где K — гауссова кривизна поверхности, а форма $\Omega = \frac{i}{2} g dz \wedge \wedge d\bar{z}$ *— элемент площади.*

Доказательство. Имеем

$$d'd'' \ln g = \frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar{z}} \ln g \, dz \wedge d\bar{z}.$$

Мы видели (в § 13, п. 1), что для поверхности, заданной в конформных координатах, величина $-\frac{1}{2g} \frac{\partial^2 \ln g}{\partial z\, \partial \bar{z}}$ равна гауссовой кривизне. Теорема доказана.

§ 28. Ковариантное дифференцирование

1. Евклидова связность. В § 25 была разобрана операция взятия градиента кососимметрического тензора (тензорного поля), которая приводила к кососимметрическому тензору ранга, на единицу большего. Эта операция в компонентах имела вид

$$(dT)_{i_1 \ldots i_{k+1}} = \sum_{q=1}^{k+1} (-1)^{q+1} \frac{\partial T_{i_1 \ldots \hat{i}_q \ldots i_{k+1}}}{\partial x^{i_q}}. \tag{1}$$

В частности, при $k = 1$ мы имели

$$(dT)_{ij} = \frac{\partial T_j}{\partial x^i} - \frac{\partial T_i}{\partial x^j}. \tag{2}$$

Указывалось, что dT снова является тензором (это было строго доказано для $k = 0, 1$). Указывалось также, что операция d — единственная не связанная ни с какой геометрией дифференциальная операция над тензорами в том смысле, что все остальные сводятся к ней и к чисто алгебраическим операциям, перечислявшимся ранее (перестановка индексов, сложение, произведение, след).

Что же касается обычного обобщения градиента функции на тензоры типа (p, q)

$$T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q; k} = \frac{\partial T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}}{\partial x^k} \tag{3}$$

в пространстве с декартовыми координатами $x^1, \ldots, x^n$, то уже говорилось, что результат этой операции не является тензором типа $(p, q+1)$. Так как эта операция встречается довольно часто, мы укажем класс преобразований, относительно которого ее результат преобразуется как тензор. Это — линейные преобразования.

Теорема 1. *Если в пространстве заданы координаты и тензорное поле* $T = T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$, *то поле*

$$T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q;\,k} = \frac{\partial T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}}{\partial x^k}$$

преобразуется как тензор типа $(p,\ q+1)$ *при всех линейных заменах координат*

$$x^i = a^i_j z^j, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

$$a^i_j = \mathrm{const}, \quad z^i = b^i_j x^j, \quad b^i_j a^j_k = \delta^i_k.$$

Доказательство. Для линейных преобразований имеем

$$\frac{\partial x^i}{\partial z^j} = a^i_j = \mathrm{const} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^j\,\partial z^k} = 0,$$

$$\frac{\partial z^i}{\partial x^j} = b^i_j = \mathrm{const}, \quad a^i_j b^j_k = \delta^i_k.$$

По определению тензора

$$\widetilde{T}^{k_1\ldots k_p}_{l_1\ldots l_q} = T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\frac{\partial z^{k_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial z^{k_p}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial z^{l_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial z^{l_q}} = T^{(i)}_{(j)} b^{(k)}_{(i)} a^{(j)}_{(l)}, \tag{4}$$

где $(i) = i_1 \ldots i_p$, $(k) = k_1 \ldots k_p$, $(j) = j_1 \ldots j_q$, $(l) = l_1 \ldots l_q$. Так как $a^i_j = \mathrm{const}$, $b^j_k = \mathrm{const}$, то при дифференцировании формулы (4) будем иметь

$$\widetilde{T}^{(k)}_{(l);r} = \frac{\partial \widetilde{T}^{(k)}_{(l)}}{\partial z^r} = \frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial z^r} b^{(k)}_{(i)} a^{(j)}_{(l)} = \frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^s}\frac{\partial x^s}{\partial z^r} b^{(k)}_{(i)} a^{(j)}_{(l)} = T^{(i)}_{(j);s} a^s_r a^{(j)}_{(l)} b^{(k)}_{(i)}. \tag{5}$$

Это — закон преобразования тензора. Теорема доказана.

Мы существенно использовали в доказательстве то, что $\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^j\,\partial z^k} = 0$. Рассмотрим, например, тензоры типа $(0, 1)$ или $(1, 0)$:

$$\frac{\partial T_i}{\partial x^k} = T_{i;k}, \quad \frac{\partial T^i}{\partial x^k} = T^i_{;k}.$$

В силу только что доказанной теоремы $T_{i;k}$ и $T^i_{;k}$ преобразуются как тензоры относительно линейных замен координат. При общих заменах координат $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n)$, $i = 1, \ldots, n$, с $\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^k\,\partial z^j} \not\equiv 0$ получим

$$\widetilde{T}_{j;q} = \frac{\partial \widetilde{T}_j}{\partial z^q} = \frac{\partial}{\partial z^q}\left(T_i \frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right) = \frac{\partial T_i}{\partial z^q}\frac{\partial x^i}{\partial z^j} + T_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^q\,\partial z^j} =$$

$$= \frac{\partial T_i}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial z^q}\frac{\partial x^i}{\partial z^j} + T_i\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^q\,\partial z^j} = T_{i;p}\frac{\partial x^p}{\partial z^q}\frac{\partial x^i}{\partial z^j} + T_i\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^q\,\partial z^j}.$$

Здесь $\widetilde{T}$ — компоненты в системе координат (z), а T — компоненты в системе координат (x). Итак, общая формула преобразования имеет вид

$$\frac{\partial \widetilde{T}_j}{\partial z^q} = \widetilde{T}_{j;q} = T_{i;p}\frac{\partial x^p}{\partial z^q}\frac{\partial x^i}{\partial z^j} + T_i\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^q\,\partial z^j}. \tag{6}$$

Слагаемое $T_i\dfrac{\partial^2 x^i}{\partial z^q\,\partial z^j}$ не имеет тензорного характера. Как было показано в § 25, выражение

$$(d\widetilde{T})_{j;q} = \widetilde{T}_{j;q} - \widetilde{T}_{q;j} = (T_{i;p} - T_{p;i})\frac{\partial x^p}{\partial z^q}\frac{\partial x^i}{\partial z^j}$$

является тензором. Но симметрическая часть

$$(\widetilde{T}_{j;q} + \widetilde{T}_{q;j}) = (T_{j;q} + T_{q;j})\frac{\partial x^p}{\partial z^q}\frac{\partial x^i}{\partial z^j} + 2T_i\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^q\,\partial z^j}$$

не является тензором относительно произвольных замен координат.

Аналогично для тензора T^i будем иметь

$$\widetilde{T}^j_{;l} = \frac{\partial \widetilde{T}^j}{\partial z^l} = \frac{\partial}{\partial z^l}\left(T^i\frac{\partial z^j}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial T^i}{\partial z^l}\frac{\partial z^j}{\partial x^i} + T^i\frac{\partial}{\partial z^l}\left(\frac{\partial z^j}{\partial x^i}\right) =$$
$$= \frac{\partial T^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial z^l}\frac{\partial z^j}{\partial x^i} + T^i\frac{\partial^2 z^j}{\partial x^i\,\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial z^l}. \tag{7}$$

Как видно, это — не тензор из-за второго слагаемого. Из формулы (7) вытекает, что

$$T^j_{;j} = \frac{\partial \widetilde{T}^j}{\partial z^j} = \frac{\partial T^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial z^l}\frac{\partial z^l}{\partial x^i} + T^i\frac{\partial^2 z^j}{\partial x^i\,\partial z^q}\frac{\partial x^q}{\partial z^j} =$$
$$= T^i_{;p}\delta^p_i + T^i\frac{\partial^2 z^j}{\partial x^i\,\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial z^j} = T^i_{;i} + T^i\frac{\partial x^q}{\partial z^j}\frac{\partial^2 z^j}{\partial x^i\,\partial x^q}. \tag{8}$$

Замечание. Выражение $\dfrac{\partial T^i}{\partial x^i} = T^i_{;i}$ (вычисленное в евклидовых координатах) часто называется дивергенцией векторного поля. Как видите, это выражение $T^i_{;i}$ не является скаляром по отношению к нелинейным заменам координат.

Обычно эту формулу используют лишь в евклидовых координатах $(x^1, \ldots, x^n)$, смысл дивергенции состоит в следующем: если заданы малые смещения точек пространства

$$x^i \to x^i + T^i(x^1, \ldots, x^n) = \bar{x}^i,$$

то элемент евклидова объема $dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$ после смещения области приобретает добавок $T^i_{;i}dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$ (см. § 22, п. 2).

Вернемся теперь к закону преобразования градиента

$$T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q;k} = \frac{\partial T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}}{\partial x^k}. \tag{9}$$

Ввиду доказанной теоремы мы условимся применять эту операцию только в евклидовых координатах $x^1, \ldots, x^n$ и в координатах, отличающихся от евклидовых линейной заменой

$$x^i = a^i_j z^j, \qquad a^i_j = \mathrm{const}.$$

Мы показали, что, применяя эту операцию по тем же формулам в другой системе координат, отличающейся от (x) нелинейной заменой, мы получим выражение $\widetilde{T}^{k_1\ldots k_p}_{l_1\ldots l_q;r}$, связанное с $T^{(i)}_{(j);s}$ нетензорным законом преобразования.

Подойдем теперь к вопросу с другой точки зрения: откуда мы знаем, что операцию взятия градиента надо всегда определять одной и той же формулой? Можно допустить следующее: а) эта операция существенно связана именно с евклидовой геометрией; б) что она применяется по формуле (9) лишь в евклидовых координатах x; в) что результат этой операции есть тензор.

Какие следствия вытекают из этих гипотез? По каким формулам эта операция должна применяться в других системах координат, связанных с евклидовыми нелинейной заменой? Для вывода следствий из этих гипотез мы должны, во-первых, вычислить результат применения этой операции к тензорному полю T в евклидовых координатах $x^1, \ldots, x^n$ и лишь затем, согласно тензорному закону, преобразовать этот результат в другую систему координат $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n)$, $i = 1, \ldots, n$.

Проделаем это:

$$T^{(i)}_{(j);s} = \frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^s}, \quad (i) = i_1, \ldots, i_p, \quad (j) = j_1, \ldots, j_q. \tag{10}$$

По определению считаем $T^{(i)}_{(j);s}$ тензором. Поэтому имеем

$$\widetilde{T}^{(k)}_{(l);r} = T^{(i)}_{(j);s} \frac{\partial x^{(j)}}{\partial z^{(l)}} \frac{\partial z^{(k)}}{\partial x^{(i)}} \frac{\partial x^s}{\partial z^r}, \tag{11}$$

где

$$\frac{\partial x^{(j)}}{\partial z^{(l)}} = \frac{\partial x^{j_1}}{\partial z^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial z^{l_q}}, \quad \frac{\partial z^{(k)}}{\partial x^{(i)}} = \frac{\partial z^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial z^{k_p}}{\partial x^{i_p}}.$$

Спрашивается, какой операцией в системе координат $(z^1, \ldots, z^n)$ компоненты $\widetilde{T}^{(k)}_{(l);q}$ получаются из компонент $\widetilde{T}^{(k)}_{(l)}$?

Рассмотрим для простоты векторные поля (T^i) и ковекторные поля (T_j). В этом случае из (11) получим

$$\widetilde{T}^k_{;q} = T^i_{;s}\frac{\partial z^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^s}{\partial z^q}; \quad \widetilde{T}_{l;r} = T_{j;s}\frac{\partial z^k}{\partial x^l}\frac{\partial x^s}{\partial z^r}. \qquad (12)$$

Так как $T^i_{;s} = \dfrac{\partial T^i}{\partial x^s}$, то из формулы (12) вытекает

$$\widetilde{T}^k_{;q} = \frac{\partial T^i}{\partial x^s}\frac{\partial x^s}{\partial z^q}\frac{\partial z^k}{\partial x^i} = \frac{\partial T^i}{\partial z^q}\frac{\partial z^k}{\partial x^i}. \qquad (13)$$

Напомним, что $\widetilde{T}^k = T^i\dfrac{\partial z^k}{\partial x^i}$. Из формулы (13) вытекает равенство

$$\widetilde{T}^k_{;q} = \frac{\partial T^i}{\partial z^q}\frac{\partial z^k}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial z^q}\left(\widetilde{T}^k\right) - T^i\frac{\partial}{\partial z^q}\left(\frac{\partial z^k}{\partial x^i}\right). \qquad (14)$$

Так как $T^i = \widetilde{T}^s\dfrac{\partial x^i}{\partial z^s}$, то получаем окончательное равенство

$$\widetilde{T}^k_{;q} = \frac{\partial \widetilde{T}^k}{\partial z^q} - \widetilde{T}^s\frac{\partial x^i}{\partial z^s}\frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i\,\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial z^q}. \qquad (15)$$

Введем теперь обозначение

$$\Gamma^k_{sq} = -\frac{\partial x^i}{\partial z^s}\frac{\partial x^m}{\partial z^q}\frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i\,\partial x^m}. \qquad (16)$$

Формула (15) приобретает вид

$$\widetilde{T}^k_{;q} = \frac{\partial \widetilde{T}^k}{\partial z^q} + \Gamma^k_{sq}\widetilde{T}^s. \qquad (17)$$

Нами доказана

Теорема 2. *Если градиент векторного поля (T^i) преобразуется как тензор при любых заменах координат и в евклидовых координатах (x) вычисляется по обычной формуле*

$$T^i_{;h} = \frac{\partial T^i}{\partial x^h},$$

то в любой другой системе координат (z) градиент вычисляется следующим образом:

$$\widetilde{T}^k_{;r} = \frac{\partial \widetilde{T}^k}{\partial z^r} + \Gamma^k_{sr}\widetilde{T}^s,$$

где коэффициенты Γ^k_{sr} определяются формулой (16).

Аналогичным образом мы можем преобразовать выражение для ковекторного поля:

$$\widetilde{T}_{l;r} = T_{j;s}\frac{\partial x^j}{\partial z^l}\frac{\partial x^s}{\partial z^r} = \frac{\partial T_j}{\partial x^s}\frac{\partial x^s}{\partial z^r}\frac{\partial x^j}{\partial z^l} = \frac{\partial T_j}{\partial z^r}\frac{\partial x^j}{\partial z^l} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z^r}\left(\widetilde{T}_k\frac{\partial z^k}{\partial x^j}\right)\frac{\partial x^j}{\partial z^l} = \frac{\partial \widetilde{T}_k}{\partial z^r}\left(\frac{\partial z^k}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial z^l}\right) + \widetilde{T}_k\frac{\partial x^j}{\partial z^l}\frac{\partial}{\partial z^r}\left(\frac{\partial z^k}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial \widetilde{T}_k}{\partial z^r}\delta_l^k +$$

$$+ \widetilde{T}_k\frac{\partial x^j}{\partial z^l}\frac{\partial}{\partial z^r}\left(\frac{\partial z^k}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial \widetilde{T}_l}{\partial z^r} + \widetilde{T}_k\left(\frac{\partial x^j}{\partial z^l}\frac{\partial x^s}{\partial z^r}\frac{\partial^2 z^k}{\partial x^j\,\partial x^s}\right) = \frac{\partial \widetilde{T}_l}{\partial z^r} - \Gamma^k_{lr}\widetilde{T}_k,$$

где $\Gamma^k_{lr} = -\frac{\partial x^j}{\partial z^l}\frac{\partial x^s}{\partial z^r}\frac{\partial^2 z^k}{\partial x^j\,\partial x^s}$.

Итак, нами доказана

Теорема 3. *Если градиент ковекторного поля* (T_i) *преобразуется как тензор при любых заменах координат и в евклидовой системе координат вычисляется по обычной формуле*

$$T_{i;k} = \frac{\partial T_i}{\partial x^k},$$

то в любой другой системе координат (z) *он вычисляется по формуле*

$$\widetilde{T}_{i;k} = \frac{\partial \widetilde{T}_i}{\partial z^k} - \widetilde{T}_r\Gamma^r_{ik}, \tag{18}$$

где набор Γ^r_{ik} *тот же, что и для векторов* (T^i) *в теореме* 2, *т. е. вычисляется по формуле* (16).

Итак, при построении операции взятия градиента, исходящем из того требования, что ее результат ведет себя как тензор при любых заменах координат $x = x(z)$, мы приходим к разным формулам для векторов и ковекторов:

$$\widetilde{T}_{i;k} = \frac{\partial \widetilde{T}_i}{\partial x^k} - \Gamma^r_{ik}\widetilde{T}_r \quad \text{(для ковектора)},$$

$$\widetilde{T}^i_{;k} = \frac{\partial \widetilde{T}^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{rk}\widetilde{T}^r \quad \text{(для вектора)}.$$

Однако набор Γ^i_{qk} общий для них.

Мы не будем здесь проводить вычисления для любых тензоров типа (p, q), но приведем без доказательства результат.

Теорема 4. *Если градиент* $T^{(i)}_{(j);k}$ *тензорного поля* $T^{(i)}_{(j)}$ *типа* (p, q) *преобразуется как тензор при любых заменах координат и в евклидовой системе координат вычисляется по формуле*

$$T^{(i)}_{(j);k} = \frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^k},$$

то в любой другой системе координат $x = x(z)$ *он вычисляется по формуле*

$$\widetilde{T}^{(k)}_{(l);r} = \frac{\partial \widetilde{T}^{(k)}_{(l)}}{\partial x^r} + \sum_{s=1}^{p} \widetilde{T}^{k_1\ldots(k_s\to i)\ldots k_p}_{l_1\ldots l_q}\Gamma^{k_s}_{ir} - \sum_{s=1}^{q} \widetilde{T}^{k_1\ldots k_p}_{l_1\ldots(l_s\to i)\ldots l_q}\Gamma^{i}_{l_s r} \qquad (19)$$

(*запись* $k_1\ldots(k_s\to i)\ldots k_p$ *означает, что в наборе* $k_1\ldots k_p$ *следует вместо* k_s *взять* i), *где набор функций* Γ^p_{kq} *вычисляется по той же формуле* (16).

Например, для тензоров 2-го ранга получаем

$$\widetilde{T}^i_{j;k} = \frac{\partial \widetilde{T}^i_j}{\partial x^k} + \widetilde{T}^p_j\Gamma^i_{pk} - \widetilde{T}^i_p\Gamma^p_{jk},$$

$$\widetilde{T}_{ij;k} = \frac{\partial \widetilde{T}_{ij}}{\partial x^k} - \widetilde{T}_{pj}\Gamma^p_{ik} - \widetilde{T}_{ip}\Gamma^p_{jk},$$

$$\widetilde{T}^{ij}_{;k} = \frac{\partial \widetilde{T}^{ij}}{\partial x^k} + \widetilde{T}^{pj}\Gamma^i_{pk} + \widetilde{T}^{ip}\Gamma^j_{pk}.$$

Градиент тензора $T^{(i)}_{(j)}$ всегда обозначается через $T^{(i)}_{(j);k}$, $(i) = i_1 \ldots i_p$, $(j) = j_1 \ldots j_q$.

Следует подчеркнуть, что введенная нами операция существенно связана с евклидовой геометрией. Дело в том, что мы определяли эту операцию двумя требованиями:

а) результат операции есть тензор;

б) в евклидовых координатах она вычисляется по обычной формуле

$$T^{(i)}_{(j);k} = \frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^k}.$$

С точки зрения данной операции можно сказать также, что евклидовыми называются такие координаты, что градиент в них для любого тензора вычисляется по формуле

$$T^{(i)}_{(j);k} = \frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^k}.$$

Остается выяснить, каким образом набор $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}(z)$ меняется при замене координат $z^i = z^i(z')$, $i = 1, \ldots, n$.

Если заданы евклидовы координаты

$$(x^1, \ldots, x^n), \quad x^i = x^i(z) = x^i(z(z')),$$

то, следуя формулам (16), полагаем

$$\Gamma^k_{pq} = -\frac{\partial x^i}{\partial z^p}\frac{\partial x^j}{\partial z^q}\frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i\,\partial x^j} = \frac{\partial^2 x^m}{\partial z^p\,\partial z^q}\frac{\partial z^k}{\partial x^m}. \qquad (20)$$

В системе координат (z') будем иметь

$$\Gamma^{k'}_{p'q'} = -\frac{\partial x^i}{\partial z^{p'}}\frac{\partial x^j}{\partial z^{q'}}\frac{\partial^2 z^{k'}}{\partial x^i\,\partial x^j} = \frac{\partial^2 x^m}{\partial z^{p'}\,\partial z^{q'}}\frac{\partial z^{k'}}{\partial x^m}. \qquad (21)$$

Из формул (20) и (21) получаем

$$\Gamma^k_{pq}\frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}}\frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}} = -\frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i\,\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial z^p}\frac{\partial x^j}{\partial z^q}\frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}}\frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}} =$$

$$= -\frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i\,\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial z^{p'}}\frac{\partial x^j}{\partial z^{q'}} = -\frac{\partial^2 z^k}{\partial z^{p'}\,\partial z^{q'}} + \frac{\partial z^k}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial z^{p'}\,\partial z^{q'}},$$

так как

$$\frac{\partial^2\,[z^k(x(z'))]}{\partial z^{p'}\,\partial z^{q'}} = \frac{\partial}{\partial z^{p'}}\left(\frac{\partial z^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial z^{q'}}\right) = \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^{p'}\,\partial z^{q'}}\frac{\partial z^k}{\partial x^i} + \frac{\partial x^i}{\partial z^{p'}}\frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i\,\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial z^{q'}}.$$

Поэтому

$$\Gamma^k_{pq}\frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}}\frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}} + \frac{\partial^2 z^k}{\partial z^{p'}\,\partial z^{q'}} = \frac{\partial z^k}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial z^{p'}\,\partial z^{q'}}.$$

Отсюда следует равенство

$$\frac{\partial z^{k'}}{\partial z^k}\left(\Gamma^k_{pq}\frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}}\frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}} + \frac{\partial^2 z^q}{\partial z^{p'}\,\partial z^{q'}}\right) = \frac{\partial z^{k'}}{\partial z^k}\frac{\partial z^k}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial z^{p'}\,\partial z^{q'}} = \frac{\partial^2 x^j}{\partial z^{p'}\,\partial z^{q'}}\frac{\partial z^{k'}}{\partial x^j} = \Gamma^{k'}_{p'q'}.$$

Окончательно имеем формулу преобразования

$$\Gamma^{k'}_{p'q'} = \frac{\partial z^{k'}}{\partial z^k}\left(\Gamma^k_{pq}\frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}}\frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}} + \frac{\partial^2 z^k}{\partial z^{p'}\,\partial z^{q'}}\right). \qquad (22)$$

Полученные результаты мы используем как идейную основу для выработки более общего понятия ковариантного дифференцирования тензоров, которое уже не связано ни с какой первоначальной евклидовой системой координат.

Определение 1. Говорят, что задана *операция ковариантного дифференцирования* (*взятия градиента*) тензоров любого типа, если в любой системе координат $z^1, \ldots, z^n$ задан набор функций $\Gamma^k_{pq}(z)$, который при замене координат $z = z(z')$ преобразуется по формуле (22). Величины $\Gamma^k_{pq}(z)$ называются *символами Кристоффеля*.

Для векторов и ковекторов определим операцию ковариантного дифференцирования (градиента) формулами

$$T^i_{;k} = \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk}T^j,$$

$$T_{i;k} = \frac{\partial T_i}{\partial x^k} - \Gamma^j_{ik}T_j,$$

а для общих тензоров — формулой (19). Оказывается, закон преобразования (22) для компонент Γ^k_{ij} определяется из того требования, что градиент тензора есть снова тензор (хотя сами Γ^k_{ij} не образуют тензора). Это будет доказано в следующем пункте.

Замечание 1. Операцию ковариантного дифференцирования (градиента) часто называют *дифференциально-геометрической связностью.*

Замечание 2. Связность называется евклидовой, если существуют такие координаты $x^1, \ldots, x^n$, что $\Gamma^k_{ij}=0$ (или

$$T^{(i)}_{(j);k}=\frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^k}$$

в этих координатах). Такие координаты также называются евклидовыми.

Замечание 3. Операцию ковариантного дифференцирования часто обозначают символом ∇:

$$\nabla_k T^{(i)}_{(j)}=T^{(i)}_{(j);k}.$$

2. Ковариантное дифференцирование тензоров произвольного ранга. Итак, мы определили ковариантное дифференцирование векторных (ковекторных) полей как операцию, которая в каждой системе координат $x^1, \ldots, x^n$ записывается формулой

$$T^i_{;j}=\frac{\partial T^i}{\partial x^j}+\Gamma^i_{kj}T^k \quad \text{(векторы)}, \tag{23}$$

$$T_{i;j}=\frac{\partial T_i}{\partial x^j}-\Gamma^k_{ij}T_k \quad \text{(ковекторы)}. \tag{24}$$

Здесь Γ^i_{kj}—некоторые функции в данной системе координат, при замене координат, преобразующиеся по закону (22) (символы Кристоффеля).

Наоборот, пусть в каждой системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ заданы величины $\Gamma^i_{kj}(x)$. Зададим ковариантную производную векторных и ковекторных полей формулами (23), (24). Покажем, что закон преобразования (22) для величин Γ^i_{kj} при заменах координат $x^i=x^i(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ определяется, исходя из следующего требования: *результат операции ковариантного дифференцирования есть тензор.* Имеет место

Теорема 5. *При замене координат* $x^i=x^i(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ *величины* Γ^i_{kj} *преобразуются по формуле*

$$\Gamma^{i'}_{k'j'}=\Gamma^i_{kj}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'}\partial x^{j'}}. \tag{25}$$

Доказательство. Так как выражение

$$\frac{\partial T^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj}T^k = T^i_{;j}$$

является тензором, то имеем $\left(\text{используя равенство } T^i = T^{i'}\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)$

$$T^{i'}_{;j'} = \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{j'}} + \Gamma^{i'}_{k'j'}T^{k'} =$$

$$= \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj}T^k\right)\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial T^i}{\partial x^{j'}} + \Gamma^i_{kj}T^k\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} =$$

$$= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^{j'}}\left(T^{k'}\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\right) + \Gamma^i_{kj}T^{k'}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}}_{\delta^{i'}_{k'}}\frac{\partial T^{k'}}{\partial x^{j'}} + T^{k'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'}\partial x^{j'}} + \Gamma^i_{kj}T^{k'}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} =$$

$$= \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{j'}} + \left(\Gamma^i_{kj}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^k\partial x^{j'}}\right)T^{k'},$$

откуда и вытекает требуемое утверждение.

Следствие 1. *Символ Γ^i_{kj} преобразуется как тензор только при линейных или аффинных преобразованиях координат* $x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$, *где* $\dfrac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'}\partial x^{j'}} \equiv 0$ *для всех* i, k', j'.

Следствие 2. *Альтернированное выражение*

$$T^i_{kj} = \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{[kj]} \tag{26}$$

образует тензор (тензор кручения).

Доказательство. Из формулы (25) видно, что при перестановке индексов k' и j' слагаемое $\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\dfrac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'}\partial x^{j'}}$ не изменится. Поэтому закон преобразования для $T^{i'}_{k'j'}$ вообще не будет содержать этого слагаемого, т. е. будет тензорным. Базируясь на результате следствия 2, введем

Определение 2. Связность Γ^i_{kj} называется *симметричной*, если тензор кручения $T^i_{kj} = \Gamma^i_{[kj]}$ тождественно равен нулю, или $\Gamma^i_{k} = \Gamma^i_{jk}$.

Пример. Если существуют евклидовы координаты $x^1, \ldots, x^n$, где $\Gamma^i_{kj} \equiv 0$, то тензор кручения равен нулю и, следовательно, евклидова связность симметрична. В других координатах $x^{1'}, \ldots,$

..., $x^{n'}$, где $x^i = x^i(x')$, символы $\Gamma^{i'}_{k'j'}$ имеют вид

$$\Gamma^{i'}_{k'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'}\,\partial x^{j'}}.$$

Это выражение симметрично по k', j'.

Перейдем теперь к тензорам произвольного ранга. Ковариантное дифференцирование тензоров любого ранга однозначно определяется следующими требованиями:

а) ковариантное дифференцирование — линейная операция;

б) ковариантная производная тензора нулевого ранга (функции) есть обычная производная

$$\nabla_k f = \frac{\partial f}{\partial x^k}; \tag{27}$$

в) ковариантная производная векторного (ковекторного) поля задается формулами (23), (24);

г) ковариантная производная произведения тензоров вычисляется по формуле дифференцирования произведения:

$$\nabla_k T^{(i)(j)}_{(p)(q)} = \left(\nabla_k R^{(i)}_{(p)}\right) S^{(j)}_{(q)} + R^{(i)}_{(p)}\left(\nabla_k S^{(j)}_{(q)}\right), \tag{28}$$

где $T^{(i)(j)}_{(p)(q)} = R^{(i)}_{(p)} S^{(j)}_{(q)}$ — произведение тензоров.

В качестве основного примера мы рассмотрим тензоры 2-го ранга T^{ij}, T^i_j, T_{ij}. Имеет место

Теорема 6. *При выполнении перечисленных условий ковариантная производная тензоров 2-го ранга задается формулами*

$$\nabla_k T^{ij} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{lk} T^{lj} + \Gamma^j_{lk} T^{il}, \tag{29}$$

$$\nabla_k T^i_j = \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} + \Gamma^i_{lk} T^l_j - \Gamma^l_{jk} T^i_l, \tag{30}$$

$$\nabla_k T_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} T_{lj} - \Gamma^l_{jk} T_{il}. \tag{31}$$

Для тензора $T^{(i)}_{(j)}$, $(i) = i_1 \ldots i_p$, $(j) = j_1 \ldots j_q$, типа (p, q) ковариантная производная вычисляется по формуле

$$\nabla_k T^{(i)}_{(j)} = \frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^k} - T^{(i)}_{jj_2\ldots j_q}\Gamma^j_{j_1k} - \ldots - T^{(i)}_{j_1\ldots j}\Gamma^j_{j_qk} + \\ + T^{ii_2\ldots i_p}_{(j)}\Gamma^{i_1}_{ik} + \ldots + T^{i_1\ldots i}_{(j)}\Gamma^{i_p}_{ik}. \tag{32}$$

Доказательство. Проведем его для тензоров T_{ij} типа (0, 2), для остальных типов оно полностью аналогично.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базисные векторные поля; $e^1, \ldots, e^n$ — дуальный базис ковекторных полей: $\langle e^i, e_j\rangle = \delta^i_j$. Компоненты этих тензоров имеют вид

$$(e_i)^j = \delta_i^j = (e^j)_i.$$

Поэтому из формул (23), (24) получаем

$$\nabla_k e_i = \Gamma_{ik}^j e_j, \tag{33}$$

$$\nabla_k e^i = -\Gamma_{jk}^i e^j \tag{34}$$

(эти формулы можно взять за определение величин Γ_{jk}^i).

Любой тензор T с компонентами $T_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}$ имеет вид

$$T = T_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}.$$

В частности, тензор типа (0, 2) имеет вид $T = T_{ij} e^i \otimes e^j$. Используя свойства операции ∇_k, тогда имеем

$$\nabla_k(T) = \nabla_k(T_{ij}) e^i \otimes e^j + T_{ij} \nabla_k e^i \otimes e^j + T_{ij} e^i \otimes \nabla_k e^j =$$

$$= \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} e^i \otimes e^j - T_{ij} \Gamma_{lk}^i e^l \otimes e^j - T_{ij} e^i \otimes \Gamma_{lk}^j e^l =$$

$$= \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^l T_{lj} - \Gamma_{jk} T_{il} \right) e^i \otimes e^j.$$

Следовательно, компоненты тензора $\nabla_k T$ имеют вид

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^l T_{lj} - \Gamma_{jk}^l T_{il},$$

а это и есть $T_{ij;k}$ по определению. Теорема доказана.

Замечание. Если T^i — векторное поле, T_i — ковекторное поле, то определено скалярное поле $T^i T_i$ (след произведения тензоров). Согласно требованиям а) — г) имеет место формула

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(T^i T_i) = (\nabla_k T^i) T_i + T^i (\nabla_k T_i) =$$

$$= \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^i T^j \right) T_i + \left(\frac{\partial T_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^j T_j \right) T^i =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^k}(T^i T_i) + \underbrace{\Gamma_{jk}^i T^j T_i - \Gamma_{ik}^j T_j T^i}_{0}.$$

Из этой формулы мы видим, что компоненты Γ_{ik}^j ковариантного дифференцирования ковекторных полей должны быть противоположны по знаку (и совпадать по модулю) с компонентами для дифференцирования векторных полей, чтобы для скаляра $T^i T_i$ была верна формула

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(T^i T_i) = (\nabla_k T^i) T_i + T^i (\nabla_k T_i).$$

Задача. Пусть $\xi = \dot{\gamma}$ — вектор скорости кривой $\gamma = \gamma(t)$. Определим ковариантную производную векторного поля η вдоль кривой γ, полагая $\nabla_{\dot{\gamma}}\eta = \xi^i \nabla_i \eta$. Показать, что поле $\nabla_{\dot{\gamma}}\eta$ зависит только от значений поля η на кривой γ.

§ 29. Ковариантное дифференцирование и метрика

1. Параллельный перенос векторных полей. Если $\xi = (\xi^k)$ — любой вектор в точке P, то определена для любого тензора $T^{(i)}_{(j)}$ типа (p, q) производная по направлению

$$\nabla_\xi T^{(i)}_{(j)} = \xi^k \nabla_k T^{(i)}_{(j)}. \tag{1}$$

Это — тензор того же типа (p, q) в точке P. Для скаляров (тензоров нулевого ранга) операция $\nabla_\xi f$ имеет вид

$$\nabla_\xi f = \xi^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \equiv \partial_\xi f, \tag{2}$$

т. е. совпадает с производной функции f по направлению ξ (в данной точке). Напомним (см. § 23), что если мы двигаемся вдоль некоторой кривой в пространстве

$$x^i = x^i(t), \quad i = 1, \ldots, n,$$

и если производная функции f по направлению вектора скорости этой кривой равна нулю, то функция не меняется вдоль кривой: если $\xi^k \frac{\partial f}{\partial x^k} = \frac{d}{dt} f(x^1(t), \ldots, x^n(t)) \equiv 0$, где $\xi^k = \frac{dx^k}{dt}$ — вектор скорости, то

$$f(x^1(t), \ldots, x^n(t)) = \text{const}.$$

Верно ли подобное для векторных и тензорных полей? Этот вопрос не имеет пока смысла, потому что вектор (или тензор) имеет разные компоненты в разных системах координат; поэтому мы не можем сравнивать два вектора или тензора, заданных в разных точках пространства. По крайней мере такое сравнение требует дополнительной геометрической структуры в пространстве; этой дополнительной структурой и является ковариантное дифференцирование (связность).

Пусть в пространстве заданы координаты $(x^1, \ldots, x^n)$, ковариантное дифференцирование Γ^i_{kj} и произвольная кривая $x^i(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$.

Определение 1. Мы будем говорить, что векторное (тензорное) поле T является *ковариантно постоянным* или *параллельным* вдоль кривой $x^i = x^i(t)$ на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$, если ковариантная производная поля T в точках кривой по направлению