Задачи. 1. Вычислить объем групп $SO(3, \mathbb{R})$ и $SU(2)$ в метрике Киллинга.

2. Пусть X^i — векторное поле в четырехмерном пространстве Минковского $\mathbb{R}^4_1$. Определим интеграл этого векторного поля по трехмерной гиперповерхности («поток» векторного поля через гиперповерхность) как интеграл от 3-формы $X^i dS_i$, где

$$dS_i = \frac{1}{6}\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{jkli}dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l,$$

ε_{jkli} — антисимметричный тензор 4-го ранга. Вывести из общей формулы Стокса следующее равенство (в псевдоевклидовых координатах):

$$\int\limits_{\partial V} X^i dS_i = \int\limits_V \frac{\partial X^i}{\partial x^i}\,dV.$$

3. Пусть U — ограниченная область с гладкой границей в пространстве с римановой метрикой g_{ij} и Ω^p_U — пространство всех гладких p-форм, обращающихся в нуль вне области U. Введем в пространство Ω^p_U скалярное произведение, полагая

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \int\limits_U \omega_1 \wedge *\omega_2$$

для p-форм ω_1, ω_2 из Ω^p_U.

а) Показать, что пространство Ω^p_U с введенным скалярным произведением евклидово (см. задачу 2 к § 19).

б) Оператор $*$ ортогонален:

$$\langle *\omega_1, *\omega_2 \rangle = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle.$$

в) Операторы $\delta = (-1)^{np+n+1} * d *$ и d сопряжены, т. е.

$$\langle d\omega_1, \omega_2 \rangle = \langle \omega_1, \delta\omega_2 \rangle.$$

г) Квадрат оператора δ равен нулю: $\delta\delta = 0$.

д) Пусть $\Delta = d\delta + \delta d$. Показать, что оператор Δ в пространстве Ω^p_U самосопряжен: $\langle \Delta\omega_1, \omega_2 \rangle = \langle \omega_1, \Delta\omega_2 \rangle$. Проверить следующие соотношения перестановочности:

$$\Delta d = d\Delta, \quad \Delta\delta = \delta\Delta, \quad \Delta * = *\Delta.$$

§ 27. Дифференциальные формы в комплексных пространствах

1. Операторы d' и d''. Пусть D — область в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ с комплексными координатами $z^1, \ldots, z^n$. Можно рассмотреть «овеществленную» область $D^{\mathbb{R}}$ с вещественными координатами $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n$, где

$$z^k = x^k + iy^k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Базис в касательном пространстве к $D^{\mathbb{R}}$ (в любой точке) образуют векторы $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}$. Мы будем рассматривать комплексные касательные векторы, т. е. линейные комбинации

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{k=1}^{n} b^k \frac{\partial}{\partial y^k} \tag{2}$$

с комплексными коэффициентами. В пространстве таких векторов удобно ввести комплексный базис $\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}$, полагая

$$\frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - i\frac{\partial}{\partial y^k}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} + i\frac{\partial}{\partial y^k}\right), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Чтобы сделать дальнейшие формулы более ясными, примем такое соглашение. Тензорные индексы, отвечающие надчеркнутым координатам, мы всегда будем надчеркивать, делая исключение для тех обозначений, в которые черта уже входит. Например, запись $a_{k\bar{l}} z^k \bar{z}^l$ подразумевает суммирование по обоим индексам (см. также ниже формулы (4), (7), (9) и т. д.).

Любой комплексный вектор ξ имеет, таким образом, вид

$$\xi = \xi^k \frac{\partial}{\partial z^k} + \xi^{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}, \quad \xi = (\xi^k, \xi^{\bar{k}}), \tag{4}$$

причем вектор ξ является вещественным в том и только в том случае, если $\xi^{\bar{k}} = \overline{\xi^k}$. Дуальный базис в пространстве комплексных ковекторов (1-форм) имеет вид

$$dz^k = dx^k + i\,dy^k, \quad d\bar{z}^k = dx^k - i\,dy^k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Любая комплексная k-форма ω, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, представляется в виде линейной комбинации выражений $dz^{i_1} \wedge \ldots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{j_q}$, $p + q = k$. Поэтому ω можно представить в виде

$$\omega = \omega_{k,0} + \omega_{k-1,1} + \ldots + \omega_{0,k}, \tag{6}$$

где в форму $\omega_{p,q}$, $p + q = k$, входят p дифференциалов вида dz^i и q дифференциалов вида $d\bar{z}^j$. Тогда

$$\omega_{p,q} = \frac{1}{p!\,q!} \sum_{\substack{i_1 \ldots i_p \\ \bar{j}_1 \ldots \bar{j}_q}} T_{i_1 \ldots i_p \bar{j}_1 \ldots \bar{j}_q} dz^{i_1} \wedge \ldots \wedge dz^{i_p} \wedge$$
$$\wedge\, d\bar{z}^{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{j_q}, \tag{7}$$

причем компоненты $T_{i_1 \ldots i_p \bar{j}_1 \ldots \bar{j}_q}$ кососимметричны по индексам $i_1 \ldots i_p$ и $\bar{j}_1, \ldots \bar{j}_q$ в отдельности. Форма $\omega_{p,q}$ называется *формой типа* (p, q).

Разложение (6) не зависит от выбора комплексных координат. Если $w^1, \ldots, w^n$ — другие комплексные координаты в области D и функции $w^i = w^i(z^1, \ldots, z^n)$ комплексно аналитичны, то dw^i есть линейная комбинация форм $dz^1, \ldots, dz^n$, а $d\bar{w}^i$ — линейная комбинация форм $d\bar{z}^1, \ldots, d\bar{z}^n$.

Лемма 1. *Дифференциал d можно однозначно представить в виде*

$$d = d' + d'', \tag{8}$$

где для формы ω типа (p, q) дифференциал $d'\omega$ имеет тип $(p+1, q)$, а дифференциал $d''\omega$ — тип $(p, q+1)$. Операторы d', d'' инвариантны относительно комплексно аналитических замен координат.

Доказательство. Для формы $\omega_{p,q}$ вида (7) имеем

$$d\omega_{p,q} = \frac{1}{p!\,q!} \sum_{\substack{i, i_1, \ldots, i_p \\ \bar{j}_1, \ldots, \bar{j}_q}} \frac{\partial T_{i_1 \ldots i_p \bar{j}_1 \ldots \bar{j}_q}}{\partial z^i} dz^i \wedge dz^{i_1} \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{j_q} +$$
$$+ \frac{(-1)^p}{p!\,q!} \sum_{\substack{i_1 \ldots i_p \\ \bar{j}, \bar{j}_1, \ldots, \bar{j}_q}} \frac{\partial T_{i_1 \ldots i_p \bar{j}_1 \ldots \bar{j}_q}}{\partial \bar{z}^j} dz^{i_1} \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^j \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{j_q}. \tag{9}$$

Обозначим первое слагаемое в этой формуле через $d'\omega_{p,q}$, второе — через $d''\omega_{p,q}$. В силу однозначности разложения (6) формы в сумму форм типа (p, q) операторы d' и d'' корректно определяются равенством (9). Их инвариантность следует из инвариантности разложения (6) относительно комплексно аналитических замен. Лемма доказана.

Следствие. *Квадраты операторов d' и d'' равны нулю:*

$$(d')^2 = (d'')^2 = 0, \tag{10}$$

причем эти операторы антикоммутируют между собой:

$$d''d' = -d'd''. \tag{11}$$

Доказательство. Из равенств $d^2 = 0$ и $d = d' + d''$ вытекает, что

$$0 = d^2\omega_{p,q} = (d')^2\omega_{p,q} + (d'')^2\omega_{p,q} + (d'd''\omega_{p,q} + d''d'\omega_{p,q}).$$

В правой части первое слагаемое имеет тип $(p+2, q)$, второе — $(p, q+2)$, третье и четвертое — $(p+1, q+1)$. Следовательно, все эти три формы равны нулю. Следствие доказано.

Определение 1. Форма ω типа $(p, 0)$ называется *голоморфной*, если
$$d''\omega = 0. \tag{12}$$

Пример. Форма ω типа $(0, 0)$ — это комплекснозначная функция $f(z^1, \ldots, z^n, \bar z^1, \ldots, \bar z^n)$. Условие $d''f = 0$ есть условие комплексной аналитичности функции f:
$$\frac{\partial f}{\partial \bar z^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

В общем случае форма ω типа $(p, 0)$ голоморфна, если все ее коэффициенты являются комплексно аналитическими функциями.

2. Кэлерова метрика. Форма кривизны. Эрмитова метрика в области D задается набором функций $g_{j\bar k}$, отнесенных к каждой системе координат $(z^1, \ldots, z^n)$, таких, что

а) $g_{j\bar k} = \overline{g_{k\bar j}}$,

б) при заменах координат $z^j = z^j(z^{1'}, \ldots, z^{n'})$, где $\dfrac{\partial z^j}{\partial \bar z^{k'}} \equiv 0$, имеем
$$g_{j'\bar k'} = g_{j\bar k}\frac{\partial z^j}{\partial z^{j'}}\overline{\left(\frac{\partial z^k}{\partial z^{k'}}\right)};$$

в) форма $g_{j\bar k}\xi^j\xi^{\bar k}$ положительно определена.

Комплексное скалярное произведение комплексных касательных векторов $\xi = (\xi^k, \xi^{\bar k})$, $\eta = (\eta^k, \eta^{\bar k})$ задается формулой
$$\langle \xi, \eta\rangle_{\mathbb C} = g_{j\bar k}\xi^j\eta^{\bar k}. \tag{13}$$
Скалярное произведение $\langle , \rangle_{\mathbb C}$ не зависит от выбора комплексных координат. Оно дает риманову метрику $\langle , \rangle_{\mathbb R}$ в вещественной области $D^{\mathbb R}$, где
$$\langle \xi, \eta\rangle_{\mathbb R} = \operatorname{Re}\langle \xi, \eta\rangle_{\mathbb C} \tag{14}$$
(см. § 11, п. 2).

Для вещественных векторов, т. е. для таких векторов ξ, η, что $\xi^{\bar k} = \overline{\xi^k}$, $\eta^{\bar k} = \overline{\eta^k}$, выполняется условие эрмитовости
$$\langle \xi, \eta\rangle_{\mathbb C} = \overline{\langle \eta, \xi\rangle}_{\mathbb C}. \tag{15}$$
Поэтому выражение
$$\{\xi, \eta\} = -\frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle \xi, \eta\rangle_{\mathbb C} = \frac{i}{2}\left[\frac{\langle \xi, \eta\rangle_{\mathbb C} - \overline{\langle \xi, \eta\rangle}_{\mathbb C}}{2}\right] \tag{16}$$
кососимметрично по ξ и η и дает дифференциальную форму Ω 2-го ранга на $D^{\mathbb R}$. Явный вид формы Ω таков:
$$\Omega = \frac{i}{2} g_{j\bar k} dz^j \wedge d\bar z^k, \tag{17}$$
поэтому Ω есть форма типа $(1, 1)$.

Определение 2. Эрмитова метрика $g_{j\bar{k}}$ называется *кэлеровой*, если соответствующая форма Ω замкнута:

$$d\Omega = 0.$$

Геометрический смысл условия кэлеровости будет выяснен в § 29, п. 4.

Пример. Пусть в области D на двумерной вещественной поверхности введены конформные координаты. Метрика в них имеет вид

$$ds^2 = g\,dz\,d\bar{z}. \tag{18}$$

Тогда форма Ω есть элемент площади поверхности. Здесь метрика всегда кэлерова, так как форма Ω замкнута по соображениям размерности.

Лемма 2. *Пусть* $g_{j\bar{k}}$ — *эрмитова метрика*, $g = \det(g_{j\bar{k}})$. *Положим*

$$\omega = \frac{1}{2\pi i} d''d' \ln g.$$

Тогда ω *есть форма типа* (1, 1).

Доказательство. Нужно лишь проверить, что определение формы ω не зависит от выбора комплексных координат. Сделаем комплексно аналитическую замену координат:

$$z^j = z^j(w^1, \ldots, w^n), \quad \frac{\partial z^j}{\partial \bar{w}^k} = 0. \tag{19}$$

Пусть $J = \det\left(\frac{\partial z^j}{\partial w^k}\right)$. Якобиан соответствующей вещественной замены координат равен $|J|^2$ (см. § 12, п. 2). Поэтому в координатах $w^1, \ldots, w^n$ детерминант $\tilde{g}$ матрицы эрмитовой формы имеет вид

$$\tilde{g} = |J|^2 g = J\bar{J} g.$$

Отсюда

$$d' \ln \tilde{g} = d' \ln J + d' \ln \bar{J} + d' \ln g = d' \ln J + d' \ln g,$$

где $d' \ln \bar{J} = 0$ в силу аналитичности функции J. Далее,

$$d''d' \ln \tilde{g} = d''d' \ln J + d''d' \ln g = -d'd'' \ln J + d''d' \ln g = d''d' \ln g,$$

где мы использовали равенства $d'd'' = -d''d'$ и $d''J = 0$. Лемма доказана.

Рассмотрим снова метрику $g\,dz\,d\bar{z}$ двумерной вещественной поверхности в конформных координатах. Имеет место

Теорема 1. *Форма* $\omega = \frac{1}{2\pi i} d''d' \ln g$ *имеет вид*

$$\omega = \frac{2}{\pi} K\Omega, \tag{20}$$

где K — гауссова кривизна поверхности, а форма $\Omega = \frac{i}{2} g dz \wedge \wedge d\bar{z}$ — элемент площади.

Доказательство. Имеем

$$d'd'' \ln g = \frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar{z}} \ln g \, dz \wedge d\bar{z}.$$

Мы видели (в § 13, п. 1), что для поверхности, заданной в конформных координатах, величина $-\frac{1}{2g} \frac{\partial^2 \ln g}{\partial z\, \partial \bar{z}}$ равна гауссовой кривизне. Теорема доказана.

§ 28. Ковариантное дифференцирование

1. Евклидова связность. В § 25 была разобрана операция взятия градиента кососимметрического тензора (тензорного поля), которая приводила к кососимметрическому тензору ранга, на единицу большего. Эта операция в компонентах имела вид

$$(dT)_{i_1 \ldots i_{k+1}} = \sum_{q=1}^{k+1} (-1)^{q+1} \frac{\partial T_{i_1 \ldots \hat{i}_q \ldots i_{k+1}}}{\partial x^{i_q}}. \tag{1}$$

В частности, при $k = 1$ мы имели

$$(dT)_{ij} = \frac{\partial T_j}{\partial x^i} - \frac{\partial T_i}{\partial x^j}. \tag{2}$$

Указывалось, что dT снова является тензором (это было строго доказано для $k = 0, 1$). Указывалось также, что операция d — единственная не связанная ни с какой геометрией дифференциальная операция над тензорами в том смысле, что все остальные сводятся к ней и к чисто алгебраическим операциям, перечислявшимся ранее (перестановка индексов, сложение, произведение, след).

Что же касается обычного обобщения градиента функции на тензоры типа (p, q)

$$T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q;\, k} = \frac{\partial T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}}{\partial x^k} \tag{3}$$

в пространстве с декартовыми координатами $x^1, \ldots, x^n$, то уже говорилось, что результат этой операции не является тензором типа $(p, q+1)$. Так как эта операция встречается довольно часто, мы укажем класс преобразований, относительно которого ее результат преобразуется как тензор. Это — линейные преобразования.