2. Доказать, что для гладкого отображения F и любой формулы ω справедливо равенство $F^*(d\omega)=dF^*(\omega)$ (см. § 22). Вывести отсюда, что $L_\xi(d\omega)=d(L_\xi\omega)$.

3. Для каждого векторного поля $X=(X^j)$ введем линейный оператор $i(X)$ на формах, полагая

$$[i(X)\omega]_{j_1\ldots j_{k-1}}=X^j\omega_{jj_1\ldots j_{k-1}};$$

здесь $\omega=(\omega_{j_1\ldots j_k})$ — форма степени k.

а) Доказать, что $i(X)$ — антидифференцирование:

$$i(X)(\omega_1\wedge\omega_2)=(i(X)\omega_1)\wedge\omega_2+(-1)^k\omega_1\wedge i(X)\omega_2,$$

где ω_1 — форма степени k.

б) Доказать формулу

$$i(X)d+di(X)=L_X,$$

L_X — производная Ли вдоль поля X.

§ 26. Кососимметрические тензоры и теория интегрирования

1. Интегрирование дифференциальных форм. Если в области U n-мерного пространства задана функция $f(z^1,\ldots,z^n)$, то определен интеграл функций f по области U:

$$\int\ldots\int f(z)\,dz^1\ldots dz^n=\int\underset{U}{\ldots}\int f(z)\,dz^1\wedge\ldots\wedge dz^n. \qquad (1)$$

При этом, если задана замена координат

$$z=z(y), \qquad (2)$$

то имеет место формула замены переменных

$$\int\underset{U}{\ldots}\int f(z)\,dz^1\wedge\ldots\wedge dz^n=\int\underset{V}{\ldots}\int Jf(z(y))\,dy^1\wedge\ldots\wedge dy^n, \qquad (3)$$

где $J=\det\left(\frac{\partial z^i}{\partial y^j}\right)$ — якобиан, а V — прежняя область U, но записанная в координатах $y^1,\ldots,y^n$.

В этом параграфе мы будем рассматривать только замены переменных с положительным якобианом.

Заметим, что подынтегральное выражение является кососимметрическим тензором ранга n. В системе координат $z^1,\ldots,z^n$ компонента $T_{1\ldots n}$ этого тензора по определению равна $f(z)=T_{1\ldots n}$. Вспомним, что кососимметрические тензоры ранга n в n-мерном пространстве при замене координат $z=z(y)$ преобразуются по формуле $T'_{1\ldots n}=J\cdot T_{1\ldots n}$, где $J=\det\left(\frac{\partial z^i}{\partial y^j}\right)$. Таким образом, $T'_{1\ldots n}=Jf(z)$, что согласуется с формулой (3). Итак, подынтегральное выражение — это кососимметрический тензор.

Пример. Если задана риманова метрика (g_{ij}), то детерминант $g = \det(g_{ij})$ при заменах $z = z(y)$ ведет себя так:

$$g' = \det(g'_{ij}) = \det\left(g_{kl}\frac{\partial z^k}{\partial y^i}\frac{\partial z^l}{\partial y^j}\right) = J^2 g. \tag{4}$$

Поэтому выражение $\sqrt{g}$ при заменах координат с положительным якобианом ведет себя как кососимметрический тензор. Напомним, что площадь области на поверхности определялась так (§ 7, п. 4):

$$\sigma(U) = \iint\limits_U \sqrt{g}\,du\,dv; \quad u = z^1, \quad v = z^2, \quad n = 2; \tag{5}$$

мы видим теперь, что интеграл в правой части формулы не зависит от выбора координат.

Если в пространстве (x^1, x^2, x^3) с евклидовыми координатами задана поверхность $x^i = x^i(z)$, $i = 1, 2, 3$, и если мы хотим проинтегрировать по поверхности какую-нибудь скалярную функцию $f(x(z))$, определение которой существенно связано с этой поверхностью (например, ее гауссову кривизну), то этот интеграл определяется так: интеграл по области U на поверхности равен

$$\iint\limits_U f(x(z))\sqrt{g}\,dz^1 \wedge dz^2, \tag{6}$$

где $\iint\limits_U \varphi(z)\,dz^1 \wedge dz^2$ — обычный кратный интеграл. Иногда выражение $\sqrt{g}\,dz^1 \wedge dz^2$ называют мерой (элементом объема) на поверхности.

Итак, мы приходим к выводам:

1) В n-мерном пространстве для любой ограниченной области U определен интеграл $\int \underset{U}{\ldots} \int T$, где T — кососимметрический тензор типа $(0, n)$, $T = (T_{i_1 \ldots i_n})$.

2) В координатной записи этот тензор записывается так:

$$T = T_{1\ldots n} dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^n$$

(или $T_{1\ldots n} dz^1 \ldots dz^n$, если не писать значка $\wedge$).

3) $T_{1\ldots n} = f(z)$ есть скалярная функция точки, но при заменах координат $z = z(y)$ имеем

$$\int \underset{U}{\ldots} \int f(z)\,dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^n = \int \underset{V}{\ldots} \int Jf(z)\,dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n.$$

4) Если мы хотим интегрировать по пространству функцию $\varphi(z)$, то необходимо иметь заданный и отмеченный кососимметрический тензор T в пространстве (называемый элементом объема или мерой).

Тогда интегралом от функции $\varphi(z)$ по определению является интеграл от тензора $\varphi(z)T$:

$$\int_U \dots \int \varphi(z)\,T = \int_U \dots \int \varphi(z)\,T_{1\dots n}dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n. \qquad (7)$$

5) В случае, если фиксирована метрика (g_{ij}), такой отмеченный кососимметрический тензор $T = T_{1\dots n}dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n$ (относительно замен с положительным якобианом) задается в виде

$$T = d\sigma = \sqrt{|g|}\,dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n.$$

При этом интеграл от функции $\varphi(z)$ определяется как

$$\int_U \dots \int \varphi(z)\,T = \int_U \dots \int \varphi(z)\sqrt{|g|}\,dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n.$$

6) Значок $\wedge$ означает, что $dz^i \wedge dz^j = -dz^j \wedge dz^i$. При заменах переменных $z^i = z^i(y)$, ввиду равенств $dz^i = \frac{\partial z^i}{\partial y^j}dy^j$ и $dy^i \wedge dy^j = -dy^j \wedge dy^i$, получаем

$$dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_k} = \sum_{j_1<\dots<j_k} J^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_k}dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_k}, \qquad (8)$$

где $J^{(i)}_{(j)}$ — минор матрицы Якоби $\frac{\partial z^i}{\partial y^j}$. В частности, при $k = n$ имеем

$$dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n = J\,dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n, \qquad (9)$$

где J — якобиан.

7) В евклидовых координатах имеем $\sqrt{|g|} \equiv 1$, и поэтому $d\sigma = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Необходимо различать два выражения:

а) «интеграл от кососимметрического тензора ранга n по области» — этот интеграл имеет смысл всегда («интеграл II рода»);

б) «интеграл I рода от функции по области»: для вычисления этого интеграла надо знать, по какому элементу объема (мере) ведется интегрирование; надо функцию умножить на этот элемент объема (кососимметрический тензор) и лишь затем проинтегрировать. Очевидно, этот интеграл сводится к первому.

Перейдем теперь к произвольным кососимметрическим тензорам ранга k типа $(0, k)$ в n-мерном пространстве. Рассмотрим сначала тензор T_j типа $(0, 1)$ (ковектор) в n-мерном пространстве. В § 18 каждому ковектору T_j мы поставили в соответствие дифференциальную форму $\omega = T_j dz^j$ первой степени.

С чем связано название «дифференциальная форма»? Оказывается, выражение $T_j dz^j$ можно проинтегрировать по любой кривой $z^i = z^i(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Действительно, рассмотрим выражение

$$\int_a^b T_j \dot{z}^j dt = \int_a^b T_j \xi^j dt, \qquad (10)$$

где $\xi^j = \dot{z}^j = \frac{dz^j}{dt}$ — вектор скорости.

Это выражение называется интегралом дифференциальной формы по кривой (в анализе — «интеграл 2-го рода»).

Другое дело, когда задана кривая $z^i = z^i(t)$ и некоторая скалярная функция $f(z(t))$, существенно связанная именно с этой кривой,— например, ее кривизна или кручение. Тогда вводится мера на кривой — элемент длины $dl = |\dot{z}|dt$, и интегралом от функции $f(z(t))$ вдоль кривой называется выражение $\int_a^b f(z(t))\,dl$ (в анализе это «интеграл 1-го рода»). В сущности элемент длины на кривой $dl = |\dot{z}|dt$ — это одномерный вариант общего «элемента объема» $d\sigma = \sqrt{|g|}\,dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^n$, вводившегося ранее, так как для $n = 1$ $|g| = |g_{11}|$ и $\sqrt{|g_{11}|}dt = dl$, где $g_{11} = |\dot{z}|^2$, $t = z^1$.

Что же касается интеграла 2-го рода — интеграла от ковекторного поля (дифференциальной формы) по любой кривой,— то этот интеграл обладает следующими свойствами: 1) он не зависит от того, как на кривой введен параметр:

$$\int_a^b T_\alpha \frac{dz^\alpha}{dt}\,dt = \int_{a'}^{b'} T_\alpha \frac{dz^\alpha}{d\tau}\,d\tau, \tag{11}$$

где $t = t(\tau)$ и τ меняется от a' до b', когда t меняется от a до b; 2) результат интегрирования не зависит также и от координат в пространстве: если $z = z(y)$ и $T'_\beta = T_\alpha \dfrac{\partial z^\alpha}{\partial y^\beta}$, причем $z^\alpha(t) = z^\alpha(y(t))$, то имеет место равенство

$$\int_a^b T_\alpha \frac{dz^\alpha}{dt}\,dt = \int_a^b T'_\beta \frac{dy^\beta}{dt}\,dt. \tag{12}$$

В самом деле, $T_\alpha dz^\alpha \equiv T'_\beta dy^\beta$ и оба интеграла берутся вдоль одной и той же кривой $z^\alpha = z^\alpha(t)$ или $y^\beta = y^\beta(t)$, где $z(t) = z(y(t))$; поэтому они совпадают.

Таким образом, мы уже определили интегрирование кососимметрического тензора ранга n по (n-мерной) области в n-мерном пространстве и интегрирование ковекторного поля по любой кривой.

Оказывается, кососимметрические тензоры ранга k (типа $(0, k)$) интегрируются по k-мерным поверхностям в n-мерном пространстве. Пусть k-мерная поверхность задана параметрически,

$$x^i = x^i(z^1, \ldots, z^k), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{13}$$

и пусть задана область U в k-мерном пространстве с координатами $z^1, \ldots, z^k$.

Как вводится интеграл от кососимметрического тензора $T = (T_{i_1 \ldots i_k})$ в n-мерном пространстве с координатами $x^1, \ldots, x^n$

по области U в k-мерном пространстве с координатами $z^1, \ldots, z^k$, если задано вложение (поверхность) $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^k)$?

Мы будем в целях удобства использовать для кососимметрических тензоров язык дифференциальных форм.

В § 22 п. 1 было определено ограничение кососимметрического тензора $T_{i_1 \ldots i_k}$ на поверхность $x = x(z)$. Это уже тензор ранга k в k-мерном пространстве (на поверхности).

Определение 1. Обычный кратный интеграл по области от ограничения тензора $(T_{i_1 \ldots i_k}) = T$ на поверхность называется интегралом от кососимметрического тензора $(T_{i_1 \ldots i_k}) = T$, заданного в n-мерном пространстве, по области U на этой поверхности $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^k)$, $i = 1, \ldots, n$. Он имеет вид

$$\int \underset{U}{\ldots} \int T = \int \underset{U}{\ldots} \int \left(\sum_{i_1 < \ldots < i_k} T_{i_1 \ldots i_k} J^{i_1 \ldots i_k}_{1 \ldots k} \right) dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^k. \quad (14)$$

Напомним, что выражение $\sum\limits_{i_1 < \ldots < i_k} T_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ называется дифференциальной формой степени k; мы уже знаем, что это просто вид записи кососимметрических тензоров типа $(0, k)$. Этот интеграл от формы (тензора) по области на поверхности обладает двумя свойствами:

1) Этот интеграл не меняется при замене переменных на поверхности $z^q = z^q(z')$, $q = 1, \ldots, k$. В самом деле, ограничение

$$\left(\sum_{i_1 < \ldots < i_k} T_{i_1 \ldots i_k} J^{i_1 \ldots i_k}_{1 \ldots k} \right) dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^k$$

является тензором ранга k в k-мерном пространстве $z^1, \ldots, z^k$; при замене переменных $z^q = z^q(z'^1, \ldots, z'^k)$ произойдет обычная замена переменных в кратном интеграле по области U в k-мерном пространстве.

2) Этот интеграл не меняется при замене координат $x^i = x^i(x'^1, \ldots, x'^n)$ в самом n-мерном пространстве. Это немедленно следует, как и для $k = 1$, из того, что при замене $x = x(x')$ имеет место тождество

$$\sum_{i_1 < \ldots < i_k} T_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \equiv$$
$$\equiv \sum_{j_1 < \ldots < j_k} T'_{j_1 \ldots j_k} dx'^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx'^{j_k}, \quad (15)$$

где $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} dx'^j$ и компоненты $T'_{j_1 \ldots j_k}$ получаются из $T_{i_1 \ldots i_k}$ по обычному тензорному закону. В евклидовом пространстве на поверхности $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^k)$, $i = 1, \ldots, n$, определяется риманова метрика: если $x^1, \ldots, x^n$ — евклидовы координаты, то $g_{ij} dz^i dz^j =$

$= \sum_{q=1}^{n} (dx^q)^2$, где $dx^q = \frac{\partial x^q}{\partial x^\alpha} dz^\alpha$ (см. § 7); при этом $g_{ij} = g_{ji}$ и $dz^i dz^j = dz^j dz^i$.

Элемент объема на поверхности задается, как всегда, в виде

$$d\sigma = \sqrt{|g|}\, dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^k; \quad g = \det(g_{ij}). \tag{16}$$

Пусть задана какая-либо функция $f(z^1, \ldots, z^k)$ на поверхности.

Определение 2. Интегралом (I рода) от функции $f(z^1, \ldots, z^k)$ по поверхности называется интеграл от функции по элементу объема $d\sigma$ на поверхности:

$$\text{интеграл I рода} = \underset{\text{(на поверхности)}}{\int \underset{U}{\ldots} \int} f(z^1, \ldots, z^k) \sqrt{|g|}\, dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^k.$$

Важно отметить, что интеграл II рода не связан с римановой геометрией в пространстве и на поверхности, а интеграл I рода связан с ней через элемент объема $\sqrt{|g|}\, dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^k$, который является кососимметрическим тензором ранга k (относительно замен с положительным якобианом), определенным лишь на данной поверхности по ее римановой метрике, сама же эта риманова метрика поверхности определяется по евклидовой метрике во всем пространстве.

2. Примеры дифференциальных форм. Пример 0. Тривиальным примером «интеграла» от тензора 0-го ранга — скаляра $f(z)$ — по поверхности размерности 0 (точке P) является по определению значение функции $f(x)$ в этой точке P: «интеграл» $= f(P)$. Это тривиальное замечание сделано намеренно — оно будет полезно при обсуждении общей формулы Стокса.

Пример 1. Интеграл ковекторного поля или дифференциальной формы степени 1 $(T_\alpha) = T_\alpha dx^\alpha$ по кривой $x^i = x^i(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, обсуждался в предыдущем пункте.

$$\text{Интеграл (II рода) по кривой} = \int_a^b T_\alpha \frac{dx^\alpha}{dt}\, dt. \tag{17}$$

Пример 2. Интеграл от тензорного поля $(T_{ij}) = \sum_{i<j} T_{ij} dx^i \wedge dx^j$ (дифференциальной формы степени 2) по поверхности $x^i = x^i(z^1, z^2)$, $i = 1, \ldots, n$, имеет следующий вид:

$$\text{интеграл по поверхности} = \underset{\text{(на поверхности)}}{\iint_U} \sum_{i<j} T_{ij} dx^i \wedge dx^j, \tag{18}$$

где $T_{ij} = T_{ij}(x(z))$ и $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^j} dz^j$, $dz^i \wedge dz^j = -dz^j \wedge dz^i$. В трехмерном пространстве ($n=3$) и евклидовых координатах x^1, x^2, x^3, в которых $(dl)^2=\sum(dx^i)^2$, эти интегралы обычно записывают так:

1) интеграл по кривой от ковекторного поля

$$\int_a^b T^\alpha \frac{dz^\alpha}{dt}\,dt=\int_P^Q T\xi dt, \tag{19}$$

где $\xi=\dot z$, $T=(T_\alpha)=(T^\alpha)$ (вектор и ковектор в евклидовых координатах — совпадающие понятия, и это инвариантно относительно вращений), $P=(z^1(a),\ z^2(a),\ z^3(a))$, $Q=(z^1(b),\ z^2(b),\ z^3(b))$, $a\leqslant t\leqslant b$, $T\xi=\langle T,\ \xi\rangle$ — скалярное произведение;

2) интеграл по поверхности («поток») от кососимметрического тензорного поля типа (0, 2) (или формы степени 2)

$$\iint_U\sum_{i<j}T_{ij}dx^i\wedge dx^j=\iint_U\sum_{i<j}T_{ij}(x(z))\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^p}dz^p\right)\wedge\left(\frac{\partial x^j}{\partial z^q}dz^q\right)=$$

$$=\iint_U\left[\sum_{i<j}T_{ij}\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^1}\frac{\partial x^j}{\partial z^2}-\frac{\partial x^j}{\partial z^1}\frac{\partial x^i}{\partial z^2}\right)\right]dz^1\wedge dz^2.$$

Заметим, что $\dfrac{\partial x^i}{\partial z^1}\dfrac{\partial x^j}{\partial z^2}-\dfrac{\partial x^j}{\partial z^1}\dfrac{\partial x^i}{\partial z^2}=J^{ij}_{12}$ — минор матрицы Якоби $\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial z^q}\right)$, $i=1,\ 2,\ 3$; $q=1,\ 2$. Поэтому окончательно получаем

$$\iint_U\sum_{i<j}T_{ij}dx^i\wedge dx^j=\iint_U\left[\sum_{i<j}T_{ij}J^{ij}_{12}\right]dz^1\wedge dz^2. \tag{20}$$

В трехмерном евклидовом пространстве с евклидовыми координатами x^1, x^2, x^3 для поверхности $x^i=x^i(z^1,\ z^2)$ определены базисные касательные векторы в каждой точке поверхности:

$$\xi=(\xi^i)=\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^1}\right)=\frac{\partial x^i}{\partial z^1}e_i,\qquad \eta=(\eta^i)=\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial x^i}{\partial z^2}e_i;$$

их векторное произведение $[\xi,\eta]$ нормально к поверхности. Векторное произведение — это в сущности тензор $T^{ij}=(\xi^i\eta^j-\xi^j\eta^i)$, которому сопоставляется «вектор»:

$$T^1=T^{23},\quad T^2=-T^{13},\quad T^3=T^{12};\quad T=(T^1,\ T^2,\ T^3).$$

При этом, очевидно, $T^{ij}=J^{ij}_{12}$.

Вектор $[\xi,\ \eta]$ нормален к поверхности. Его длина равна $\sqrt{g}$, где $g=\det(g_{ij})$,

$$g_{ij}dz^idz^j=\sum_{i=1}^3(dx^i)^2;\quad dx^i=\frac{\partial x^i}{\partial z^j}dz^j$$

(см. § 7). Поэтому интеграл по области U на поверхности $x^i = x^i(z^1, z^2)$ в евклидовом пространстве и в евклидовых координатах (x^1, x^2, x^3) приводится к виду

$$\iint\limits_U \sum_{i<j} T_{ij} dx^i \wedge dx^j = \iint\limits_U \left(\sum_{i<j} T_{ij} J^{ij}_{12}\right) dz^1 \wedge dz^2 =$$
$$= \iint\limits_U \langle T, [\xi, \eta]\rangle\, dz^1 \wedge dz^2 = \iint\limits_U \langle T, n\rangle \sqrt{g}\, dz^1 \wedge dz^2,$$

где n — единичный вектор нормали,

$$n = \frac{[\xi, \eta]}{|[\xi, \eta]|} = \frac{[\xi, \eta]}{\sqrt{g}}.$$

Замечание. В четырехмерном пространстве $(n = 4)$ интегралы от форм степени 2 по поверхностям $(k = 2)$ не могут быть сведены к операциям над одними векторами даже и в евклидовом пространстве.

Что же касается трехмерного случая, то нами доказана

Теорема 1. *В евклидовом трехмерном пространстве интеграл от форм степени 2 по поверхностям совпадает с интегралом I рода следующего вида*:

$$\iint\limits_U \sum_{i<j} T_{ij} dx^i \wedge dx^j = \iint\limits_U \langle T, n\rangle \sqrt{g}\, dz^1 \wedge dz^2, \tag{21}$$

где U — область на поверхности, заданной в евклидовых координатах (x_1, x_2, x_3) в виде $x^i = x^i(z^1, z^2)$, $i = 1, 2, 3$, n — единичный вектор нормали к поверхности, T — вектор, сопоставленный в евклидовых координатах (x^1, x^2, x^3) тензору (T_{ij}), $g_{ij} dz^i dz^j = \sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2$

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^j} dz^j.$$

В трехмерном случае в евклидовых координатах (x^1, x^2, x^3) ввиду связи между кососимметрическими тензорами (формами) типа (0, 2) и векторами, а также ввиду связи между векторами и ковекторами говорят обычно об интегралах от векторного поля $T_\alpha = T^\alpha$

а) по замкнутой кривой: $\oint\limits_\Gamma T_\alpha dx^\alpha$;

б) по замкнутой поверхности: $\iint\limits_U \langle T, n\rangle \sqrt{g}\, dz^1 \wedge dz^2$, где n — единичная нормаль к поверхности.

Напомним два определения из анализа:

1) Если кривая Γ является замкнутой (т. е. Γ имеет вид $x^i(t)$, где $a \leqslant t \leqslant b$, $x^i(a) = x^i(b)$, $i = 1, 2, 3$), то интеграл от ковектор-

ного поля

$$\oint_{\Gamma} T_\alpha \dot{x}^\alpha dt$$

называют *циркуляцией поля* вдоль кривой Г.

2) Если поверхность $U=\{f(x^1, x^2, x^3)=\text{const}\}$ является замкнутой в том смысле, что она является границей области $f(x^1, x^2, x^3)\leqslant 0$, которая ограничена в пространстве, то интеграл

$$\int\int_U \sum_{i<j} T_{ij} dx^i \wedge dx^j$$

называется *полным потоком* через поверхность тензорного поля $(T_{ij})=-(T_{ji})$ или, в евклидовом случае, потоком векторного поля $T=(T^1, T^2, T^3)$ через эту поверхность; $T^1=T_{23}$, $T^2=-T_{13}$, $T^3=T_{12}$, если x^1, x^2, x^3 — евклидовы координаты.

Возможно, что поверхность в целом нельзя задать параметрически в виде $x^i=x^i(z^1, z^2)$, если она задана уравнением $f(x^1, x^2, x^3)=C$. Однако это можно сделать около каждой неособой точки (см. § 7). Интеграл не зависит от выбора координат на поверхности. Поэтому при вычислении интеграла по всей поверхности нужно разбить ее на куски так, чтобы каждый кусок по отдельности был представлен параметрически; затем надо взять сумму интегралов по кускам. Например, сферу $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=1$ можно разбить на два таких куска — верхнюю и нижнюю полусферы.

Пример 3. Пусть в n-мерном евклидовом пространстве задана гиперповерхность M^{n-1}:

$$F(x^1, \ldots, x^n)=0, \quad \operatorname{grad} F\neq 0, \tag{22}$$

или локально $x^\alpha=x^\alpha(y^1, \ldots, y^{n-1})$. Здесь $x^1, \ldots, x^n$ — евклидовы координаты. Определена «форма кривизны»

$$K d\sigma = K\sqrt{g}\, dy^1\wedge \ldots \wedge dy^{n-1}, \tag{23}$$

где K — кривизна (для $n=2$ это — кривизна кривой на плоскости, для $n=3$ это — гауссова кривизна, для случая $n>3$ мы определения не приводим, поскольку этот случай для нас не важен).

Рассмотрим сферу S^{n-1}, задаваемую уравнением $\sum(x^\alpha)^2=1$. На сфере определен вращательно инвариантный элемент $(n-1)$-мерного объема Ω_{n-1}, который для $n=2, 3$ имеет вид

$$\begin{aligned} n&=2, \quad \Omega_{n-1}=d\varphi,\\ n&=3, \quad \Omega_{n-1}=\sin\theta\, d\theta\, d\varphi. \end{aligned} \tag{24}$$

Определим гауссово сферическое отображение поверхности M^{n-1} в сферу S^{n-1} следующим образом: рассмотрим в точке P

поверхности M^{n-1} единичную нормаль n_P к поверхности и перенесем этот вектор n_P в начало координат. Конец вектора n_P — это точка сферы S^{n-1}. Соответствие $P \mapsto n_P$ определяет гауссово отображение

$$\psi\colon M^{n-1} \to S^{n-1} \tag{25}$$

(точка P переходит в конец вектора n_P, исходящего из начала координат).

Теорема 2. *Верна следующая формула:*

$$K\,d\sigma = \psi^*(\Omega_{n-1}),$$

$$\begin{cases} K\,dl = \psi^*(d\varphi) & \text{при} \quad n = 2, \\ K\sqrt{g}\,dy^1 \wedge dy^2 = \psi^*(\Omega), & \text{где} \quad \Omega = \sin\theta\,d\theta\,d\varphi \quad \text{при} \quad n = 3, \end{cases}$$

где $d\sigma = \sqrt{g}\,dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^{n-1}$ — элемент $(n-1)$-мерного объема в локальных координатах $y^1, \ldots, y^{n-1}$ на поверхности.

(Операция ψ^* на тензорах типа $(0, k)$ определена в § 22.)

Доказательство. Доказательство одинаково для всех $n \geqslant 2$. Мы проведем его для $n = 3$. Выберем в $\mathbb{R}^3$ евклидовы координаты с началом P так, чтобы ось $z = x^3$ была ортогональна к поверхности в точке P, а оси $x = x^1$ и $y = x^2$ были касательны к поверхности. Тогда $y^1 = x$, $y^2 = y$, и поверхность задается около точки P уравнением $z = f(x, y)$ с $df|_P = 0$. Далее, $K = \det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}$, $g_{ij} = \delta_{ij}$ в точке $P (f_x = f_y = 0)$. На сфере $S^{n-1} = S^2$ выберем такие же координаты по отношению к точке $\psi(P) = Q$, так что ось $\bar z$ ортогональна S^2, а оси $\bar x$ и $\bar y$ касаются S^2; форма $\Omega = \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ имеет в точке Q вид $\Omega = d\bar x \wedge d\bar y$, а сфера задается около точки Q уравнением $\bar z = \sqrt{1 - \bar x^2 - \bar y^2}$; метрика сферы в точке Q имеет вид $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Координаты нормального вектора в точке P' около точки P имеют вид

$$\left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad \frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad \frac{-1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)$$

(причем $f_x = f_y = 0$ в точке P). Поэтому около точки P гауссово отображение ψ записывается в виде

$$\bar x = \frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \quad \bar y = \frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \tag{26}$$

(точка P' с координатами x, y переходит в точку Q' с координатами $\bar x, \bar y$).

По определению формы $\psi^*(\Omega)$ (см. § 22) имеем

$$\psi^*(\Omega)|_P = \left(\frac{\partial \bar x}{\partial x}\frac{\partial \bar y}{\partial y} - \frac{\partial \bar x}{\partial y}\frac{\partial \bar y}{\partial x}\right)\bigg|_P dx \wedge dy = J\,dx \wedge dy, \tag{27}$$

где J — якобиан отображения ψ в точке P. Так как $f_x = f_y = 0$ в точке P, то, очевидно, $J = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx} = K$ (гауссова кривизна). Так как модуль $|g|$ в точке P равен 1, то окончательно в выбранной системе координат (в точке P) верна формула

$$K\sqrt{|g|}\,dx \wedge dy = \psi^*(\Omega_{n-1}), \quad n = 3. \tag{28}$$

Теорема доказана для $n = 3$. Для всех остальных n доказательство полностью аналогично.

Замечание. При $n = 2$ имеем $\Omega = d\varphi$ и форма $K\sqrt{|g|}\,d\varphi$ для кривой $x^1 = x^1(y)$, $x^2 = x^2(y)$ имеет вид $K\sqrt{|g|}\,dy = K\,dl$, где dl — элемент длины (натуральный параметр).

3. Общая формула Стокса. Примеры. Как было отмечено в предыдущем пункте, определение интеграла от формы степени k по k-мерной поверхности в n-мерном пространстве не обязательно требует параметризации этой поверхности целиком в виде $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^k)$. Так как интеграл инвариантен относительно замен координат в пространстве и на поверхности и так как интеграл по сумме областей равен сумме интегралов, то можно разбить поверхность на несколько кусков, а затем на каждом куске можно отдельно ввести координаты. После этого, проинтегрировав по каждому куску, надо сложить результаты и получить интеграл по поверхности.

Другое замечание состоит в том, что часто на поверхностях можно ввести такие глобальные координаты $z^1, \ldots, z^k$, которые имеют особые точки (см. гл. 1 и 2) на множестве меньшей размерности, интеграл от формы степени k по которому не даст никакого вклада. Такими координатами часто пользуются в теории интегрирования. Например, такими являются полярные координаты (r, φ) на плоскости (особая точка $r = 0$) цилиндрические и сферические координаты в пространстве: (r, φ, z) — цилиндрические (особые точки составляют прямую $r = 0$), (r, θ, φ) — сферические (особые точки заполняют ту же прямую и отвечают значениям координат $r = 0$, $\theta = 0$, $\theta = \pi$). На сфере имеются координаты (θ, φ) с особыми точками $\theta = 0$, $\theta = \pi$. Сфера — это простейшая поверхность, на которой в принципе нельзя ввести координат (единой системы) без особых точек. Во всех этих примерах множество особых точек координатных систем было малым и оно не давало вклада в интегралы. Поэтому мы его «не замечали». Из анализа известно о существовании связи между интегралами по поверхности и по ее границе (формулы Грина для $n = 2$, Гаусса — Остроградского для $n = 3$, $k = 3$ и Стокса для $n = 3$, $k = 2$). Мы рассмотрим сейчас эти формулы с точки зрения теории кососимметрических тензоров (дифференциальных форм).

Ввиду аддитивности интеграла достаточно знать основные определения для кусков поверхности. Пусть задана область U в k-мерном пространстве $z^1, \ldots, z^k$ с помощью неравенства

$f(z^1, \ldots, z^k) \leqslant C$, и пусть Γ — это ее граница, определенная уравнением $f(z^1, \ldots, z^k) = C$. Пусть также задано вложение этой области с границей в n-мерное пространство с координатами $x^1, \ldots, x^n$:

$$x^i = x^i(z^1, \ldots, z^k), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Мы получим параметрически заданную поверхность, область U на ней и ее границу Γ — поверхность размерности $k-1$.

Какова связь между интегралами по области U и по ее границе Γ от всевозможных форм соответствующей степени в n-мерном пространстве $(x^1, \ldots, x^n)$?

Наиболее простой случай — это случай $k=1$; в этом случае $x^i = x^i(t)$, $z^1 = t$ — кривая, область U — это отрезок $a \leqslant t \leqslant b$, граница Γ — это пара точек $t=a$ и $t=b$, причем (чисто формально) точка a берется со знаком $-$, а точка b со знаком $+$.

Специально упоминался тривиальный случай «интеграла» от скаляра («формы степени 0») по 0-мерной «поверхности», состоящей по определению из нескольких точек со знаками.

«Поверхность размерности 0» — это формальная сумма точек $\sum \pm P_i$, где P_i — точки пространства. «Интеграл» от функции $f(x)$ по «поверхности размерности 0» — это по определению сумма значений функции в этих точках с соответствующими знаками:

$$\text{интеграл} = \sum_i \pm f(P_i).$$

Если в пространстве задана кривая $x^i(t)$ и отрезок U на ней $(a \leqslant t \leqslant b)$ с границей $\Gamma = Q - P$, то мы знаем из анализа формулу (Ньютона — Лейбница)

$$\int_\Gamma f = f(Q) - f(P) = \int_U df = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}\,dt, \tag{29}$$

$$P = x^i(a), \quad Q = x^i(b).$$

Это — простейшая «формула Стокса», связывающая интеграл по границе с интегралом по области.

В известном смысле многомерные формулы типа Стокса являются ее прямыми обобщениями и, более того, могут быть формально сведены к этой.

Вернемся к общему случаю области U в координатах $z^1, \ldots, z^k$ на поверхности $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^k)$, $i = 1, \ldots, n$, с границей Γ, заданной уравнением $f(z^1, \ldots, z^k) = C$ (область U задается неравенством $f(z) \leqslant C$).

Если в пространстве $x^1, \ldots, x^n$ задана форма степени $k-1$ (т. е. кососимметрический тензор типа $(0, k-1)$), записанная в виде $T = \sum\limits_{i_1 < \ldots < i_{k-1}} T_{i_1 \ldots i_{k-1}} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}}$, то ее можно проинтегрировать по $(k-1)$-мерной поверхности Γ — границе области U на поверхности $x^i(z^1, \ldots, z^k)$, $i = 1, \ldots, n$.

Верна общая

Теорема 3. *Для любой дифференциальной формы*

$$T = \sum_{i_1 < \ldots < i_{k-1}} T_{i_1 \ldots i_{k-1}} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}}$$

с гладкими коэффициентами $T_{i_1 \ldots i_{k-1}}(x)$, *любой гладкой поверхности* $x^i(z^1, \ldots, z^k)$ *и ограниченной области* U *на ней с гладкой границей* Γ, *состоящей из одного куска, имеет место формула*

$$\pm \int_\Gamma T = \int_U dT. \tag{30}$$

Тривиальный вариант этой формулы для $k=1$, $k-1=0$ *был указан выше. Здесь* dT — *форма степени* k (*кососимметрический градиент тензора* $T_{i_1 \ldots i_{k-1}}$ *или дифференциал формы степени* $k-1$).

В двумерном и трехмерном случае эта формула для разных k носит имена Грина, Гаусса — Остроградского и Стокса; эти специальные случаи формулы (30) по отдельности доказываются в курсе анализа. Мы разберем эти случаи.

1. Плоский случай ($n=2$). Задана замкнутая кривая Γ на плоскости $x^i = x^i(t)$, $x^i(a) = x^i(b)$. Пусть эта кривая ограничивает область U на плоскости. Для любого (ко)векторного поля $T_\alpha dx^\alpha$ — формы степени 1 — определен интеграл по кривой Γ. Если поле $T_\alpha dx^\alpha$ определено и не имеет особенностей внутри области U, то справедлива формула

$$\int_\Gamma T_\alpha \frac{dx^\alpha}{dt} dt = \iint_U \left(\frac{\partial T_2}{\partial x^1} - \frac{\partial T_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2$$

или

$$\int_\Gamma (T_1 dx + T_2 dy) = \iint_U \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{\partial T_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \tag{31}$$

Это — формула Грина (частный случай общей формулы Стокса).

Следующее дополнение относится к случаю, когда рассматриваемая плоскость есть плоскость комплексной переменной $z = x + iy$. Пусть $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ — комплексно-значная функция. Рассмотрим интеграл

$$\oint_\Gamma f(z)\, dz = \oint (u + iv)(dx + i\, dy) = \oint_\Gamma (u\, dx - v dy) + i \oint_\Gamma (v dx + u dy).$$

Применим формулу Грина

$$-\oint_\Gamma f(z)\, dz = \iint_U \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \wedge dy + i \iint_U \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \wedge dy.$$

Получаем вывод: если всюду внутри области U функция $f(z)$

является гладкой и выполнены условия Коши — Римана (см. § 12)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{32}$$

то форма $f(z)\,dz$ является замкнутой.

Из этого факта вытекает: если n — целое неотрицательное число, то $\oint\limits_{\Gamma} z^n dz = 0$ для любого замкнутого контура Γ; если n отрицательно, то $\oint\limits_{\Gamma} z^n dz = 0$ для контура Γ, не охватывающего 0, и $\oint\limits_{\Gamma} z^n dz$ не зависит от Γ в случае, если Γ обходит 0, скажем, против часовой стрелки. Беря в качестве Γ единичную окружность $z(t) = e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, в результате простого вычисления получаем

$$\oint\limits_{\Gamma} z^n dz = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq -1, \\ 2\pi i, & \text{если } n = -1. \end{cases}$$

Это лежит в основе важной *формулы вычетов*. Именно, для равномерно сходящихся рядов $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ имеет место формула (контур Γ охватывает точку a и лежит в области равномерной сходимости ряда)

$$\begin{aligned} \oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz &= 2\pi i c_{-1}, \\ \oint\limits_{\Gamma} (z-a)^{-k} f(z)\,dz &= 2\pi i c_{k-1}. \end{aligned} \tag{33}$$

Эти формулы позволяют для аналитической функции $f(z)$ вычислить коэффициенты ее разложения в ряд Тейлора (если все степени $n \geqslant 0$) или Лорана ($-\infty < n < \infty$) через интегралы.

2. Трехмерный случай. Пусть задано трехмерное пространство с координатами x^1, x^2, x^3. Здесь следует различать два случая: $k = 2$ и $k = 3$.

а) Пусть $k = 3$, U — область и Γ — ее граница. Тогда имеет место формула

$$\iint\limits_{\Gamma} \sum_{i<j} T_{ij} dx^i \wedge dx^j = \iiint\limits_{U} \left(\frac{\partial T_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x^1} - \frac{\partial T_{13}}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \tag{34}$$

Если x^1, x^2, x^3 — евклидовы координаты, то можно определить вектор T, полагая $T^1 = T_{23}$, $T^2 = -T_{13}$, $T^3 = T_{12}$. Если, далее, n — единичный вектор нормали к поверхности, то согласно теореме 1 получаем

$$\iint_{\Gamma} \sum_{i<j} T_{ij} dz^i \wedge dx^j = \iint_{\Gamma} \langle T, n\rangle \sqrt{g}\, dz^1 \wedge dz^2, \tag{35}$$

где z^1, z^2 — координаты на поверхности, $d\sigma = \sqrt{g}\, dz^1 \wedge dz^2$ - элемент площади на ней.

Далее, $\frac{\partial T_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial T_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x^1} = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} = \operatorname{div} T$.

Окончательно получаем

$$\iint_{\Gamma} \langle T, n\rangle \sqrt{g}\, dz^1 \wedge dz^2 = \iint_{\Gamma} \langle T, n\rangle d\sigma = \iiint_{U} (\operatorname{div} T)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \tag{36}$$

Это формула Гаусса — Остроградского в трехмерном евклидовом пространстве.

б) Пусть $k=2$, U — область на поверхности $x^i = x^i(z^1, z^2)$, $i = 1, 2, 3$, Γ — граница этой области (кривая). Имеем

$$\oint_{\Gamma} T_\alpha dx^\alpha = \iint_{U} \left[\left(\frac{\partial T_2}{\partial x^1} - \frac{\partial T_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 + \left(\frac{\partial T_3}{\partial x^1} - \frac{\partial T_1}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial T_3}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 \right]. \tag{37}$$

В евклидовом случае, когда не надо различать векторы и ковекторы, а также можно сопоставить кососимметрическому тензору (T_{ij}) вектор $T = (T^i)$, получим (формула Стокса)

$$\oint_{\Gamma} T_\alpha dx^\alpha = \iint_{U} \langle \operatorname{rot} T, n\rangle \sqrt{g}\, dz^1 \wedge dz^2, \tag{38}$$

где $\operatorname{rot} T$ — вектор, сопоставленный кососимметрическому тензору $(\operatorname{rot} T)_{\alpha\beta} = \frac{\partial T_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial T_\alpha}{\partial x^\beta}$.

Итак, во всех этих случаях общая формула Стокса с помощью теоремы 1 преобразуется в разные интегральные формулы из курса анализа. Тем самым она доказана для трехмерного пространства.

В заключение мы отметим, что в формулировке общей теоремы Стокса не надо обязательно считать границу Γ состоящей из одного куска. Если граница Γ состоит из нескольких кусков (рис. 31), то интегралы по разным кускам войдут со знаками $+$ (или $-$), которые нужно выбирать правильно. Это отмечалось уже раньше для тривиального случая $k=1$, в котором граница Γ отрезка кривой состоит из двух точек: одна (конечная) со знаком $+$, а вторая (начальная) со знаком $-$. Здесь следует отметить, что выбор знака в выражении $\iint\limits_{\Gamma} \langle T, n\rangle \sqrt{g}\, dz^1 \wedge dz^2$ (или, как говорят, «ориентации» границы Г) определяется направлением единичной нормали n.

Укажем теперь одно важное приложение общей формулы Стокса.

Рассмотрим четырехмерное пространство $x^0 = ct$, x^1, x^2, x^3 с метрикой $g_{ij} = \begin{pmatrix} +1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$, где c — скорость света, t — время.

Пусть $F_{ik} = -F_{ki}$ — тензор электромагнитного поля, $i, k = 0, 1, 2, 3$. Мы будем сейчас изучать свойства этого тензора при неизменном времени $x^0 = ct$, так что разрешается преобразовывать лишь пространственные координаты x^i, $i = 1, 2, 3$:

$$x'^0 = x^0,\ x'^i = x'^i(x^1, x^2, x^3).$$

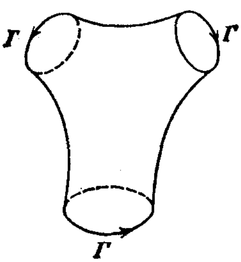

Рис. 31

В этом случае тензор (F_{ik}) в четырехмерном пространстве определяется ковектором электрического поля $E_\alpha = F_{0\alpha}$, $\alpha = 1, 2, 3$, и тензором магнитного поля $H_{\beta\alpha} = -H_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Если координаты x^1, x^2, x^3 евклидовы, то магнитное поле определяется вектором магнитного поля (§ 21)

$$H^1 = H_{23},\ H^2 = -H_{13},\ H^3 = H_{12}.$$

На языке дифференциальных форм имеем (см. § 25)

$$d\left(F_{ij} dx^i \wedge dx^j\right) = 0 \text{ (первая пара уравнений Максвелла)}$$

или в трехмерной евклидовой записи:

а) $\operatorname{div} \mathrm{H} = \dfrac{\partial H^i}{\partial x^i} = 0;$

б) $\operatorname{rot} \mathrm{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial t} = 0.$

Из уравнения а) и формулы Гаусса — Остроградского получаем (Г — граница области U)

$$\iiint\limits_U \operatorname{div} \mathrm{H}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iint\limits_{\Gamma} (\mathrm{H}\cdot\mathrm{n})\, d\sigma = 0$$

(«поток магнитного поля сквозь замкнутую поверхность всегда равен нулю»).

Из уравнения б) и формулы Стокса имеем

$$\iint_U \langle \operatorname{rot} \mathbf{E}, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma = \oint_\Gamma E_\alpha dx^\alpha$$

(Г — граница области U на поверхности),

$$-\iint_U \left\langle \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \boldsymbol{n} \right\rangle d\sigma = \oint_\Gamma E_\alpha dx^\alpha$$

(«производная по времени от потока магнитного поля через поверхность со знаком минус равна циркуляции электрического поля по границе поверхности»).

Вторая пара уравнений Максвелла имеет вид (см. § 25)

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} + \frac{1}{c} \frac{\partial F^{i0}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} j^i_{(4)},$$

где $j_{(4)} = (c\rho, j_1, j_2, j_3)$, ρ — плотность заряда, $\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3)$ — трехмерный вектор тока (четырехмерная дивергенция тензора F_{ik} в метрике $\begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & 0 \\ 0 & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ равна (со знаком минус) четырехмерному вектору тока, умноженному на $4\pi/c$).

В трехмерной форме это дает:

а) $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$;

б) $\operatorname{rot} \mathbf{H} - \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \dfrac{4\pi}{c} \mathbf{j}$.

Из а) и формулы Гаусса — Остроградского имеем

$$\iiint_U 4\pi\rho \, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iint_\Gamma \langle \mathbf{E}, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma$$

(«поток электрического поля через границу области равен с точностью до 4π полному заряду в этой области»). Из б) и формулы Стокса имеем

$$\frac{1}{c} \iint_U \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \mathbf{n} \, d\sigma + \iint_U \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}\mathbf{n} \, d\sigma = \oint_\Gamma H_\alpha dx^\alpha,$$

где Г — граница области U на поверхности («полный ток через поверхность плюс производная от потока электрического поля через эту поверхность равен циркуляции магнитного поля по границе этой поверхности»).

Мы видим здесь различное геометрическое содержание первой и второй пар уравнений Максвелла. Первая пара уравнений Максвелла не связана ни с какой метрикой пространства; что же касается второй пары, то ее нельзя написать без метрики. Обычная форма этих уравнений тесно связана с евклидовыми координатами.

4. Доказательство общей формулы Стокса для куба. Выше было показано, что классические интегральные формулы Грина и Гаусса — Остроградского являются частными случаями общей формулы Стокса. В этом пункте мы докажем общую формулу Стокса для случая, когда областью интегрирования является k-мерный куб.

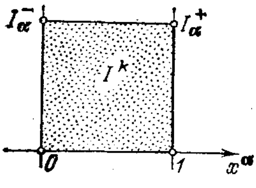

Рис. 32

Сингулярный куб σ пространства $\mathbb{R}^n$ определяется как гладкое отображение $\sigma\colon I^k \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant k$, где I^k — декартов куб размерности k:

$$I^k = \{(x^1, \ldots, x^k) \,|\, 0 \leqslant x^\alpha \leqslant 1\}.$$

Уравнения $x^\alpha = 0$ и $x^\alpha = 1$ определяют две $(k-1)$-мерные грани I_α^- и I_α^+ соответственно (рис. 32). Через ∂I^k обозначим границу куба I^k: $\partial I^k = \bigcup\limits_\alpha (I_\alpha^+ \cup I_\alpha^-)$. Пусть φ^{k-1} есть $(k-1)$-форма в $\mathbb{R}^n$ и $d\varphi^{k-1}$ — ее внешний дифференциал; пусть, далее, $\sigma\colon I^k \to \mathbb{R}^n$ — сингулярный куб.

Теорема 4. *Имеет место равенство*

$$\int\limits_{\sigma(\partial I^k)} \varphi^{k-1} = \int\limits_{\sigma(I^k)} d\varphi^{k-1}$$

(*мы считаем, что ориентация на границе ∂I^k индуцирована естественной ориентацией куба I^k, причем индуцирование осуществляется с помощью внешней нормали*).

Замечание. Здесь под интегралом $\int\limits_{\sigma(\partial I^k)} \varphi$ понимается сумма по всем граням куба.

Доказательство. Рассмотрим форму $\omega = \sigma^*(\varphi)$; в силу перестановочности σ^* с операцией d имеем $d\omega = d\sigma^*(\varphi) = \sigma^*(d\varphi)$, и, следовательно, требуемое утверждение достаточно доказать в следующем виде:

$$\int\limits_{\partial I^k} \omega = \int\limits_{I^k} d\omega.$$

Мы воспользовались здесь тем, что по определению

$$\int\limits_{\sigma(I^k)} d\varphi = \int\limits_{I_k} \sigma^*(d\varphi) \quad \text{и} \quad \int\limits_{\sigma(\partial I^k)} \varphi = \int\limits_{\partial I^k} \sigma^*(\varphi).$$

Пусть $\omega = a_\alpha(x^1, \ldots, x^k)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\alpha} \wedge \ldots \wedge dx^k$, где $a_\alpha(x^1, \ldots, x^k)$ — гладкие функции, а дифференциал dx^α пропущен. Тогда

$$d\omega = \sum_\alpha \frac{\partial a_\alpha}{\partial x^\alpha}\, dx^\alpha \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\alpha} \wedge \ldots \wedge dx^k = \sum_\alpha (-1)^{\alpha-1} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x^\alpha}\, d^k x,$$

где $d^kx = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$. Для простоты дальнейших рассуждений предположим, что функции $a_\alpha(x^1, \ldots, x^k)$ представлены в виде произведений:

$$a_\alpha(x^1, \ldots, x^k) = \prod_{q=1}^{k} b_\alpha^q(x^q),$$

где b_α^q — гладкие функции от одной переменной x^q. (Напомним, что в курсе анализа доказывается следующая теорема: любая гладкая функция равномерно аппроксимируется линейными комбинациями произведений гладких функций, зависящих от одной переменной; мы, конечно, не будем здесь это доказывать.)

Вычислим в явном виде выражение $\int\limits_{I^k} d\omega$:

$$\int\limits_{I^k} d\omega = \int\limits_{I^k} \left(\sum_\alpha (-1)^{\alpha-1} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x^\alpha}\right) d^kx =$$

$$= \int\limits_{I^k} \left(\sum_\alpha (-1)^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\prod_{q=1}^{k} b_\alpha^q(x^q)\right)\right) d^kx =$$

$$= \int\limits_{I^k} \left(\sum_\alpha (-1)^{\alpha-1} b_\alpha^1(x^1) \ldots \frac{\partial b_\alpha^\alpha(x^\alpha)}{\partial x^\alpha} \ldots b_\alpha^k(x^k)\right) d^kx =$$

$$= \sum_\alpha \int\limits_{(x^1)} \ldots \int\limits_{(\widehat{x}^\alpha)} \ldots \int\limits_{(x^k)} \left((-1)^{\alpha-1} b_\alpha(x^1) \ldots b_\alpha^{\alpha-1}(x^{\alpha-1})\, b_\alpha^{\alpha+1}(x^{\alpha+1}) \ldots\right.$$

$$\left.\ldots b_\alpha^k(x^k)\left[(-1)^{\alpha-1} \int\limits_{(x^\alpha)} \frac{\partial b_\alpha^\alpha(x^\alpha)}{\partial x^\alpha} dx^\alpha\right] dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\alpha} \wedge \ldots \wedge dx^k =\right.$$

$$= \sum_\alpha \int\limits_{(x^1)} \ldots \int\limits_{(\widehat{x}^\alpha)} \ldots \int\limits_{(x^k)} \left(b_\alpha^1(x^1) \ldots \widehat{b_\alpha^\alpha}(x^\alpha) \ldots b_\alpha^k(x^k) \times\right.$$

$$\left.\times \left[b_\alpha^\alpha(1) - b_\alpha^\alpha(0)\right]\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\alpha} \wedge \ldots \wedge dx^k =$$

$$= \sum_\alpha \int\limits_{(x^1)} \ldots \int\limits_{(\widehat{x}^\alpha)} \ldots \int\limits_{(x^k)} \left(b_\alpha^1(x^1) \ldots b_\alpha^\alpha(1) \ldots b_\alpha^k(x^k) -\right.$$

$$\left.- b_\alpha^1(x^1) \ldots b_\alpha^\alpha(0) \ldots b_\alpha^k(x^k)\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\alpha} \wedge \ldots \wedge dx^k =$$

$$= \sum_\alpha \int\limits_{(x^1)} \ldots \int\limits_{(\widehat{x}^\alpha)} \ldots \int\limits_{(x^k)} \left(a_\alpha(x^1, \ldots, x^k)\big|_{x^\alpha=1} -\right.$$

$$\left.- a_\alpha(x^1, \ldots, x^k)\big|_{x^\alpha=0}\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\alpha} \wedge \ldots \wedge dx^k = \int\limits_{\partial I^k} \omega.$$

Теорема доказана.

Задачи. 1. Вычислить объем групп $SO(3, \mathbb{R})$ и $SU(2)$ в метрике Киллинга.

2. Пусть X^i — векторное поле в четырехмерном пространстве Минковского $\mathbb{R}^4_1$. Определим интеграл этого векторного поля по трехмерной гиперповерхности («поток» векторного поля через гиперповерхность) как интеграл от 3-формы $X^i dS_i$, где

$$dS_i = \frac{1}{6}\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{jkli}\,dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l,$$

ε_{jkli} — антисимметричный тензор 4-го ранга. Вывести из общей формулы Стокса следующее равенство (в псевдоевклидовых координатах):

$$\int_{\partial V} X^i dS_i = \int_V \frac{\partial X^i}{\partial x^i}\, dV.$$

3. Пусть U — ограниченная область с гладкой границей в пространстве с римановой метрикой g_{ij} и Ω^p_U — пространство всех гладких p-форм, обращающихся в нуль вне области U. Введем в пространство Ω^p_U скалярное произведение, полагая

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \int_U \omega_1 \wedge *\omega_2$$

для p-форм ω_1, ω_2 из Ω^p_U.

а) Показать, что пространство Ω^p_U с введенным скалярным произведением евклидово (см. задачу 2 к § 19).

б) Оператор $*$ ортогонален:

$$\langle *\omega_1, *\omega_2 \rangle = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle.$$

в) Операторы $\delta = (-1)^{np+n+1} * d *$ и d сопряжены, т. е.

$$\langle d\omega_1, \omega_2 \rangle = \langle \omega_1, \delta\omega_2 \rangle.$$

г) Квадрат оператора δ равен нулю: $\delta\delta = 0$.

д) Пусть $\Delta = d\delta + \delta d$. Показать, что оператор Δ в пространстве Ω^p_U самосопряжен: $\langle \Delta\omega_1, \omega_2 \rangle = \langle \omega_1, \Delta\omega_2 \rangle$. Проверить следующие соотношения перестановочности:

$$\Delta d = d\Delta, \quad \Delta\delta = \delta\Delta, \quad \Delta * = * \Delta.$$

§ 27. Дифференциальные формы в комплексных пространствах

1. Операторы d' и d''. Пусть D — область в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ с комплексными координатами $z^1, \ldots, z^n$. Можно рассмотреть «овеществленную» область $D^{\mathbb{R}}$ с вещественными координатами $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n$, где

$$z^k = x^k + iy^k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1}$$