называется *тензором энергии-импульса поля* F_{ik}. Используя трехмерные векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, определяемые формулой (2), получим

$$T_{00} = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}, \quad T_{0\alpha} = -\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}, \mathbf{H}]_\alpha,$$

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left\{-E_\alpha E_\beta - H_\alpha H_\beta + \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}(E^2 + H^2)\right\}, \tag{25}$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

Величина $W = T_{00}$ называется *плотностью энергии* электромагнитного поля F_{ik}; вектор $S_\alpha = -T_{0\alpha}$ называется *вектором Пойнтинга*; трехмерный тензор $T_{\alpha\beta}$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant 3,\ 1 \leqslant \beta \leqslant 3)$ — *максвелловский тензор напряжений.*

Исследуем вопрос о приведении к каноническому виду тензора энергии-импульса T_{ik}, определенного формулой (24). В соответствии с теоремой 1 приведем к каноническому виду тензор F_{ik}. В случае (15), когда $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$, $\mathbf{H} = (H, 0, 0)$, тензор T_{ik}

примет диагональный вид

$$(T_{ik}) = \begin{pmatrix} +W & & & 0 \\ & -W & & \\ & & +W & \\ 0 & & & +W \end{pmatrix}, \quad W = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2). \tag{26}$$

Здесь все собственные значения равны $\pm W$. В случае (16), когда

$$\mathbf{E} = (E, 0, 0), \quad \mathbf{H} = (0, 0, H), \quad E = H,$$

из формул (25) получим

$$(T_{ik}) = \begin{pmatrix} W & 0 & -W & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -W & 0 & W & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \frac{E^2}{4\pi} = \frac{H^2}{4\pi}. \tag{27}$$

Этот случай отвечает последнему утверждению теоремы 2 (формула (23)), $\mu = W$ — случай *электромагнитных волн.* Тензор энергии-импульса здесь не приводится к диагональному виду; все собственные значения равны нулю.

§ 22. Поведение тензоров при отображениях

1. Общая операция ограничения тензоров с нижними индексами. Пусть дано отображение F области m-мерного пространства с координатами $x^{1'}, \ldots, x^{m'}$ в область n-мерного пространства с координатами $x^1, \ldots, x^n$:

$$x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{m'}), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Тогда каждому тензору $T_{i_1 \ldots i_k}$ типа $(0, k)$ в пространстве $(x^1, \ldots, x^n)$ соответствует тензор $(F^*T)_{i'_1 \ldots i'_k}$ в штрихованном пространстве:

$$(F^*T)_{i'_1 \ldots i'_k}(x^{1'}, \ldots, x^{m'}) = \left[T_{i_1 \ldots i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}} \right] (x^i(x^{1'}, \ldots, x^{m'})). \tag{2}$$

Проверку того, что F^*T — тензор типа $(0, k)$, мы оставляем читателю.

Итак, тензоры типа $(0, k)$ отображаются в направлении, противоположном направлению отображения пространств. Операция F^* называется *операцией ограничения тензора.*

Пример. Пусть в n-мерном пространстве задана метрика g_{ij} и m-мерная поверхность

$$x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{m'}), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$