$(x^{1'}, \ldots x^{m'})$ в пространство векторов в точке $x^i(x^{1'}, \ldots, x^{m'})$, $i = 1, \ldots, n$. Это отображение строится так:

$$(F_*T)^i \big|_{x^k = x^k(x^{1'}, \ldots, x^{m'})} = T^{i'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \bigg|_{(x^{1'}, \ldots, x^{m'})}. \tag{6}$$

Аналогично строится отображение F_* для тензоров типа $(k, 0)$. Таким образом, касательные пространства отображаются в ту же сторону, в которую действует отображение F. Отображение F_* касательных пространств часто называется *дифференциалом отображения* F.

Если F — гладкая функция в пространстве, то F_* — линейное отображение касательного пространства в каждой точке в вещественную прямую $\mathbb{R}$, т. е. линейная форма на векторах. Это и есть дифференциал $dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\right)$ в обычном смысле.

На векторных полях (в целом) отображение F_* определить нельзя: если точки P_1 и P_2 при отображении F переходят в одну точку P, то из точки P будут исходить два вектора: $F_*T(P_1)$ и $F_*T(P_2)$, $T = (T^i)$.

Если гладкое отображение F взаимно однозначно, и отображение F^{-1} гладко, то можно определить отображение F_*, и оно будет изоморфизмом. Такие отображения F называются *диффеоморфизмами*.

Задача. Доказать, что для дифференциальных форм ω_1, ω_2 и гладкого отображения F справедлива формула

$$F^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = F^*(\omega_1) \wedge F^*(\omega_2).$$

§ 23. Векторные поля

1. Однопараметрические группы диффеоморфизмов. Пусть в области пространства задано векторное поле, имеющее в координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ компоненты $\xi^i = \xi^i(x^1, \ldots, x^n)$. С каждым таким векторным полем связана автономная система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{gathered} \dot{x}^i(t) = \xi^i(x^1(t), \ldots, x^n(t)), \qquad i = 1, \ldots, n, \\ \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}. \end{gathered} \tag{1}$$

Ее решения $x^i = x^i(t)$ называются *интегральными кривыми* векторного поля ξ^i. Обозначим через

$$F_t^i(x_0^1, \ldots, x_0^n) = x^i = x^i(t, x_0^1, \ldots, x_0^n) \tag{2}$$

интегральную кривую поля ξ^i с начальными условиями

$$x^i\big|_{t=0} = x_0^i. \tag{3}$$

Формула (2) задает отображение

$$F_t\colon \left(x_0^1, \ldots, x_0^n\right) \mapsto \left(x^1\left(t, x_0^1, \ldots, x_0^n\right), \ldots, x^n\left(t, x_0^1, \ldots, x_0^n\right)\right) \qquad (4)$$

нашей области в себя, зависящее от параметра t (сдвиг на время t вдоль интегральных кривых). Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что отображение F_t определено при малых t в окрестности данной точки $\left(x_0^1, \ldots, x_0^n\right)$ и локально является диффеоморфизмом. Далее, F_0 есть тождественное отображение, и диффеоморфизмы F_t образуют локальную группу:

$$F_{t+s} = F_t \circ F_s, \quad F_{-t} = (F_t)^{-1}. \qquad (5)$$

Термин «локальная группа» означает, что эти равенства справедливы, если обе части определены для соответствующих значений параметров $\pm t$, s, $t+s$. Мы получаем локальную однопараметрическую группу диффеоморфизмов, связанную с полем ξ^i.

При малых t явный вид отображений F_t таков:

$$x^i\left(t, x_0^1, \ldots, x_0^n\right) = x_0^i + t\xi^i\left(x_0^1, \ldots, x_0^n\right) + o(t). \qquad (6)$$

С той же точностью матрица Якоби отображения F_t имеет вид

$$\frac{\partial x^i(t)}{\partial x_0^j} = \delta_j^i + t\frac{\partial \xi^i}{\partial x_0^j} + o(t). \qquad (7)$$

Матрица Якоби обратного отображения имеет вид

$$\frac{\partial x_0^i}{\partial x^j} = \delta_j^i - t\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + o(t). \qquad (8)$$

Наоборот, если мы имеем однопараметрическую локальную группу диффеоморфизмов $F_t = \left(F_t^1, \ldots, F_t^n\right)$, то по ней однозначно восстанавливается векторное поле

$$\xi^i = \frac{d}{dt} F_t^i \Big|_{t=0}, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (9)$$

Векторное поле ξ^i называется *полем скоростей*.

Пример. Рассмотрим в плоскости с координатами (x, y) однопараметрическую группу вращений на угол t вокруг начала координат. Тогда отображение F_t имеет вид

$$x = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \quad y = x_0 \sin t + y_0 \cos t. \qquad (10)$$

Имеем

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = -y_0, \quad \frac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = x_0.$$

Итак, поле скоростей ξ^i, $i = 1, 2$, в декартовых координатах x, y имеет вид

$$\xi(x, y) = (-y, x). \qquad (11)$$

Интегральными кривыми этого поля являются окружности $x^2+y^2=\mathrm{const}$ (рис. 30).

2. Экспонента от векторного поля. Однопараметрическая группа диффеоморфизмов $F_t(x)$, соответствующая векторному полю $\xi(x)$, действуют на гладких функциях $f=f(x)$ по правилу

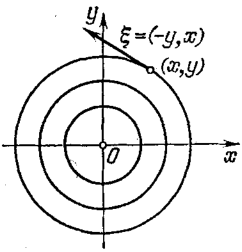

Рис. 30

$$(F_t f)(x)=f(F_t(x)). \qquad (12)$$

Рассмотрим, например, на прямой однопараметрическую группу сдвигов $F_t(x)=x+t$. Векторное поле ξ здесь постоянно. Преобразования (12) имеют вид

$$F_t f(x)=f(x+t). \qquad (13)$$

Для аналитических функций $f(x)$ (т. е. разлагающихся в сходящийся степенной ряд в окрестности любой точки x) выражение (13) при малых t может быть представлено при помощи ряда Тейлора

$$F_t f(x)=f(x+t)=f(x)+tf'(x)+\frac{t^2}{2}f''(x)+\ldots=$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\right)f(x)=\exp\left(t\frac{d}{dx}\right)f(x). \qquad (14)$$

Обобщая результат этого вычисления, дадим

Определение 1. *Экспонентой векторного поля* ξ называется оператор

$$\exp(t\partial_\xi)=1+t\partial_\xi+\frac{t^2}{2}(\partial_\xi)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(\partial_\xi)^n, \qquad (15)$$

где ∂_ξ — производная по направлению поля ξ (формула (17.16)). Действие этого оператора на функции $f(x)$ определяется равенством

$$\exp(t\partial_\xi)f(x)=f(x)+t\partial_\xi f(x)+\frac{t^2}{2}(\partial_\xi)^2 f(x)+\ldots \qquad (16)$$

Это выражение определено для тех функций $f(x)$ и для тех t, для которых ряд, стоящий в правой части, сходится.

Утверждение 1. *Для аналитических векторных полей $\xi(x)$ (т. е. все функции $\xi^i(x^1, \ldots, x^n)$ аналитичны) и аналитических функций $f(x)$ экспонента векторного поля $\xi(x)$ совпадает с оператором* (12) *при достаточно малых t:*

$$\exp(t\partial_\xi)f(x)=f(F_t(x)). \qquad (17)$$

Доказательство. Рассмотрим такую точку $x=(x^1, \ldots, x^n)$, где поле $\xi(x)$ не обращается в нуль. Согласно теореме существования и единственности решений системы (1) в некоторой окрестности этой точки можно сделать замену координат

$$x^i = x^i(y^1, \ldots, y^n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{18}$$

так, что в новых координатах система (1) запишется в виде

$$\dot{y}^1 = 1, \quad \dot{y}^2 = 0, \ldots, \quad \dot{y}^n = 0 \tag{19}$$

(см. [30]). Для систем с аналитическими правыми частями замену (18) можно выбрать аналитической. Функция вида $\tilde{f}(y) = f(x(y))$, где $f(x)$ — аналитическая функция, также аналитична. В новых координатах равенство (17) примет такой вид:

$$\exp\left(t\,\frac{\partial}{\partial y^1}\right)\tilde{f}(y) = \tilde{f}\,(y^1 + t, y^2, \ldots, y^n),$$

что немедленно вытекает из (14). Утверждение доказано.

Задача. Вычислите оператор $\exp\left[(ax + b)\dfrac{d}{dx}\right]$.

3. Производная Ли. Примеры. Пусть $\xi = (\xi^i)$ — векторное поле, F_t — соответствующая однопараметрическая группа диффеоморфизмов, $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ — тензор типа (p, q). В силу взаимной однозначности отображения F_t определен закон преобразования тензора от координат $x^i(t)$ к x^i_0. Для тензора $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$, перенесенного из точки $(x^1(t), \ldots, x^n(t))$ в точку $(x^1_0, \ldots, x^n_0)$, получаем выражение

$$(F_tT)^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = T^{l_1\ldots l_p}_{k_1\ldots k_q}\frac{\partial x^{k_1}}{\partial x_0^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{k_q}}{\partial x_0^{j_q}}\frac{\partial x_0^{i_1}}{\partial x^{l_1}}\cdots\frac{\partial x_0^{i_p}}{\partial x^{l_p}}. \tag{20}$$

Определение 2. *Производной Ли* тензорного типа $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ вдоль векторного поля ξ называется выражение

$$L_\xi T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \frac{d}{dt}\,(F_tT)^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\Big|_{t=0}. \tag{21}$$

Таким образом, производная Ли измеряет скорость*) изменения тензора $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ при деформации пространства, задаваемой отображением F_t. Так как F_tT — тензор типа (p, q) при каждом значении t, то и $L_\xi T$ — также тензор типа (p, q).

*) В механике сплошной среды выражение $\dfrac{dT}{d\tau} = \dfrac{\partial T}{\partial \tau} + L_\xi T$, где $T = T(\tau, x)$ — произвольное тензорное поле, называется *полной производной* T вдоль поля скоростей $\xi = (\xi^i)$. В гидродинамике важен случай $T = (\xi_i)$.

Получим явную формулу для производной Ли. Для этого, используя формулы (8) и (9), перепишем формулу (20) с точностью до $o(t)$. Имеем

$$(F_tT)^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = T^{l_1\ldots l_p}_{k_1\ldots k_q}\left(\delta^{k_1}_{j_1} + t\frac{\partial\xi^{k_1}}{\partial x_0^{j_1}}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(\delta^{k_q}_{j_q} + t\frac{\partial\xi^{k_q}}{\partial x_0^{j_q}}\right)\left(\delta^{i_1}_{l_1} - t\frac{\partial\xi^{i_1}}{\partial x^{l_1}}\right)\ldots\left(\delta^{i_p}_{l_p} - t\frac{\partial\xi^{i_p}}{\partial x^{l_p}}\right) =$$

$$= T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + t\left[T^{i_1\ldots i_p}_{kj_2\ldots j_q}\frac{\partial\xi^k}{\partial x_0^{j_1}} + \ldots + T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{q-1}k}\frac{\partial\xi^k}{\partial x_0^{j_q}} - \right.$$

$$\left. - T^{li_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\frac{\partial\xi^{i_1}}{\partial x^l} - \ldots - T^{i_1\ldots i_{p-1}l}_{j_1\ldots j_q}\frac{\partial\xi^{i_p}}{\partial x^l}\right] + o(t). \quad (22)$$

Дифференцируя равенство (22) по t при $t = 0$, получаем

$$L_\xi T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \xi^s\frac{\partial T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}}{\partial x^s} + T^{i_1\ldots i_p}_{kj_2\ldots j_q}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^{j_1}} + \ldots + T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{q-1}k}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^{j_q}} -$$

$$- T^{li_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\frac{\partial\xi^{i_1}}{\partial x^l} - \ldots - T^{i_1\ldots i_{p-1}l}_{j_1\ldots j_q}\frac{\partial\xi^{i_p}}{\partial x^l}. \quad (23)$$

Примеры. 1. Тензоры нулевого ранга, т. е. скаляры. Имеем

$$L_\xi f = \xi^i\frac{\partial f}{\partial x^i} = \partial_\xi f. \quad (24)$$

Получаем формулу для производной функции f по направлению ξ (производной функции вдоль векторного поля). Если $L_\xi f = 0$, то функция f постоянна вдоль интегральных кривых поля ξ. Такая функция f называется *интегралом поля* ξ или интегралом соответствующей системы уравнений $\dot{x}^i = \xi^i(x^1, \ldots, x^n)$. Например, для поля, рассмотренного в п. 1, функция $f(x, y) = x^2 + y^2$ будет интегралом.

Если f — интеграл поля ξ, то интегральные кривые поля целиком лежат на поверхностях уровня $f(x^1, \ldots, x^n) = \mathrm{const}$; само поле ξ, очевидно, касается этих поверхностей. Это позволяет понизить порядок исходной системы уравнений $\dot{x}^i = \xi^i(x^1, \ldots, x^n)$ от n до $n-1$, ограничив ее (т. е. ограничив векторное поле $\xi^i(x^1, \ldots, x^n)$) на гиперповерхность $f(x^1, \ldots, x^n) = \mathrm{const}$. Напомним, что размерность этой гиперповерхности равна $n-1$. Именно эта простая геометрическая процедура ограничения поля ξ и соответствует известному в теории дифференциальных уравнений утверждению, что задание первого интеграла системы позволяет понизить ее порядок на единицу.

2. Тензоры типа (1, 0), т. е. векторы. Пусть $\eta=(\eta^i)$ — векторное поле. Тогда по формуле (23) получаем

$$L_\xi \eta^i = \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}. \tag{25}$$

Отсюда следует

$$L_\xi \eta = -L_\eta \xi. \tag{26}$$

Выясним, как действует векторное поле $L_\xi \eta$ на функции. Имеет место важная

Теорема 1. $\partial_{L_\xi \eta} f = \partial_\xi(\partial_\eta f) - \partial_\eta(\partial_\xi f) = [\partial_\xi, \partial_\eta] f$. *Таким образом, коммутатор операторов ∂_ξ и ∂_η снова будет дифференциальным оператором первого порядка — т. е. векторным полем $L_\xi\eta = -L_\eta\xi$.*

Доказательство. Вычислим явно коммутатор $[\partial_\xi, \partial_\eta]$:

$$[\partial_\xi, \partial_\eta] f = \partial_\xi(\partial_\eta f) - \partial_\eta(\partial_\xi f) = \partial_\xi\left(\eta^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) - \partial_\eta\left(\xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) =$$

$$= \xi^j \eta^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} - \eta^j \xi^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} =$$

$$= \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial f}{\partial x^i} = \partial_{L_\xi \eta} f;$$

здесь $\xi^j\eta^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \xi^j \eta^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = 0$ в силу соотношения $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$. Теорема доказана.

Определение 3. Векторное поле $[\xi, \eta] = L_\xi \eta$ называется *коммутатором* полей ξ и η.

Отметим полезный аналог формулы Лейбница:

$$L_\xi(f\eta) = f L_\xi \eta + \eta(\partial_\xi f).$$

Доказательство получается прямым вычислением, использующим формулу (25).

Из этой формулы непосредственно вытекает следующая

Теорема 2. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ задан набор гладких векторных полей $\xi_1, \ldots, \xi_k$. Для того чтобы существовала система координат $y^1, \ldots, y^n$ такая, что векторы ξ_j касаются координатных линий (y^j), $j=1, \ldots, k$, необходимо следующее условие:*

$$[\xi_j, \xi_k] = f_{jk}^{(1)} \xi_j + f_{jk}^{(2)} \xi_k, \tag{27}$$

где $f_{jk}^{(i)}$ — скалярные функции точки.

Доказательство. Если поля ξ_j являются базисными ортами e_j системы координат, то $[\xi_j, \xi_k] = 0$, так как $\partial_{e_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}$ и $\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y^k} = \frac{\partial^2}{\partial y^k \partial y^j}$. Если же $\xi_j = f_j(y) e_j$, где e_j — базисные орты, и $f_j(y)$ — гладкие функции точки, то

$$[\xi_j, \xi_k] = [f_j e_j, f_k e_k] = f_j \frac{\partial f_k}{\partial y^j} e_k - f_k \frac{\partial f_j}{\partial y^k} e_j.$$

Полагая $f_{jk}^{(1)} = f_j \frac{\partial f_k}{\partial y^j}$, $-f_{jk}^{(2)} = f_k \frac{\partial f_j}{\partial y^k}$, получим требуемое соотношение.

3. Тензоры T_i типа $(0, 1)$, т. е. ковекторы. Согласно формуле (23) будем иметь

$$(L_\xi T)_j = \xi^k \frac{\partial T_j}{\partial x^k} + T_k \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}. \tag{28}$$

Для дифференциала функции $T_j = \frac{\partial f}{\partial x^j}$ получим

$$(L_\xi T)_j = \xi^k \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j} + \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}. \tag{29}$$

Вывод. *Взятие производной Ли L_ξ перестановочно со взятием дифференциала*:

$$L_\xi(df) = d(L_\xi f). \tag{30}$$

4. Тензоры g_{ij} типа $(0, 2)$, т. е. билинейные формы. Имеем

$$L_\xi g_{ij} = \xi^s \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s} + g_{kj} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} + g_{ik} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} \equiv u_{ij}. \tag{31}$$

Тензор u_{ij} называется тензором (малой) деформации. Он описывает изменение метрики g_{ij} пространства при малой деформации F_t, определенной полем ξ. В частности, если метрика евклидова, $g_{ij} = \delta_{ij}$, то тензор u_{ij} примет вид (см. § 17)

$$u_{ij} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}. \tag{32}$$

5. Вычислим производную Ли элемента объема $\sqrt{|g|}\, \varepsilon_{i_1 \ldots i_n}$ (или $\sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$), где $g = \det g_{ik}$. Согласно формуле (23)

$$L_\xi \sqrt{|g|}\, \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = \xi^k \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial x^k} \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} + $$
$$+ \sqrt{|g|} \left(\varepsilon_{k i_2 \ldots i_n} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^{i_1}} + \ldots + \varepsilon_{i_1 \ldots i_{n-1} k} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^{i_n}} \right). \tag{33}$$

Выражение, стоящее в скобках в правой части формулы (33), равно $\frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} \varepsilon_{i_1 \ldots i_n}$ (см. задачу 3 к § 18). Поэтому правая часть формулы (33) равна

$$L_\xi \sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\dots i_n} = \sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\dots i_n}\left(\xi^k \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial x^k} + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i}\right) =$$
$$= \sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\dots i_n}\left(\xi^k \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x^i}\right).$$

Но в скобках стоит след тензора деформации $\mathrm{Sp}(u_{im}) = g^{im}u_{im}$, определенного формулой (31). Поэтому окончательно получаем выражение для производной Ли элемента объема

$$L_\xi\left(\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\dots i_n}\right) = \frac{1}{2} g^{im}u_{im}\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\dots i_m}, \tag{34}$$

где в правой части стоит след тензора u_{im} — тензора деформации. В евклидовом случае, когда $g_{ij} = \delta_{ij}$, след тензора деформации равен

$$\frac{1}{2} g^{im}u_{im} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i}.$$

Задачи. 1. Доказать формулу Лейбница для производной Ли:

$$L_\xi(T \otimes R) = (L_\xi T) \otimes R + T \otimes L_\xi R,$$

где T, R — любые тензоры.

2. Пусть ω_1, ω_2 — две дифференциальные формы. Доказать, что

$$L_\xi(\omega_1 \wedge \omega_2) = L_\xi\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge L_\xi\omega_2.$$

3. Пусть F — диффеоморфизм области U в область V, X_1, X_2 — векторные поля на U, $Y_i = F_*(X_i)$ — соответствующие векторные поля на V. Доказать, что $F_*[X_1, X_2] = [Y_1, Y_2]$.

4. Пусть F_t, G_s — однопараметрические группы диффеоморфизмов, X, Y — соответствующие векторные поля. Доказать, что диффеоморфизмы F_t и G_s коммутируют при любых t, s тогда и только тогда, когда коммутатор полей X и Y равен нулю.

5. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — линейно независимые векторные поля в n-мерной области, причем $[X_i, X_j] = 0$. Доказать, что существует (локально) система координат $(x^1, \dots, x^n)$ такая, что поле X_i касается i-й координатной оси: $\partial_{X_i}(x^k) = \delta_i^k$.

§ 24. Алгебры Ли

1. Алгебры Ли и векторные поля. Определение 1. Линейное пространство V, в котором задана кососимметрическая билинейная операция [,], называется *алгеброй Ли*, если выполняется *тождество Якоби*

$$[\xi, [\eta, \zeta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] + [\zeta, [\xi, \eta]] = 0. \tag{1}$$