примет диагональный вид

$$(T_{ik}) = \begin{pmatrix} +W & & & 0 \\ & -W & & \\ & & +W & \\ 0 & & & +W \end{pmatrix}, \quad W = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2). \tag{26}$$

Здесь все собственные значения равны $\pm W$. В случае (16), когда

$$\mathbf{E} = (E, 0, 0), \quad \mathbf{H} = (0, 0, H), \quad E = H,$$

из формул (25) получим

$$(T_{ik}) = \begin{pmatrix} W & 0 & -W & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -W & 0 & W & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \frac{E^2}{4\pi} = \frac{H^2}{4\pi}. \tag{27}$$

Этот случай отвечает последнему утверждению теоремы 2 (формула (23)), $\mu = W$ — случай *электромагнитных волн.* Тензор энергии-импульса здесь не приводится к диагональному виду; все собственные значения равны нулю.

§ 22. Поведение тензоров при отображениях

1. Общая операция ограничения тензоров с нижними индексами. Пусть дано отображение F области m-мерного пространства с координатами $x^{1'}, \ldots, x^{m'}$ в область n-мерного пространства с координатами $x^1, \ldots, x^n$:

$$x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{m'}), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Тогда каждому тензору $T_{i_1 \ldots i_k}$ типа $(0, k)$ в пространстве $(x^1, \ldots, x^n)$ соответствует тензор $(F^*T)_{i'_1 \ldots i'_k}$ в штрихованном пространстве:

$$(F^*T)_{i'_1 \ldots i'_k}(x^{1'}, \ldots, x^{m'}) = \left[T_{i_1 \ldots i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}} \right] (x^i(x^{1'}, \ldots, x^{m'})). \tag{2}$$

Проверку того, что F^*T — тензор типа $(0, k)$, мы оставляем читателю.

Итак, тензоры типа $(0, k)$ отображаются в направлении, противоположном направлению отображения пространств. Операция F^* называется *операцией ограничения тензора.*

Пример. Пусть в n-мерном пространстве задана метрика g_{ij} и m-мерная поверхность

$$x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{m'}), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Тогда, пользуясь операцией ограничения, мы получаем метрику $g_{i'j'}$ на поверхности (3), где

$$g_{i'j'} = g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}; \quad i', j' = 1, \ldots, m.$$

Это — метрика поверхности, индуцированная метрикой g_{ij} объемлющего пространства.

Рассмотрим теперь случай ограничения кососимметрического тензора $T_{i_1\ldots i_k}$ типа $(0, k)$ на k-мерную поверхность $x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{k'})$ в n-мерном пространстве. В теории интегрирования кососимметрических форм нам будет полезна явная формула для такого ограничения.

Теорема 1. *Для формы* $\sum\limits_{i_1<\ldots<i_k} T_{i_1\ldots i_k}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$, *ограниченной на k-мерную поверхность $x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{k'})$, имеет место равенство*

$$\sum_{i_1<\ldots<i_k} T_{i_1\ldots i_k}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k} = \sum_{i_1<\ldots<i_k} J^{i_1\ldots i_k}T_{i_1\ldots i_k}dx^{1'}\wedge\ldots\wedge dx^{k'}. \qquad (4)$$

Здесь $J^{i_1\ldots i_k}$ — минор k-го порядка матрицы $\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)$, составленный из столбцов с номерами $i_1, \ldots, i_k$.

Доказательство. Согласно определению (2)

$$(F_*T)_{1'\ldots k'} = T_{i_1\ldots i_k}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{1'}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{k'}}. \qquad (5)$$

Пользуясь косой симметричностью $T_{i_1\ldots i_k}$, мы можем переписать правую часть в виде

$$T_{i_1\ldots i_k}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{1'}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{k'}} = \sum_{i_1<\ldots<i_k} T_{i_1\ldots i_k}\left(\sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}(\sigma)\frac{\partial x^{i_{\sigma(1)}}}{\partial x^{1'}}\cdots\frac{\partial x^{i_{\sigma(k)}}}{\partial x^{k'}}\right) = \sum_{i_1<\ldots<i_k} T_{i_1\ldots i_k}J^{i_1\ldots i_k},$$

что и доказывает теорему.

2. Отображение касательных пространств. Невозможно, вообще говоря, определить отображение тензоров с верхними индексами, соответствующее отображению пространств. Но если дано отображение $F: x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{m'})$, $i = 1, \ldots, n$, то можно определить отображение F_* пространства векторов в точке

$(x^{1'}, \ldots x^{m'})$ в пространство векторов в точке $x^i(x^{1'}, \ldots, x^{m'})$, $i = 1, \ldots, n$. Это отображение строится так:

$$(F_*T)^i\Big|_{x^k = x^k(x^{1'}, \ldots, x^{m'})} = T^{i'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\Big|_{(x^{1'}, \ldots, x^{m'})}. \tag{6}$$

Аналогично строится отображение F_* для тензоров типа $(k, 0)$. Таким образом, касательные пространства отображаются в ту же сторону, в которую действует отображение F. Отображение F_* касательных пространств часто называется *дифференциалом отображения* F.

Если F — гладкая функция в пространстве, то F_* — линейное отображение касательного пространства в каждой точке в вещественную прямую $\mathbb{R}$, т. е. линейная форма на векторах. Это и есть дифференциал $dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\right)$ в обычном смысле.

На векторных полях (в целом) отображение F_* определить нельзя: если точки P_1 и P_2 при отображении F переходят в одну точку P, то из точки P будут исходить два вектора: $F_*T(P_1)$ и $F_*T(P_2)$, $T = (T^i)$.

Если гладкое отображение F взаимно однозначно, и отображение F^{-1} гладко, то можно определить отображение F_*, и оно будет изоморфизмом. Такие отображения F называются *диффеоморфизмами*.

Задача. Доказать, что для дифференциальных форм ω_1, ω_2 и гладкого отображения F справедлива формула

$$F^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = F^*(\omega_1) \wedge F^*(\omega_2).$$

§ 23. Векторные поля

1. Однопараметрические группы диффеоморфизмов. Пусть в области пространства задано векторное поле, имеющее в координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ компоненты $\xi^i = \xi^i(x^1, \ldots, x^n)$. С каждым таким векторным полем связана автономная система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{gathered} \dot{x}^i(t) = \xi^i(x^1(t), \ldots, x^n(t)), \qquad i = 1, \ldots, n, \\ \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}. \end{gathered} \tag{1}$$

Ее решения $x^i = x^i(t)$ называются *интегральными кривыми* векторного поля ξ^i. Обозначим через

$$F_t^i(x_0^1, \ldots, x_0^n) = x^i = x^i(t, x_0^1, \ldots, x_0^n) \tag{2}$$

интегральную кривую поля ξ^i с начальными условиями

$$x^i|_{t=0} = x_0^i. \tag{3}$$