Глава 4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ТЕНЗОРОВ

§ 25. Дифференциальное исчисление кососимметрических тензоров

1. Градиент кососимметрического тензора. Большинство физических законов записывается в виде дифференциальных соотношений между физическими величинами. Многие из этих величин представляют собой тензорные поля (в частности, векторные поля) в пространстве или в области пространства. Поэтому нас интересует вопрос: какие вообще существуют дифференциальные операции над тензорами, которые в определенном смысле не зависят от системы координат. (В каком смысле, позднее будет уточнено.) Например, простейшая из операций такова: если функция $f(x, \alpha)$ или тензорное поле $T^{i_1\ldots i_p}_{k_1\ldots k_q}(x, \alpha)$ зависит от точки пространства $x=(x^1, x^2, x^3)$ и некоторого параметра α, не связанного с пространством, то можно взять частную производную по параметру $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$ или $\frac{\partial T^{i_1\ldots i_p}_{k_1\ldots k_q}(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ в каждой заданной точке. В классической механике таким параметром является время $t=\alpha$. Эта операция не связана с геометрией пространства (x^1, x^2, x^3) и производится отдельно в каждой точке. Другой общеизвестной дифференциальной операцией, не связанной с римановой метрикой, является взятие градиента функции (скалярного поля):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3}\right) = \operatorname{grad} f.$$

Это — ковектор, инвариантным образом построенный из функции f в том смысле, что при заменах координат его числовая запись меняется согласно тензорному закону:

$$x = x(z), \quad \frac{\partial f}{\partial z^j} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial z^j}.$$

Часто встречается также следующее многомерное обобщение градиента на кососимметрические тензоры.

Определение 1. Пусть $T_{i_1\ldots i_k}$ — кососимметрический по всем индексам тензор в n-мерном пространстве с координатами

$x^1, \ldots, x^n$, $i_q = 1, \ldots, n$. Его *градиентом* $dT_{j_1 \ldots j_k j_{k+1}}$ называется кососимметрический тензор типа $(0, k+1)$ с компонентами

$$(dT)_{j_1 \ldots j_{k+1}} = \sum_{q=1}^{k+1} (-1)^{q+1} \frac{\partial T_{j_1 \ldots \widehat{j_q} \ldots j_{k+1}}}{\partial x^{j_q}} \tag{1}$$

(здесь значок $\widehat{j_q}$ означает, что индекс j_q пропущен).

Прежде чем проверить, что dT — тензор, рассмотрим примеры.

1) Если $k+1=1$ и $T=f(x)$ — функция, то согласно определению $(dT)_i = \frac{\partial T}{\partial x^i}$; таким образом, это — обычный градиент.

2) Если $T=(T_i)$ — ковектор, то $(dT)_{ij} = \frac{\partial T_j}{\partial x^i} - \frac{\partial T_i}{\partial x^j} = -(dT)_{ji}$. Этот тензор $(dT)_{ij}$ часто называется *ротором* ковекторного поля; для него употребляется обозначение $\operatorname{rot} T$. Ротор — это кососимметрический тензор типа $(0, 2)$.

Замечание. Если $n=3$, пространство и координаты x^1, x^2, x^3 евклидовы, то обычно тензору $(dT)_{ij}$ сопоставляют вектор $\eta^k = \operatorname{rot} T = *(dT)$ (см. § 19, п. 3), где $\eta^1 = \frac{\partial T_3}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^3} = (dT)_{23}$, $\eta^2 = \frac{\partial T_1}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^1} = (dT)_{31} = -(dT)_{13}$, $\eta^3 = \frac{\partial T_2}{\partial x^1} - \frac{\partial T_1}{\partial x^2} = (dT)_{12}$ или $\eta^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} (dT)_{jk}$.

3) Если $n=3$ и задан кососимметрический тензор $T_{ij} = -T_{ji}$, то кососимметрический тензор 3-го ранга dT имеет вид

$$(dT)_{123} = \frac{\partial T_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial T_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x^1}.$$

Замечание. Если координаты (x^1, x^2, x^3) евклидовы и в соответствии с указанным правилом сопоставления вектора кососимметрическому тензору $\eta^1 = T_{23}$, $\eta^2 = -T_{13}$, $\eta^3 = T_{12}$ $\left(\eta^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} T_{jk}\right)$, то

$$(dT)_{123} = \frac{\partial \eta^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \eta^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta^3}{\partial x^3} = \frac{\partial \eta^i}{\partial x^i}.$$

Операция, сопоставляющая в евклидовых координатах векторному полю $(\eta^i) = \eta$ число $\frac{\partial \eta^i}{\partial x^i} = \operatorname{div} \eta$, называется *дивергенцией*.

Перейдем к проверке корректности предыдущего определения.

Теорема 1. *Градиент dT кососимметрического тензора ранга k типа $(0, k)$ является кососимметрическим тензором ранга $k+1$ типа $(0, k+1)$.*

Доказательство (для $k=0, 1$). Пусть задана замена

$$x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{n'}), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

По определению

$$(dT)_{i_1 \ldots i_{k+1}} = \sum_q (-1)^{q+1} \frac{\partial T_{i_1 \ldots \hat{i}_q \ldots i_{k+1}}}{\partial x^{i_q}} \tag{3}$$

в любой системе координат.

Пусть $T_{i_1 \ldots i_k}$ — компоненты тензора в координатах (x) и $T'_{i'_1 \ldots i'_k}$ — компоненты в координатах (x').

По определению

$$T'_{i'_1 \ldots i'_k} = T_{i_1 \ldots i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \ldots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}}. \tag{4}$$

Далее, по определению градиента тензора

$$(dT)_{i'_1 \ldots i'_{k+1}} = \sum_q (-1)^{q+1} \frac{\partial T_{i'_1 \ldots \hat{i}'_q \ldots i'_{k+1}}}{\partial x^{i'_q}}, \tag{5}$$

$$(dT)_{i_1 \ldots i_{k+1}} = \sum_p (-1)^{p+1} \frac{\partial T_{i_1 \ldots \hat{i}_p \ldots i_{k+1}}}{\partial x^{i_p}}. \tag{6}$$

Для доказательства теоремы необходимо подставить формулы (5) и (6) в (4) и убедиться после преобразований, что градиент $(dT)_{(i')}$ выражается через $dT_{(i)}$ по тензорному закону. Ввиду громоздкости выкладок мы проведем полное доказательство для $k=1$, $k+1=2$ (для $k=0$ справедливость утверждения теоремы была доказана в § 16).

Пусть T_i — ковектор; тогда

$$(dT)_{ij} = \frac{\partial T_j}{\partial x^i} - \frac{\partial T_i}{\partial x^j}, \qquad T_{i'} = T_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}.$$

Имеем

$$(dT)_{l'k'} = \frac{\partial T_{k'}}{\partial x^{l'}} - \frac{\partial T_{l'}}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial}{\partial x^{l'}}\left(T_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^{k'}}\left(T_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}}\right) =$$

$$= \frac{\partial T_i}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} + T_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{l'} \partial x^{k'}} - \frac{\partial T_j}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}} - T_j \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{k'} \partial x^{l'}} =$$

$$= \left(\frac{\partial T_i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}}\right) \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} - \left(\frac{\partial T_j}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\right) \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}} =$$

$$= \left(\frac{\partial T_i}{\partial x^j} - \frac{\partial T_j}{\partial x^i}\right) \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}} = (dT)_{ji} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}}.$$

Итак, для этого случая теорема доказана.

2. Внешний дифференциал формы. Дадим другое определение операции градиента кососимметрического тензора, использующее связь с дифференциальными формами. Тензору $T_{i_1\ldots i_k}$ соответствует форма

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} T_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}. \tag{7}$$

Определим форму $d\omega$ степени $k+1$, полагая

$$d\omega = \sum_{\substack{i_0 \\ i_1<\ldots<i_k}} \frac{\partial T_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^{i_0}} dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}. \tag{8}$$

В частности, если $\omega = f$ (скаляр), то $d\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ — дифференциал функции.

Теорема 2. *Имеет место тождество*

$$d\omega = \sum_{j_1<\ldots<j_{k+1}} (dT)_{j_1\ldots j_{k+1}} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{k+1}}.$$

Доказательство. Из определения dT имеем

$$\sum_{j_1<\ldots<j_{k+1}} (dT)_{j_1\ldots j_{k+1}} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{k+1}} =$$

$$= \sum_{j_1<\ldots<j_{k+1}} \sum_q (-1)^{q+1} \frac{\partial T_{j_1\ldots \widehat{j_q}\ldots j_{k+1}}}{\partial x^{j_q}} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{k+1}}.$$

Заметим, что $dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{k+1}} = (-1)^{q+1} dx^{j_q} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^{j_q}} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{k+1}}$. Переобозначим теперь индексы суммирования: в q-м слагаемом положим $i_0 = j_q$, $i_1 = j_1$, ..., $i_k = j_{k+1}$. Ясно, что $i_1 < \ldots < i_k$, причем индекс i_0 пробегает (учитывая все слагаемые) все значения от 1 до n. Отсюда и вытекает утверждение теоремы.

Теорема 3. *Дважды взятая операция градиента кососимметрического тензора дает тождественный нуль:*

$$d(dT) = 0 \quad \textit{или} \quad d(d\omega) = 0. \tag{9}$$

Доказательство. Имеем

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} T_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

$$d\omega = \sum_{\substack{p \\ i_1<\ldots<i_k}} \frac{\partial T_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^p} dx^p \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k};$$

$$d(d\omega) = \sum_{\substack{p,q \\ i_1<\ldots<i_k}} \frac{\partial^2 T_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^q \partial x^p} dx^q \wedge dx^p \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Но выражение $\frac{\partial^2 T_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^q \partial x^p}$ симметрично по индексам q, p, а выражение $dx^q \wedge dx^p$ кососимметрично: $dx^p \wedge dx^q = -dx^q \wedge dx^p$, поэтому их свертка дает тождественный нуль. Теорема доказана.

Замечание. Формулу для дифференциала формы можно записать в таком виде:

$$d\left(\sum_{i_1<\ldots<i_k} T_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\right) = \\ = \sum_{i_1<\ldots<i_k} (dT_{i_1 \ldots i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}, \quad (10)$$

где $T_{i_1 \ldots i_k}$ рассматривается как скалярная функция. Отсюда нетрудно получить другое доказательство того, что dT — тензор: так как дифференциал функции $dT_{i_1 \ldots i_k}$ — тензор, то и его внешнее произведение на $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ — тоже тензор.

Используя операцию коммутирования векторных полей, можно указать еще одно выражение для дифференциала формы (формула Картана).

Теорема 4. *Пусть ω — дифференциальная форма ранга k и $X_1, \ldots, X_{k+1}$ — гладкие векторные поля. Тогда значение формы $d\omega$ на полях $X_1, \ldots, X_{k+1}$ может быть найдено по формуле*

$$(k+1)\, d\omega(X_1, \ldots, X_{k+1}) = \\ = \sum_i (-1)^{i-1} \partial_{X_i} \omega(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{k+1}) + \\ + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{k+1}). \quad (11)$$

Доказательство проведем для случая $k=1$. Пусть $T_i dx^i = \omega$, тогда

$$2d\omega = \left(\frac{\partial T_j}{\partial x^i} - \frac{\partial T_i}{\partial x^j}\right) dx^i \wedge dx^j.$$

Значение формы $d\omega$ на векторных полях $X = (X^i)$, $Y = (Y^i)$ равно

$$2d\omega(X, Y) = X^i Y^j \left(\frac{\partial T_j}{\partial x^i} - \frac{\partial T_i}{\partial x^j}\right). \quad (12)$$

Формула (11) при $k=1$ примет вид

$$2d\omega(X, Y) = \partial_X \omega(Y) - \partial_Y \omega(X) - \omega([X, Y]) = \partial_X (T_i Y^i) - \\ - \partial_Y (T_i X^i) - T_i \left(X^k \frac{\partial Y^i}{\partial x_k} - Y^k \frac{\partial X^i}{\partial x^k}\right) = X^i Y^j \left(\frac{\partial T_j}{\partial x^i} - \frac{\partial T_i}{\partial x^j}\right). \quad (13)$$

Правые части формул (12) и (13) совпадают. Теорема доказана.

Как действует дифференциал на внешнее произведение двух форм? Имеет место

Теорема 5. *Пусть ω_1, ω_2 — дифференциальные формы степеней p и q соответственно. Тогда*

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2. \tag{14}$$

Доказательство достаточно провести для случая, когда формы ω_1, ω_2 — одночлены:

$$\omega_1 = f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}, \quad \omega_2 = g\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.$$

Тогда

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = fg\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^k} g\, dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q} + f \frac{\partial g}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q} = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\right) \wedge \left(g\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q}\right) + \\ &\quad + (-1)^p \left(f\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}\right) \wedge \left(\frac{\partial g}{\partial x^k} dx^k \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}\right) = \\ &= d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2, \end{aligned}$$

где мы использовали тождество

$$\begin{aligned} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q} &= \\ = (-1)^p dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^k \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В присутствии метрики g_{ij} можно определить другую важную дифференциальную операцию на формах, понижающую ранг формы на единицу и обозначаемую через δ (дивергенция кососимметрического тензора):

$$\delta = *^{-1} d *. \tag{15}$$

Явные формулы для оператора δ будут получены в § 29. Операция δ инвариантна относительно замен с положительным якобианом.

Перейдем к примерам. Рассмотрим трехмерное евклидово пространство.

1. Для скалярного поля $f(x)$ дифференциал df представляет собой ковектор. Отождествляя верхние и нижние индексы, получим вектор $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$.

2. Пусть $\omega = T_1 dx^1 + T_2 dx^2 + T_3 dx^3$. Тогда

$$d\omega = \left(\frac{\partial T_2}{\partial x^1} - \frac{\partial T_1}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 + \\ + \left(\frac{\partial T_3}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^3}\right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial T_1}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^1}\right) dx^3 \wedge dx^1$$

— форма ранга 2. Используя оператор $*$, по форме $d\omega$ можно построить ковектор (1-форму) $* d\omega$ (см. § 19, п. 3):

$$*d\omega = \left(\frac{\partial T_3}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^3}\right) dx^1 + \left(\frac{\partial T_1}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^1}\right) dx^2 + \left(\frac{\partial T_2}{\partial x^1} - \frac{\partial T_1}{\partial x^2}\right) dx^3. \quad (16)$$

Если отождествить векторы и ковекторы, то эта операция превратится в переход от вектора T к вектору $*dT = \operatorname{rot} T$ — ротору векторного поля.

3. Пусть опять $\omega = T_1 dx^1 + T_2 dx^2 + T_3 dx^3$. Вычислим форму $\delta\omega = *^{-1} d * \omega$. Это — форма нулевого ранга (т. е. скаляр), так как δ понижает ранг на 1. Имеем

$$\omega = T_1\, dx^1 + T_2\, dx^2 + T_3\, dx^3 \xrightarrow{*} \\ \xrightarrow{*} T_1 dx^2 \wedge dx^3 + T_2 dx^3 \wedge dx^1 + T_3 dx^1 \wedge dx^2 \xrightarrow{d} \\ \xrightarrow{d} \left(\frac{\partial T_1}{\partial x^1} + \frac{\partial T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial T_3}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \xrightarrow{*^{-1}} \frac{\partial T_1}{\partial x^1} + \frac{\partial T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial T_3}{\partial x^3}.$$

Вывод.

$$\delta(T) = \operatorname{div} T = \frac{\partial T_1}{\partial x^1} + \frac{\partial T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial T_3}{\partial x^3}. \quad (17)$$

Эта формула для дивергенции справедлива лишь в евклидовых координатах.

4. Рассмотрим четырехмерное пространство-время с координатами $x^0 = ct$, x^1, x^2, x^3 (c — скорость света) и псевдоевклидовой метрикой

$$dl^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

или

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Напомним (см. § 21), что электромагнитное поле является кососимметрическим тензором F_{ij} 2-го ранга, где $i, j = 0, 1, 2, 3$. Из теории электромагнитного поля известно, что тензор F_{ij} должен удовлетворять уравнениям Максвелла. Первая система, или, как

говорят, *первая пара* уравнений Максвелла имеет вид

$$(dF)_{ijk} = \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} = 0, \tag{18}$$

или, короче, $dF = 0$, где $F = \sum_{i<j} F_{ij} dx^i \wedge dx^j$. По-другому эти уравнения можно записать, используя введенные в § 21 обозначения $\mathbf{E} = (E_\alpha)$, $E_\alpha = F_{0\alpha}$; $\mathbf{H} = (H^\alpha)$, $-H^1 = F_{23}$, $H^2 = -F_{13}$, $-H^3 = F_{12}$. Уравнение (18) с $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ примет в этих обозначениях вид

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial F_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} = 0, \quad \text{или} \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{19}$$

а остальные уравнения вместе означают, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x^0} = 0, \quad \text{или} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{20}$$

Таким образом, система (18) эквивалентна системе двух уравнений: скалярного уравнения (19) и векторного уравнения (20), по этой причине и говорят: пара уравнений. Эти уравнения никак не связаны с наличием псевдоевклидовой метрики.

Вторая пара уравнений Максвелла для своего написания уже требует псевдоевклидовой метрики. Ее суммарный вид таков:

$$\delta F = *d*F = \frac{-4\pi}{c} j_{(4)}. \tag{21}$$

Здесь $j_{(4)}$ — четырехмерный (ко)вектор тока, $j_{(4)} = (\rho c, -\rho v^1, -\rho v^2, -\rho v^3) = (\rho, -\mathbf{j})$, где ρ — плотность электрического заряда в трехмерном пространстве, $v = (v^1, v^2, v^3)$ — обычная скорость зарядов в трехмерном пространстве. Формулы для оператора $*$ в псевдоевклидовых координатах, полученные в § 21, позволяют переписать уравнение (21) в виде системы («пары»)

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{22}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{23}$$

снова составленной из одного скалярного и одного векторного уравнения.

Задачи. 1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — линейно независимые в каждой точке n-мерной области векторные поля, $\omega^1, \ldots, \omega^n$ — дуальный базис 1-форм: $\omega^i(X_i) = \delta^i_j$. Доказать, что

$$d\omega^k = -\frac{1}{2} c^k_{ij} \omega^i \wedge \omega^j,$$

где величины c^k_{ij} определены равенством

$$[X_i, X_j] = c^k_{ij} X_k.$$

2. Доказать, что для гладкого отображения F и любой формулы ω справедливо равенство $F^*(d\omega) = dF^*(\omega)$ (см. § 22). Вывести отсюда, что $L_\xi(d\omega) = d(L_\xi\omega)$.

3. Для каждого векторного поля $X = (X^j)$ введем линейный оператор $i(X)$ на формах, полагая

$$[i(X)\omega]_{j_1 \ldots j_{k-1}} = X^j \omega_{jj_1 \ldots j_{k-1}};$$

здесь $\omega = (\omega_{j_1 \ldots j_k})$ — форма степени k.

а) Доказать, что $i(X)$ — антидифференцирование:

$$i(X)(\omega_1 \wedge \omega_2) = (i(X)\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge i(X)\omega_2,$$

где ω_1 — форма степени k.

б) Доказать формулу

$$i(X)d + di(X) = L_X,$$

L_X — производная Ли вдоль поля X.

§ 26. Кососимметрические тензоры и теория интегрирования

1. Интегрирование дифференциальных форм. Если в области U n-мерного пространства задана функция $f(z^1, \ldots, z^n)$, то определен интеграл функций f по области U:

$$\int \ldots \int f(z)\, dz^1 \ldots dz^n = \int \underset{U}{\ldots} \int f(z)\, dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^n. \qquad (1)$$

При этом, если задана замена координат

$$z = z(y), \qquad (2)$$

то имеет место формула замены переменных

$$\int \underset{U}{\ldots} \int f(z)\, dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^n = \int \underset{V}{\ldots} \int Jf(z(y))\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n, \qquad (3)$$

где $J = \det\left(\frac{\partial z^i}{\partial y^j}\right)$ — якобиан, а V — прежняя область U, но записанная в координатах $y^1, \ldots, y^n$.

В этом параграфе мы будем рассматривать только замены переменных с положительным якобианом.

Заметим, что подынтегральное выражение является кососимметрическим тензором ранга n. В системе координат $z^1, \ldots, z^n$ компонента $T_{1\ldots n}$ этого тензора по определению равна $f(z) = T_{1\ldots n}$. Вспомним, что кососимметрические тензоры ранга n в n-мерном пространстве при замене координат $z = z(y)$ преобразуются по формуле $T'_{1\ldots n} = J \cdot T_{1\ldots n}$, где $J = \det\left(\frac{\partial z^i}{\partial y^j}\right)$. Таким образом, $T'_{1\ldots n} = Jf(z)$, что согласуется с формулой (3). Итак, подынтегральное выражение — это кососимметрический тензор.