формулы (33) равна

$$L_\xi \sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\ldots i_n} = \sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\ldots i_n}\left(\xi^k \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial x^k} + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i}\right) =$$

$$= \sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\ldots i_n}\left(\xi^k \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i}\right).$$

Но в скобках стоит след тензора деформации $\mathrm{Sp}(u_{im}) = g^{im}u_{im}$, определенного формулой (31). Поэтому окончательно получаем выражение для производной Ли элемента объема

$$L_\xi\left(\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\ldots i_n}\right) = \frac{1}{2} g^{im}u_{im}\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\ldots i_m}, \tag{34}$$

где в правой части стоит след тензора u_{im} — тензора деформации. В евклидовом случае, когда $g_{ij} = \delta_{ij}$, след тензора деформации равен

$$\frac{1}{2} g^{im}u_{im} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i}.$$

Задачи. 1. Доказать формулу Лейбница для производной Ли:

$$L_\xi (T \otimes R) = (L_\xi T) \otimes R + T \otimes L_\xi R,$$

где T, R — любые тензоры.

2. Пусть ω_1, ω_2 — две дифференциальные формы. Доказать, что

$$L_\xi (\omega_1 \wedge \omega_2) = L_\xi \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge L_\xi \omega_2.$$

3. Пусть F — диффеоморфизм области U в область V, X_1, X_2 — векторные поля на U, $Y_i = F_*(X_i)$ — соответствующие векторные поля на V. Доказать, что $F_*[X_1, X_2] = [Y_1, Y_2]$.

4. Пусть F_t, G_s — однопараметрические группы диффеоморфизмов, X, Y — соответствующие векторные поля. Доказать, что диффеоморфизмы F_t и G_s коммутируют при любых t, s тогда и только тогда, когда коммутатор полей X и Y равен нулю.

5. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — линейно независимые векторные поля в n-мерной области, причем $[X_i, X_j] = 0$. Доказать, что существует (локально) система координат $(x^1, \ldots, x^n)$ такая, что поле X_i касается i-й координатной оси: $\partial_{X_i}(x^k) = \delta_i^k$.

§ 24. Алгебры Ли

1. Алгебры Ли и векторные поля. Определение 1. Линейное пространство V, в котором задана кососимметрическая билинейная операция $[\ ,\ ]$, называется *алгеброй Ли*, если выполняется *тождество Якоби*

$$[\xi, [\eta, \zeta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] + [\zeta, [\xi, \eta]] = 0. \tag{1}$$

Замечание. Для любого $\xi \in V$ введем оператор $\operatorname{ad}\xi$ — линейное отображение $\operatorname{ad}\xi$: $V \to V$, — полагая $\operatorname{ad}\xi(\eta) = [\xi, \eta]$. Тождество Якоби означает, что отображение $\operatorname{ad}\xi$, как говорят в алгебре, является «дифференцированием» алгебры Ли V (т. е. удовлетворяет формуле Лейбница):

$$\operatorname{ad}\xi([\eta, \zeta]) = [\operatorname{ad}\xi(\eta), \zeta] + [\eta, \operatorname{ad}\xi(\zeta)]. \tag{2}$$

Примеры. 1. Трехмерное евклидово пространство является алгеброй Ли относительно операции векторного умножения.

2. Пусть V — некоторая алгебра линейных операторов. Тогда V можно превратить в алгебру Ли, полагая

$$[A, B] = AB - BA. \tag{3}$$

Докажем справедливость тождества Якоби для такой скобки. Имеем

$$\begin{aligned} &[A, [B, C]] = A[B, C] - [B, C]A = ABC - ACB - BCA + CBA,\\ &[C, [A, B]] = CAB - CBA - ABC + BAC,\\ &[B, [C, A]] = BCA - BAC - CAB + ACB. \end{aligned} \tag{4}$$

При сложении этих выражений получится нуль.

Замечание. Операция [,] в алгебре Ли часто называется *коммутатором.*

Следствие 1. *Пространство $M(n, \mathbb{R})$ всех матриц порядка n является алгеброй Ли относительно коммутатора*

$$[A, B] = AB - BA. \tag{5}$$

Следствие 2. *Векторные поля в области пространства $\mathbb{R}^n$ образуют алгебру Ли относительно коммутатора:*

$$[\xi, \eta]^i = \xi^j \frac{\partial\eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}. \tag{6}$$

Следствие 2 вытекает из теоремы 23.1. Алгебра Ли векторных полей, разумеется, бесконечномерна.

Пусть в области пространства задана некоторая поверхность и векторные поля ξ, η касаются этой поверхности. Тогда имеет место

Теорема 1. *Если два поля ξ, η касаются некоторой гладкой поверхности, то их коммутатор также касается этой поверхности.*

Доказательство достаточно провести для гиперповерхности $f(x^1, \ldots, x^n) = 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что поверхность задается уравнением

$$x^n = 0. \tag{7}$$

Касание полей ξ, η к этой поверхности означает, что

$$\partial_\xi f|_{f=0} = \partial_\eta f|_{f=0} = 0.$$

Для поверхности вида (7) условие касания имеет вид

$$\xi^n\big|_{x^n=0}=0;\quad \eta^n\big|_{x^n=0}=0. \tag{8}$$

Тогда для коммутатора $[\xi, \eta]$ будем иметь

$$[\xi, \eta]^n=\xi^k\frac{\partial\eta^n}{\partial x^k}-\eta^k\frac{\partial\xi^n}{\partial x^k}.$$

Но если $x^n=0$, то $\frac{\partial\xi^n}{\partial x^k}=\frac{\partial\eta^n}{\partial x^k}=0$ при $k\neq n$. Следовательно, $[\xi, \eta]^n\big|_{x^n=0}=0$. Теорема доказана.

Следствие. *Векторные поля, касающиеся некоторой гладкой поверхности, составляют подалгебру алгебры Ли всех векторных полей.*

2. Основные матричные алгебры Ли. С каждой рассмотренной выше группой линейных преобразований связана матричная алгебра Ли. Пространством этой алгебры является касательное пространство в единице группы; коммутатор — обычный коммутатор матриц.

Приведем список важнейших матричных групп и их касательных пространств в единице. Касательные пространства в единице будем обозначать так же, как и группы, но малыми буквами.

1) Специальная линейная группа $SL(n, \mathbb{R})$ (или $SL(n, \mathbb{C})$) — группа вещественных (комплексных) матриц n-го порядка с определителем 1. Касательное пространство $sl(n, \mathbb{R})$ (или $sl(n, \mathbb{C})$) в единице есть пространство матриц с нулевым следом.

2) Группа вращений $SO(n, \mathbb{R})$ (или $SO(n, \mathbb{C})$) — группа вещественных или комплексных ортогональных матриц с определителем 1:

$$A^{\mathrm{T}}A=1,\quad \det A=1,\quad A\in SO(n, \mathbb{R}),\quad SO(n, \mathbb{C}). \tag{9}$$

Тогда $so(, \mathbb{R})$, $so(n, \mathbb{C})$ — алгебры кососимметрических матриц (вещественных или комплексных)

$$X^{\mathrm{T}}=-X,\quad X\in so(n, \mathbb{R}), so(n, \mathbb{C}). \tag{10}$$

3) Псевдоортогональные группы $SO(p, q)$. Пусть $G=(g_{ij})$ — псевдоевклидова метрика в пространстве $\mathbb{R}^n_{p,q}$, $p+q=n$. Группа $SO(p, q)$ есть группа вещественных матриц A (с определителем 1), сохраняющих форму $G=(g_{ij})$:

$$A^{\mathrm{T}}GA=G,\quad \det A=1,\quad A\in SO(p, q). \tag{11}$$

В этом случае $so(p, q)$ — алгебра таких матриц $X=(x^i_j)$, что

$$GX+X^{\mathrm{T}}G=0,\quad X\in so(p,q), \tag{12}$$

или

$$g_{ij}x^j_k + x^j_i g_{jk} = 0. \tag{13}$$

Последнее равенство означает, что матрица

$$u_{ik} = g_{ij}x^j_k \tag{14}$$

кососимметрична. Этим устанавливается изоморфизм между пространством $so(p, q)$ и пространством всех кососимметрических матриц (порядка $n = p + q$).

4) Унитарная группа $U(n)$ — группа унитарных матриц n-го порядка

$$\bar{A}^{\mathrm{T}} A = 1, \quad A \in U(n). \tag{15}$$

Алгебра $u(n)$ состоит из косоэрмитовых матриц

$$\bar{X}^{\mathrm{T}} = -X, \quad X \in u(n). \tag{16}$$

5) Специальная унитарная группа $SU(n)$ — группа унитарных матриц с определителем 1. Алгебра $su(n)$ состоит из косоэрмитовых матриц с нулевым следом

$$\bar{X}^{\mathrm{T}} = -X, \quad \operatorname{Sp} X = 0, \quad X \in su(n). \tag{17}$$

6) Псевдоунитарная группа $U(p, q)$ — группа линейных преобразований комплексного n-мерного пространства, где $n = p + q$, сохраняющих псевдоэрмитово скалярное произведение

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{i=1}^{p} x^i \bar{y}^i - \sum_{i=p+1}^{n} x^i \bar{y}^i = g_{ij} x^i \bar{y}^j; \tag{18}$$

$$\xi = (x^1, \ldots, x^n), \quad \eta = (y^1, \ldots, y^n); \quad n = p + q.$$

Если $G = (g_{ij})$ — матрица формы (18), то для матрицы A из группы $U(p, q)$ будем иметь

$$\bar{A}^{\mathrm{T}} G A = G; \quad A \in U(p, q). \tag{19}$$

Тогда пространство $u(p, q)$ образовано матрицами $X = (x^j_i)$ такими, что

$$GX + \bar{X}^{\mathrm{T}} G = 0. \tag{20}$$

Пространство $u(p, q)$ связывается изоморфизмом с пространством косоэрмитовых матриц: матрице $x^j_k \in u(p, q)$ отвечает косоэрмитова матрица (u_{ik}),

$$u_{ik} = g_{ij} x^j_k, \quad \bar{u}_{ki} = -u_{ik}. \tag{21}$$

7) Группа $SU(p, q)$ — это подгруппа группы $U(p, q)$, составленная из матриц с определителем 1; матрицы из $su(p, q)$ имеют

нулевой след:

$$x_i^i = 0 \Leftrightarrow g^{ik}u_{ik} = 0. \tag{22}$$

Теорема 2. *Пространства* $sl(n, \mathbb{R})$, $sl(n, \mathbb{C})$, $so(n, \mathbb{R})$, $so(n, \mathbb{C})$, $so(p, q)$, $u(n)$, $su(n)$, $u(p, q)$, $su(p, q)$ *являются алгебрами Ли относительно коммутирования матриц.*

Доказательство. Нужно проверить, что каждое из перечисленных пространств замкнуто относительно коммутатора. Докажем, что:

а) если $\operatorname{Sp} X = 0$, $\operatorname{Sp} Y = 0$, то $\operatorname{Sp}[X, Y] = 0$;

б) если X, Y удовлетворяют условию (12), то и $[X, Y]$ удовлетворяет этому условию;

в) если X, Y удовлетворяют условию (20), то и $[X, Y]$ ему удовлетворяет.

Имеем $\operatorname{Sp}[X, Y] = \operatorname{Sp}(XY) - \operatorname{Sp}(YX) = 0$ (для любых X, Y). Утверждение а) доказано.

Пусть матрицы X, Y удовлетворяют условию (12), т. е.

$$X^{\mathsf{T}}G = -GX, \quad Y^{\mathsf{T}}G = -GY.$$

Тогда

$$[X, Y]^{\mathsf{T}}G = Y^{\mathsf{T}}X^{\mathsf{T}}G - X^{\mathsf{T}}Y^{\mathsf{T}}G = GYX - GXY = -G[X, Y].$$

Утверждение б) доказано.

Аналогично доказывается и утверждение в). Теорема доказана.

Определение 2. Пусть G — одна из групп преобразований 1—7. Касательное пространство в единице группы G, снабженное операцией коммутирования матриц, называется *алгеброй Ли группы* G.

Пример 1. Алгебра Ли $so(3, \mathbb{R})$ группы вращений трехмерного пространства состоит из кососимметрических матриц третьего порядка. Введем базис X_1. X_2, X_3 в пространстве таких матриц, полагая

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Тогда будем иметь

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2. \tag{24}$$

Вывод. *Алгебра Ли группы* $SO(3, \mathbb{R})$ *изоморфна алгебре Ли векторов в трехмерном евклидовом пространстве относительно векторного произведения.*

Пример 2. Рассмотрим алгебру Ли $so(p, q)$. Пусть псевдоевклидова метрика имеет вид

$$g_{ij} = \varepsilon_i\delta_{ij}, \quad \varepsilon_i = \pm 1. \tag{25}$$

Алгебра $so(p, q)$ реализуется кососимметрическими матрицами (см. формулу (14)), причем коммутатор имеет вид

$$[u, v]_{ij} = \sum_k \varepsilon_k (u_{ik}v_{kj} - v_{ik}u_{kj}),$$
$$u = (u_{ij}), \quad v = (v_{ij}), \quad u_{ji} = -u_{ij}, \quad v_{ji} = -v_{ij}. \tag{26}$$

Пример 3. Алгебра Ли $su(2)$. Выберем базис s_1, s_2, s_3 в пространстве косоэрмитовых 2×2-матриц со следом нуль, полагая

$$s_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Тогда будем иметь

$$[s_1, s_2] = 2s_3, \quad [s_2, s_3] = 2s_1, \quad [s_3, s_1] = 2s_2. \tag{28}$$

В силу леммы 14.6 эта алгебра Ли изоморфна алгебре Ли чисто мнимых кватернионов таких, что $\bar{x} = -x$, где коммутатор имеет вид $[x, y] = xy - yx$. При этом изоморфизме

$$i \leftrightarrow s_1, \quad j \leftrightarrow s_2, \quad k \leftrightarrow s_3. \tag{29}$$

Теорема 3. *Существует изоморфизм алгебр Ли*

$$su(2) \cong so(3, \mathbb{R}). \tag{30}$$

Доказательство. Поставим в соответствие матрице $X \in su(2)$ линейное преобразование $\operatorname{ad} X$ трехмерного пространства $su(2)$:

$$Z \mapsto \operatorname{ad} X(Z) = [X, Z], \quad X, Z \in su(2). \tag{31}$$

При этом

$$[\operatorname{ad} X, \operatorname{ad} Y] = \operatorname{ad}[X, Y] \tag{32}$$

в силу тождества Якоби. Это означает, что отображение (31) является гомоморфизмом алгебры Ли $su(2)$ в алгебру Ли линейных операторов в пространстве $su(2)$. Пространство $su(2)$ евклидово; длина вектора $z = bs_1 + cs_2 + ds_3 \leftrightarrow bi + cj + dk$ равна

$$|z|^2 = b^2 + c^2 + d^2 = \det z. \tag{33}$$

Преобразование вида

$$Z \mapsto AZA^{-1}, \quad A \in SU(2), \tag{34}$$

ортогонально в смысле скалярного произведения (33) (см. § 14): $\det AZA^{-1} = \det Z$.

Лемма 1. *Преобразование* $\operatorname{ad} X$, $X \in su(2)$, *кососимметрично в метрике* (33).

Доказательство. Пусть семейство преобразований $A = A(t)$ из группы $SU(2)$ таково, что

$$\left.\frac{dA(t)}{dt}\right|_{t=0} = X, \quad A(0) = 1. \tag{35}$$

Тогда производная по t семейства преобразований

$$Z \mapsto A(t) Z A(t)^{-1}$$

при $t=0$ имеет вид

$$Z \mapsto XZ - ZX = \mathrm{ad}\, X(Z).$$

Следовательно, это преобразование кососимметрично (см. § 5, п. 3). Лемма доказана.

Итак, мы имеем гомоморфизм

$$su(2) \to so(3, \mathbb{R}), \quad X \mapsto \mathrm{ad}\, X. \tag{36}$$

Ядро его равно нулю (если $\mathrm{ad}\, X(Z)=0$ для любого Z, то $X=0$), а размерности пространств $su(2)$ и $so(3, \mathbb{R})$ совпадают (равны трем). Теорема доказана.

Замечание. Матрицы преобразований $\mathrm{ad}\, s_1$, $\mathrm{ad}\, s_2$, $\mathrm{ad}\, s_3$ в базисе s_1, s_2, s_3 (27) имеют вид

$$\mathrm{ad}\, s_1 = 2X_1, \quad \mathrm{ad}\, s_2 = 2X_2, \quad \mathrm{ad}\, s_3 = 2X_3, \tag{37}$$

где базис X_1, X_2, X_3 в пространстве $so(3, \mathbb{R})$ задается формулами (23).

Пример 4. Алгебра Ли $sl(2, \mathbb{R})$. Введем в этой алгебре базис из матриц Y_0, Y_1, Y_2, полагая

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Коммутаторы этих матриц имеют вид

$$[Y_0, Y_1] = -2Y_2, \quad [Y_0, Y_2] = 2Y_1, \quad [Y_1, Y_2] = 2Y_0. \tag{39}$$

Теорема 4. *Существует изоморфизм алгебр Ли*

$$sl(2, \mathbb{R}) \cong so(1, 2).$$

Доказательство. Как и в теореме 3, каждой матрице Y из $sl(2, \mathbb{R})$ поставим в соответствие линейное преобразование $\mathrm{ad}\, Y$ трехмерного пространства $sl(2, \mathbb{R})$. Преобразования пространства $sl(2, \mathbb{R})$ в себя вида

$$Y \to AYA^{-1} \tag{40}$$

сохраняют квадратичную форму

$$|Y|^2 = \det Y. \tag{41}$$

Поэтому (ср. лемму 1) преобразования вида $\mathrm{ad}\, Y$ кососимметричны в смысле метрики (41). Но эта метрика псевдоевклидова и имеет тип (1, 2):

$$\det Y = \det(y^0 Y_0 + y^1 Y_1 + y^2 Y_2) =$$
$$= \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 + y_0 \\ y_2 - y_0 & -y_1 \end{pmatrix} = y_0^2 - y_1^2 - y_2^2. \tag{42}$$

Теорема доказана.

3. Линейные векторные поля. Пусть $X=(X^i_k)$ — вещественная (или комплексная) матрица n-го порядка. Построим векторное поле T_X в пространстве $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$), полагая его значение в точке $x\in\mathbb{R}^n$ (или $x\in\mathbb{C}^n$) равным

$$T_X(x)=-Xx \tag{43}$$

или в координатах

$$T^i_X(x)=-X^i_k x^k. \tag{44}$$

Определение 3. Поля вида (43) называются *линейными векторными полями.*

Найдем интегральные кривые линейного векторного поля (43). Для их определения имеем систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (в векторной записи)

$$\dot{x}=-Xx. \tag{45}$$

Теорема 5. *Интегральная кривая $x(t)$ поля* (44), *задаваемая начальным условием*

$$x(0)=x_0,$$

имеет вид

$$x(t)=\exp(-tX)x_0. \tag{46}$$

Доказательство. Проверим, что кривая (46) удовлетворяет дифференциальному уравнению (45). Напомним (см. § 14, п. 2), что экспонента от матрицы определяется как сумма ряда

$$\exp(-tX)=1-\frac{tX}{1!}+\frac{t^2X^2}{2!}-\ldots \tag{47}$$

Дифференцируя этот ряд по t, получим

$$\frac{d}{dt}\exp(-tX)=-X+\frac{tX^2}{1!}-\ldots=-X\exp(-tX). \tag{48}$$

Поэтому

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(\exp(-tX)x_0)=-X\exp(-tX)x_0=-Xx,$$

т. е. соотношение (45) выполнено. После этого наша теорема вытекает из теоремы единственности решения дифференциального уравнения.

Из теоремы следует, что однопараметрическая группа диффеоморфизмов, порожденная линейным полем T_X,— это умножения на матрицу $\exp(-tX)$.

Пример. Матрицы X_1, X_2, X_3, образующие базис (23) в алгебре Ли $so(3)$, порождают три линейных векторных поля в трехмерном евклидовом пространстве. Они обозначаются обычно через L_x, L_y, L_z. Значения этих векторных полей в точке с координатами (x, y, z) равны

$$L_x=(0,+z,-y),\quad L_y=(-z,0,+x),\quad L_z=(+y,-x,0). \qquad (49)$$

Этим полям соответствуют три однопараметрические группы: вращения пространства $\mathbb{R}^3$ вокруг осей x, y, z соответственно.

Пусть X и Y — две матрицы порядка n. Вычислим коммутатор двух линейных векторных полей T_X и T_Y.

Теорема 6. *Коммутатор векторных полей T_X и T_Y имеет вид*

$$[T_X, T_Y]=T_{[X,Y]}, \qquad (50)$$

где $[X, Y]=XY-YX$ — коммутатор матриц X, Y.

Доказательство. Используем формулу (8) для коммутатора векторных полей в координатах. Будем иметь

$$[T_X, T_Y]^i = X^k_l x^l \frac{\partial\left(Y^i_m x^m\right)}{\partial x^k} - Y^k_l x^l \frac{\partial\left(X^i_m x^m\right)}{\partial x^k} =$$

$$= X^k_l x^l Y^i_k - Y^k_l x^l X^i_k = (-[X, Y]\,x)^i.$$

Но последнее выражение есть i-я компонента линейного векторного поля $T_{[X,Y]}$. Теорема доказана.

Следствие. *Линейные векторные поля образуют относительно обычного коммутирования конечномерную алгебру Ли, изоморфную алгебре Ли всех матриц n-го порядка.*

Пусть G — одна из рассмотренных в п. 2 групп преобразований n-мерного пространства (вещественного или комплексного), $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Линейные векторные поля вида T_X, где матрица X лежит в $\mathfrak{g}$, образуют алгебру Ли, изоморфную алгебре Ли группы. Соответствующие однопараметрические группы диффеоморфизмов получаются умножениями на элементы однопараметрических подгрупп группы G.

Замечание. Соответствующие линейным векторным полям T_X, $X\in\mathfrak{g}$, дифференциальные операторы ∂_{T_X}, определенные на гладких функциях в $\mathbb{R}^n$, называются *генераторами действия* группы G. Зная генераторы, можно восстановить действие группы G на функциях, беря экспоненту от векторного поля $\xi=T_X$ (см. § 23):

$$f(F_t(x))=f(\exp(-tX)x)=\exp(-t\partial_\xi)f(x). \qquad (51)$$

Пример. Генераторами группы вращений трехмерного пространства $SO(3)$ являются дифференциальные операторы

$$L_x = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z},\quad L_y = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x},\quad L_z = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}. \qquad (52)$$

Согласно теореме 6 коммутаторы этих дифференциальных операторов вычисляются по формулам

$$[L_x, L_y]=L_z,\quad [L_y, L_z]=L_x,\quad [L_z, L_x]=L_y. \qquad (53)$$

4. Левоинвариантные поля на группах преобразований. Пусть X — фиксированная матрица n-го порядка (для определенности вещественная). Ей соответствует линейное преобразование пространства матриц $\mathbb{R}^{n^2}$ вида

$$A \mapsto AX. \tag{54}$$

Соответствующее линейное векторное поле в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$ матриц n-го порядка обозначим через L_X. Векторное поле L_X в точке ($n \times n$-матрице) A принимает значение, равное

$$L_X(A) = AX. \tag{55}$$

Интегральные кривые поля L_X находятся по теореме 5. Для их определения имеем систему дифференциальных уравнений (одно матричное уравнение)

$$\dot{A} = L_X(A) = AX. \tag{56}$$

Решение этой системы с начальным условием $A|_{t=0} = A_0$ имеет вид

$$A = A_0 \exp(tX). \tag{57}$$

Таким образом, однопараметрическая группа диффеоморфизмов, порожденная векторным полем L_X, — это умножения справа на матрицу $\exp(tX)$ (правые сдвиги на $\exp tX$).

Для коммутатора векторных полей вида L_X в силу теоремы 6 имеем выражение

$$[L_X, L_Y] = L_{[X, Y]}. \tag{58}$$

Поля вида L_X обладают важным свойством *левоинвариантности* (инвариантность относительно левых сдвигов):

$$BL_X(A) = L_X(BA). \tag{59}$$

Пусть G — одна из рассмотренных в п. 2 групп преобразований, заданная как гладкая поверхность в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$ всех матриц n-го порядка. Пусть $\mathfrak{g}$ — касательное пространство к группе G в единице. Напомним (§ 14, п. 2), что если $X \in \mathfrak{g}$, то матрица $\exp tX$ при любом t лежит в G (однопараметрическая подгруппа в G).

Лемма 2. *Если $X \in \mathfrak{g}$, то векторное поле L_X касается поверхности G, т. е. задает векторное поле на группе G.*

Доказательство. Вектор $L_X(A)$ в точке $A \in G$ есть начальный вектор скорости кривой $A \exp tX \in G$. Лемма доказана.

Ограничение векторного поля L_X, где X — матрица из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G, на поверхность G будем также обозначать через L_X. Заметим, что значение векторного поля L_X в единице группы равно X; поле L_X на G обладает свойством инвариантности относительно левых сдвигов на элементы группы.

Определение 4. Векторные поля вида L_X на группе G, где $X \in \mathfrak{g}$ — элемент из алгебры Ли этой группы, называются *левоинвариантными полями на группе* G.

Из теоремы 1 и формулы (58) немедленно вытекает

Теорема 7. *Левоинвариантные векторные поля на группе G образуют алгебру Ли, изоморфную алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G.*

Нам будет также полезна следующая

Лемма 3. *Значения левоинвариантных векторных полей в каждой точке группы G составляют все касательное пространство к группе G в этой точке.*

Доказательство. Если $X_1, \ldots, X_N$ — базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, то векторы $L_{X_1}(A), \ldots, L_{X_N}(A)$ линейно независимы в каждой точке $A \in G$ и образуют базис в касательном пространстве. Лемма доказана.

5. Метрика Киллинга. Введем сначала понятие метрики Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Определение 5. Евклидово или псевдоевклидово скалярное произведение $\langle\,,\rangle_0$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется *метрикой Киллинга*, если все операторы вида $\operatorname{ad} X$ кососимметричны в этой метрике:

$$\langle \operatorname{ad} X(Y),\ Z\rangle_0 = -\langle Y,\ \operatorname{ad} X(Z)\rangle_0. \tag{60}$$

Примеры метрик Киллинга на алгебрах Ли $su(2)$ и $sl(2, \mathbb{R})$ мы видели в п. 2 (формулы (33) и (41)); там эти метрики были использованы для доказательства теорем 3 и 4. Отметим, что метрика Киллинга (33) для алгебры Ли $su(2)$ евклидова; метрика Киллинга (41) для $sl(2, \mathbb{R})$ псевдоевклидова (типа (1, 2)).

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы преобразований G; пусть на $\mathfrak{g}$ задана метрика Киллинга $\langle\,,\rangle_0$. Используя построенные в предыдущем пункте левоинвариантные поля, можно построить метрику $\langle\,,\rangle$ на всей группе, полагая

$$\langle L_X,\ L_Y\rangle = \langle X,\ Y\rangle_0. \tag{61}$$

Таким образом, скалярное произведение двух левоинвариантных полей полагается тождественно равным скалярному произведению их значений в единице группы. Это соглашение полностью определяет метрику на G в силу леммы 3.

Определение 6. Метрика, определенная равенством (61), называется *метрикой Киллинга на группе* G.

Пример. Пусть $G = SO(n, \mathbb{R})$. Покажем, что метрика Киллинга на этой группе может быть индуцирована евклидовой метрикой в пространстве всех матриц $\mathbb{R}^{n^2}$. Эта евклидова метрика имеет вид

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i,j} x^i_j y^i_j, \quad X = (x^i_j), \quad Y = (y^i_j). \tag{62}$$

Заметим, что это выражение можно переписать в виде

$$\langle X, Y\rangle = \mathrm{Sp}\left(XY^{\mathrm{T}}\right), \tag{63}$$

где Sp — след матрицы; $\mathrm{Sp}\, A = a^i_i$, если $A = \left(a^i_j\right)$. Поверхность $SO(n, \mathbb{R})$ целиком лежит в сфере радиуса $\sqrt{n}$, так как для ортогональной матрицы A n-го порядка будем иметь

$$\langle A, A\rangle = \mathrm{Sp}\left(AA^{\mathrm{T}}\right) = \mathrm{Sp}(1) = n.$$

Пусть $X, Y \in so(n, \mathbb{R}), A \in SO(n, \mathbb{R})$. Покажем, что в метрике, индуцированной евклидовой метрикой (67) на поверхности $SO(n, \mathbb{R})$, имеет место равенство

$$\langle L_X(A), L_Y(A)\rangle = \mathrm{Sp}\left(XY^{\mathrm{T}}\right) = \langle L_X(1), L_Y(1)\rangle. \tag{64}$$

По определению индуцированной метрики

$$\langle L_X(A), L_Y(A)\rangle = \mathrm{Sp}\left(AX(AY)^{\mathrm{T}}\right) =$$
$$= \mathrm{Sp}\left(AXY^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\right) = \mathrm{Sp}\left(A^{\mathrm{T}}AXY^{\mathrm{T}}\right) = \mathrm{Sp}\left(XY^{\mathrm{T}}\right)$$

(мы использовали то, что при циклической перестановке сомножителей след произведения не меняется, и условие ортогональности $A^{\mathrm{T}}A = 1$).

Осталось показать, что операторы вида $\mathrm{ad}\, X$ кососимметричны в этой метрике при $X \in so(n, \mathbb{R})$. Если $Y, Z \in so(n, \mathbb{R})$, т. е. $Y^{\mathrm{T}} = -Y$, $Z^{\mathrm{T}} = -Z$, то

$$\langle Y, Z\rangle = \mathrm{Sp}\left(YZ^{\mathrm{T}}\right) = -\mathrm{Sp}(YZ).$$

Следовательно,

$$\langle \mathrm{ad}\, X(Y),\ Z\rangle = \mathrm{Sp}\, XYZ - \mathrm{Sp}\, YXZ,$$
$$\langle Y,\ \mathrm{ad}\, X(Z)\rangle = \mathrm{Sp}\, YXZ - \mathrm{Sp}\, YZX.$$

Эти два выражения различаются только знаком. Итак, мы получили метрику Киллинга на группе $SO(n, \mathbb{R})$ (а значит, и на любой ее подгруппе) как ограничение евклидовой метрики в $\mathbb{R}^{n^2}$.

Если группа G реализована как подгруппа в унитарной группе $U(n)$, то можно использовать операцию овеществления, дающую вложение $U(n) \subset SO(2n, \mathbb{R})$. Но можно и прямо написать вид метрики Киллинга для группы $U(n)$:

$$\langle X, Y\rangle = \mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}\, X\bar{Y}^{\mathrm{T}} = -\mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}\, XY.$$

6. Классификация трехмерных алгебр Ли. Пусть задана трехмерная алгебра Ли L; пусть векторы e_1, e_2, e_3 составляют ее базис. Правило коммутации в алгебре L задается тензором «структурных констант» c^k_{ij}, где полагаем по определению

$$[e_i, e_j] = c^k_{ij}e_k, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{65}$$

Очевидно,

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k. \tag{66}$$

Из тождества Якоби (см. выше) вытекает соотношение

$$c_{ij}^k c_{kl}^m + c_{jl}^k c_{ki}^m + c_{li}^k c_{kj}^m = 0. \tag{67}$$

Заменами базиса e_1, e_2, e_3 тензор c_{ij}^k приведем к простейшему виду. Для этого выразим его через компоненты симметричного тензора (b^{ij}) и компоненты вектора (a_i), полагая

$$c_{ij}^k = \varepsilon_{ijl} b^{lk} + \delta_j^k a_i - \delta_i^k a_j. \tag{68}$$

Условие антисимметричности уже выполнено, а из тождества Якоби (72) вытекает, что

$$b^{ij} a_j = 0, \tag{69}$$

т. е. что вектор (a_i) либо равен нулю, либо является собственным вектором тензора (b^{ij}) с собственным значением нуль. Приведем тензор b^{ij} к диагональному виду: $b^{ij} = b^{(i)}\delta^{ij}$, где $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, $b^{(3)}$ — собственные значения. Поскольку (a_i) — собственный вектор, можно считать, что $(a_i) = (a, 0, 0)$. Из (69) вытекает, что $b^{(1)}a = 0$, т. е. или a или $b^{(1)}$ равно нулю. Правила коммутации (65) в этом случае примут вид

$$[e_1, e_2] = ae_2 + b^{(3)}e_3, \quad [e_2, e_3] = b^{(1)}e_1; \quad [e_3, e_1] = b^{(2)}e_2 - ae_3.$$

Остался еще произвол в изменении знака векторов e_1, e_2, e_3, а также в умножении их на произвольные положительные числа. Учитывая эту возможность, получаем следующую таблицу трехмерных алгебр Ли (классификация Бьянки):

Тип	a	$b^{(1)}$	$b^{(2)}$	$b^{(3)}$	Тип	a	$b^{(1)}$	$b^{(2)}$	$b^{(3)}$
I	0	0	0	0	V	1	0	0	0
II	0	1	0	0	IV	1	0	0	1
VII_0	0	1	1	0	VII	a	0	1	1
VI_0	0	1	−1	0	III $(a=1)$				
IX	0	1	1	1	VI $(a \neq 1)$	a	0	1	−1
VIII	0	1	1	−1					

Тип I — абелева алгебра Ли (алгебра Ли группы трансляций). Тип IX — алгебра Ли группы $SO(3)$.

7. Алгебра Ли конформной группы. Разберем векторные поля, отвечающие конформным преобразованиям евклидова и псевдоевклидова пространства. Как было показано в § 15, конформных преобразований в размерностях $n \geqslant 3$ весьма мало. Они отвечают движениям пространства $\mathbb{R}_{p,q}^n$ (псевдовращениям и трансляциям), дилатациям, инверсиям относительно некоторого центра.

Введем следующие поля, записанные как дифференциальные операторы первого порядка:

$$\begin{aligned}
&1) && \Omega_{ab} = g_{ac}x^c \frac{\partial}{\partial x^b} - g_{bc}x^c \frac{\partial}{\partial x^a},\\
& && a, b = 1, \ldots, n \text{ (псевдовращения)},\\
&2) && P_a = \frac{\partial}{\partial x^a} \text{ (трансляции)},\\
&3) && D = x^a \frac{\partial}{\partial x^a} \text{ (дилатация)},\\
&4) && K_a = 2g_{ac}x^c x^b \frac{\partial}{\partial x^b} - g_{bc}x^b x^c \frac{\partial}{\partial x^a} \text{ (инверсия)}.
\end{aligned} \tag{70}$$

Для евклидовой метрики мы имеем $g_{ac} = \delta_{ac}$ и преобразование $\exp(t\Omega_{ab})$ задает вращение в плоскости (a, b); для псевдоевклидовой метрики $g_{ac} = \lambda_a \delta_{ac}$, $\lambda_a = \pm 1$. В этом случае мы получим, что преобразование $\exp(t\Omega_{ab})$ задает либо вращение (если $\lambda_a = \lambda_b$), либо элементарное преобразование Лоренца в плоскости (a, b) (если $\lambda_a = -\lambda_b$). Преобразования $\exp\left(t \frac{\partial}{\partial x^a}\right)$ являются трансляциями вдоль оси x^a, а $\exp\left(tx^a \frac{\partial}{\partial x^a}\right)$ — дилатация $D(x) = tx$. Сложнее найти однопараметрическую группу преобразований $\exp(tK_a)$, поскольку поле K_a нелинейно. Позднее мы покажем, что все эти преобразования конформны на $\mathbb{R}^n_{p,q}$.

Замечание. Более того, любое конформное преобразование, близкое к тождественному на $\mathbb{R}^n$ или на сфере S^n, может быть представлено в виде $\exp(tA)$, где

$$A = \sum_{a,b=1}^{n} \lambda^{ab}\Omega_{ab} + \sum_{a=1}^{n} \mu^a P_a + \gamma D + \sum_{a=1}^{n} \delta^a K_a;$$

аналогично для всех $\mathbb{R}^n_{p,q}$.

Написанные выше векторные поля (70) образуют алгебру Ли. Без труда проверяются коммутационные соотношения

$$\begin{gathered}
[\Omega_{ab}, \Omega_{cd}] = g_{ac}\Omega_{bd} - g_{bc}\Omega_{ad} + g_{ad}\Omega_{cb} - g_{bd}\Omega_{ca},\\
[\Omega_{ab}, P_c] = g_{ac}P_b - g_{bc}P_a, \quad [\Omega_{ab}, K_c] = g_{ac}K_b - g_{bc}K_a,\\
[\Omega_{ab}, D] = [P_a, P_b] = [K_a, K_d] = 0,\\
[P_a, K_b] = 2(g_{ab}D + \Omega_{ab}); \quad [P_a, D] = P_a, \quad [K_d, D] = -K_d.
\end{gathered} \tag{71}$$

Пусть теперь метрика g_{ab} евклидова, т. е. $g_{ab} = \delta_{ab}$. Рассмотрим алгебру Ли, отвечающую группе псевдовращений $SO(n+1, 1)$, заданную аналогичными векторными полями $\Omega_{\mu,\nu}$, где $\mu, \nu =$

$= 1, \ldots, n+2$. Установим соответствие

$$\begin{aligned} \Omega_{a,b} &\mapsto \Omega_{\mu,\nu}, \quad \mu = a = 1, \ldots, n; \quad \nu = b = 1, \ldots, n, \\ P_a &\mapsto \Omega_{a,n+1} - \Omega_{a,n+2}, \\ K_a &\mapsto \Omega_{a,n+1} + \Omega_{a,n+2}, \\ D &\mapsto \Omega_{n+1,n+2}. \end{aligned} \tag{72}$$

Непосредственно проверяется следующий важный факт.

Утверждение. *Соответствие* (72) *является изоморфизмом алгебр Ли.*

Таким образом, *в евклидовом случае алгебра Ли* (71) *изоморфна алгебре Ли группы* $SO(n+1, 1)$, *отвечающей псевдовращениям* (т. е. преобразования вида $\exp(tA)$ для A из алгебры Ли (71) являются псевдовращениями).

Замечания. 1. Хотя для $n=2$ имеется много локальных конформных преобразований, среди них имеется подгруппа дробно-линейных преобразований сферы $S^2 \to S^2$

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

различные подгруппы которой уже использовались для изучения движений евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, плоскости Лобачевского L^2, сферы S^2 (см. §§ 9, 10, 13). Эта группа изоморфна $SL(2, \mathbb{C})/\pm 1$ (см. § 13) и порождается как раз вращениями, трансляциями, дилатациями и инверсиями на $\mathbb{R}^2$ после перехода к стереографической проекции. Изоморфизм (72) дает изоморфизм алгебры Ли всех бесследных комплексных 2×2-матриц с алгеброй Ли группы Лоренца $SO(3, 1)$, реализованной как группа псевдовращений (вида $\exp(tA)$). Этот изоморфизм называется «полуспинорным представлением» группы Лоренца $SO(3, 1)$ в виде комплексных 2×2-матриц. Имеется также комплексно сопряженное представление.

2. Алгебра Ли группы конформных преобразований псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^n_{p,q}$ изоморфна $so(p+1, q+1)$ (проверьте!).

Докажем, наконец, следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть* $g_{ab} = \delta_{ab}$ *и* $A = \lambda^{ab}\Omega_{ab} + \mu^a P_a + \gamma D + \delta^a K_a$. *Тогда преобразования вида* $S_t = \exp(tA)$ *являются конформными преобразованиями евклидова пространства* $\mathbb{R}^n$.

Для доказательства нужно рассмотреть векторное поле A и показать, что определяемая им группа (локальных) преобразований $S_t = \exp(tA)$ является конформной (если мы хотим говорить не о локальных, а о глобальных преобразованиях, то следует рассматривать эти поля на сфере S^n, перейдя к сфере от $\mathbb{R}^n$ преобразованием, обратным к стереографической проекции, вводящей на S^n конформно евклидовы координаты; однако это несущественно). Если векторное поле (u^a) задает движение евклидовой метрики, то должно быть выполнено условие

$$\frac{\partial u^a}{\partial x^b} + \frac{\partial u^b}{\partial x^a} = 0.$$

Это означает, что «тензор деформации», измеряющий искажение расстояний, обращается в нуль (см. § 23). Для векторных полей u^a, задающих конформные преобразования евклидовой метрики, тензор деформации должен быть пропорционален самой метрике:

$$\frac{\partial u^a}{\partial x^b} + \frac{\partial u^b}{\partial x^a} = \gamma(x)\,\delta_{ab}, \tag{73}$$

где $\gamma(x)$ — гладкая функция. В этом случае, если $A = u^a \frac{\partial}{\partial x^a}$, получим преобразование

$$S_t = \exp(tA),$$

и преобразование метрики будет иметь вид

$$S_t^*(g_{ab}) = S_t^*(\delta_{ab}) = [1 + t\mu(x)]\,\delta_{ab} + O(t^2).$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что все поля (72) удовлетворяют условию (73). Нам осталось доказать, что из условия (73), наоборот, следует конформность преобразований S_t, определяемых векторным полем

$$\dot{x}^a = u^a(x^1, \ldots, x^n), \tag{74}$$

или, что то же самое, преобразований $\exp(tA)$. Доказательство этого факта таково (оно аналогично соответствующему доказательству для движений). Сдвиг на конечное время Δt можно разбить в последовательность (суперпозицию) сдвигов на время $\frac{\Delta t}{N}$, так как

$$S_{\Delta t} = S_{(\Delta t/N)} \circ \ldots \circ S_{(\Delta t/N)}.$$

Линейная часть преобразований S_τ при малых $\tau = \Delta t/N$ имеет вид

$$S_\tau = 1 + \tau A + O(\tau^2), \quad A = \frac{\partial u^a}{\partial x^b}.$$

Поскольку $\Delta t/N$ мало, для вектора ξ в точке $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ имеем

$$\begin{gathered}
\xi_0^a = \xi^a \to \xi^a + \left(\frac{\Delta t}{N}\right)\frac{\partial u^a}{\partial x^b}(x_0)\,\xi^b + O\left(\frac{\Delta t}{N}\right)^2 = \xi_1^a,\\
\xi_1^a \to \xi_2^a = \xi_1^a + \left(\frac{\Delta t}{N}\right)\frac{\partial u^a}{\partial x^b}(x_1)\,\xi_1^b + O\left(\frac{\Delta t}{N}\right)^2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\xi_{N-1}^a \to \xi_N^a = \xi_{N-1}^a + \left(\frac{\Delta t}{N}\right)\frac{\partial u^a}{\partial x^b}(x_{N-1})\,\xi_{N-1}^b + O\left(\frac{\Delta t}{N}\right)^2.
\end{gathered} \tag{75}$$

Точки x_q, $q=0, \ldots, N-1$, лежат на интегральной траектории $x^a(t)$ уравнения (74) такой, что

$$x^a(0) = x_0^a,$$
$$x^a\left(\frac{\Delta t}{N}\right) = x_1^a,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^a\left((N-1)\frac{\Delta t}{N}\right) = x_{N-1}^a.$$

Для скалярного квадрата векторов ξ_i получаем из (75)

$$\langle \xi_1, \xi_1\rangle = \left(1+\mu(x_0)\frac{\Delta t}{N}\right)\langle \xi_0, \xi_0\rangle + O\left(\frac{\Delta t}{N}\right)^2,$$
$$\langle \xi_2, \xi_2\rangle = \left(1+\mu(x_1)\frac{\Delta t}{N}\right)\langle \xi_1, \xi_1\rangle + O\left(\frac{\Delta t}{N}\right)^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\langle \xi_N, \xi_N\rangle = \left(1+\mu(x_{N-1})\frac{\Delta t}{N}\right)\langle \xi_{N-1}, \xi_{N-1}\rangle + O\left(\frac{\Delta t}{N}\right)^2.$$

Так как шагов всего N, то

$$\langle \xi_N, \xi_N\rangle = \rho(x)\langle \xi_0, \xi_0\rangle + O\left(N\cdot\frac{\Delta t^2}{N^2}\right). \tag{76}$$

При фиксированном $\Delta t = \text{const}$ и $N\to\infty$ мы получаем конформность отображения $S_{\Delta t}$. Отсюда следует наше утверждение.

Замечания. 1. Из доказательства теоремы вытекает, что если тензор деформации поля равен нулю, то $S_t = \exp(tA)$ есть движение, где $A = u^a\frac{\partial}{\partial x^a}$. Это равносильно тому, что все линейные преобразования $S_t^{-1}dS_t$ являются кососимметрическими в любой точке:

$$S_t^{-1}dS_t = B(x) = \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}\right), \quad B = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha}\right) = \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}\right).$$

2. Более того, возможна ситуация, когда преобразования $B(x) = \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}\right)$ во всех точках $x\in\mathbb{R}^n$ порождают подалгебру Ли L в алгебре Ли всех $n\times n$-матриц. Например, для четных n это может быть алгебра всех комплексных $\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}$-матриц.

Задачи. 1. Докажите, что в последнем случае преобразования S_t задают голоморфные преобразования $\mathbb{C}^{n/2}\to\mathbb{C}^{n/2}$. Для $n/2>1$ эти преобразования, вообще говоря, не конформны.

2. Докажите, что если все $B(x)$ имеют нулевой след, то все преобразования S_t сохраняют объем.

3. Доказать изоморфность следующих алгебр Ли:

а) $su(1, 1) \approx sl(2, \mathbb{R})$,

б) $su(2) \times su(2) \approx so(4)$,

в) $sl(2, \mathbb{C}) \approx so(1, 3)$,

г) $so(1, 2) \approx$ алгебре векторов в $\mathbb{R}^3_{1,2}$ относительно «векторного произведения» (см. задачу 1 к § 6).

4. Вычислить левоинвариантные векторные поля на группе единичных кватернионов.

5. Доказать, что метрика Киллинга на группах $SO(n)$ может быть записана в виде $dl^2(g) = \mathrm{Sp}(g^{-1}dg \cdot g^{-1}dg)$.

6. Пусть g^0_{ij} — метрика Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, записанная в базисе $X_1, \ldots, X_n$. Пусть $[X_i, X_j] = c^k_{ij}X_k$, $c_{kij} = g^0_{kl}c^l_{ij}$. Доказать, что тензор c_{kij} антисимметричен по всем трем индексам.

7. Для группы $SO(n, \mathbb{R})$ внутренние автоморфизмы $G \mapsto AGA^{-1}$ являются движениями метрики Киллинга.

8. Для группы $SO(p, q)$ можно получить метрику Киллинга как ограничение псевдоевклидовой метрики $\langle X, Y \rangle = \mathrm{Sp}(GXGY^T)$ (G — матрица метрики типа (p, q)). Найти тип полученной псевдоримановой метрики.

9. Все описанные выше примеры метрик Киллинга получаются (с точностью до постоянного множителя) как $\mathrm{Sp}(\mathrm{ad}\, X \cdot \mathrm{ad}\, Y)$.

10. Группа $SL(2, \mathbb{R})$ действует как группа движений метрики Лобачевского (см. § 10). Каждой однопараметрической подгруппе в группе $SL(2, \mathbb{R})$ (см. задачу 14.5) соответствует однопараметрическая группа диффеоморфизмов плоскости Лобачевского. Найти соответствующие векторные поля на плоскости Лобачевского (в модели Клейна). Вычислить их коммутаторы.

11. Вычислить алгебру Ли аффинной группы в $\mathbb{R}^n$; группы движений n-мерного евклидова пространства, группы движений пространства Минковского $\mathbb{R}^3_{1,2}$ (см. задачу 4.3). Выписать соответствующие генераторы в $\mathbb{R}^n$, в $\mathbb{R}^3_{1,2}$.

12. Показать, что линейные векторные поля L_X, L_Y, L_Z в $\mathbb{R}^3$, соответствующие действию группы $SO(3, \mathbb{R})$, касаются любой сферы с центром в начале координат. Вычислить вид соответствующих дифференциальных операторов первого порядка на единичной сфере в сферических координатах.

13. Определим правоинвариантные поля на группе G как ограничение на группу векторных полей вида $R_X(A) = -XA$. Доказать, что $[R_X, R_Y] = R_{[X, Y]}$, $[L_X, R_Y] \equiv 0$.

14. Выяснить, к какому из описанных в п. 6 типов принадлежат алгебры Ли $so(1, 2)$ и $sl(2, \mathbb{R})$.