Задача. Пусть $\xi = \dot{\gamma}$ — вектор скорости кривой $\gamma = \gamma(t)$. Определим ковариантную производную векторного поля η вдоль кривой γ, полагая $\nabla_{\dot{\gamma}} \eta = \xi^i \nabla_i \eta$. Показать, что поле $\nabla_{\dot{\gamma}} \eta$ зависит только от значений поля η на кривой γ.

§ 29. Ковариантное дифференцирование и метрика

1. Параллельный перенос векторных полей. Если $\xi = (\xi^k)$ — любой вектор в точке P, то определена для любого тензора $T^{(i)}_{(j)}$ типа (p, q) производная по направлению

$$\nabla_\xi T^{(i)}_{(j)} = \xi^k \nabla_k T^{(i)}_{(j)}. \tag{1}$$

Это — тензор того же типа (p, q) в точке P. Для скаляров (тензоров нулевого ранга) операция $\nabla_\xi f$ имеет вид

$$\nabla_\xi f = \xi^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \equiv \partial_\xi f, \tag{2}$$

т. е. совпадает с производной функции f по направлению ξ (в данной точке). Напомним (см. § 23), что если мы двигаемся вдоль некоторой кривой в пространстве

$$x^i = x^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

и если производная функции f по направлению вектора скорости этой кривой равна нулю, то функция не меняется вдоль кривой: если $\xi^k \dfrac{\partial f}{\partial x^k} = \dfrac{d}{dt} f(x^1(t), \ldots, x^n(t)) \equiv 0$, где $\xi^k = \dfrac{dx^k}{dt}$ — вектор скорости, то

$$f(x^1(t), \ldots, x^n(t)) = \text{const}.$$

Верно ли подобное для векторных и тензорных полей? Этот вопрос не имеет пока смысла, потому что вектор (или тензор) имеет разные компоненты в разных системах координат; поэтому мы не можем сравнивать два вектора или тензора, заданных в разных точках пространства. По крайней мере такое сравнение требует дополнительной геометрической структуры в пространстве; этой дополнительной структурой и является ковариантное дифференцирование (связность).

Пусть в пространстве заданы координаты $(x^1, \ldots, x^n)$, ковариантное дифференцирование Γ^i_{kj} и произвольная кривая $x^i(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$.

Определение 1. Мы будем говорить, что векторное (тензорное) поле T является *ковариантно постоянным* или *параллельным* вдоль кривой $x^i = x^i(t)$ на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$, если ковариантная производная поля T в точках кривой по направлению вектора скорости кривой равна нулю:

$$\nabla_\xi T = \xi^k \nabla_k T = 0, \qquad a \leqslant t \leqslant b, \tag{3}$$

$$\xi^k = \frac{dx^k}{dt}.$$

Для векторных полей мы имеем

$$\nabla_\xi T^i = \xi^k \nabla_k T^i = \xi^k \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} T^j \right) = 0. \tag{4}$$

Подчеркнем, что понятие параллельности, вообще говоря, зависит от кривой. Исключение представляет лишь евклидова геометрия: в евклидовых координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ мы определяем параллельные векторные поля как поля, имеющие постоянные компоненты в этих координатах (евклидовых). Эти поля, очевидно, параллельны вдоль любой кривой. Поскольку результат ковариантного дифференцирования не зависит от выбора координат, те же поля будут параллельны в любой системе координат $(z^1, \ldots, z^n)$, хотя у них в новой системе координат компоненты будут зависеть от точки.

Мы видим, что понятие параллельности векторов в разных точках зависит как от способа ковариантного дифференцирования (от дифференциально-геометрической связности), так и от пути, соединяющего эти две точки. Чтобы связать введенные геометрические представления с максимально наглядным школьным материалом, вспомним так называемый пятый постулат Евклида: «Если в точке P задана прямая, то через любую точку Q проходит лишь одна параллельная ей прямая». Для нас будет удобно такое понимание этого постулата (возможно, не совсем формальное): в евклидовой геометрии, если в точке P задан вектор $(T^i)_P$, то в любой точке Q существует, причем только один, параллельный ему вектор $\left(T^i_{\parallel}\right)_Q$.

Здесь уместно поставить вопрос: что такое вообще паралельные векторы, прикрепленные к разным точкам P и Q? По определению вектор прикреплен к данной точке (как и любой тензор).

Определим важное понятие параллельного переноса вектора T^i из точки $P = \left(x_0^1, \ldots, x_0^n\right)$ в точку $Q = \left(x_1^1, \ldots, x_1^n\right)$ вдоль кривой $x^i(t)$, где $x^i(0) = x_0^i$, $x^i(1) = x_1^i$.

Определение 2. *Параллельным переносом* вектора T^i_P из точки $P = \left(x_0^1, \ldots, x_0^n\right)$ в точку $Q = \left(x_1^1, \ldots, x_1^n\right)$ вдоль кривой $x^i = x^i(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, ведущей из P в Q, называется векторное поле T^i, заданное во всех точках кривой и параллельное вдоль этой кривой: $\frac{dx^k}{dt} \nabla_k T^i = 0$ для всех $0 \leqslant t \leqslant 1$. При $t = 0$ векторное поле T^i в точке P должно совпадать с исходным вектором T^i_P. При $t = 1$ векторное поле T^i в точке Q есть вектор T^i_Q, называющийся *результатом параллельного переноса* вектора T^i_P вдоль заданной кривой $x^i = x^i(t)$ из P в Q.

В координатах $x^1, \ldots, x^n$ получаем

$$\frac{dx^k}{dt}\nabla_k T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} + T^j\Gamma^i_{jk}\frac{dx^k}{dt} = \frac{dT^i}{dt} + \left(\frac{dx^k}{dt}\Gamma^i_{jk}\right)T^j = 0. \qquad (5)$$

Это — уравнение параллельного переноса. Начальное условие (при $t=0$):

$$T^i(0) = T^i_P, \qquad i = 1, \ldots, n. \qquad (6)$$

Уравнение (5) линейно по T^i. Из теоремы существования и единственности решений дифференциальных уравнений и теоремы о продолжаемости решения мы для любой гладкой кривой получим результат:

Теорема 1. *Вдоль любой фиксированной гладкой кривой результат параллельного переноса существует, однозначно определяется начальным вектором T^i_P и линейно зависит от начального вектора T^i_P.*

Итак, параллельный перенос вектора вдоль кривой зависит от связности Γ^i_{jk}. Если связность евклидова, т. е. $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$ в евклидовых координатах, то получаем уравнение параллельного переноса в виде $\frac{dT^i}{dt} = 0$.

Следствие. *В евклидовой геометрии и в евклидовых координатах параллельными вдоль любой кривой являются векторы, исходящие из разных точек и имеющие одинаковые компоненты. В любых координатах результат параллельного переноса вектора вдоль кривой не зависит от кривой, если геометрия евклидова.*

Теперь уже ясно интуитивное различие между кривой и евклидовой геометриями: перенося параллельно один и тот же вектор вдоль разных кривых из P в Q, при наличии кривизны получим разные результаты.

К вопросу о численном измерении кривизны мы перейдем в следующем параграфе.

2. Геодезические. Мы переходим к рассмотрению линий, являющихся аналогом прямых для случая произвольной связности. Эти линии называются *геодезическими*.

Определение 3. Линия $x^i = x^i(t)$ называется геодезической, если ее вектор скорости $T^i = \frac{dx^i}{dt}$ параллелен вдоль нее самой:

$$\nabla_T(T) = 0. \qquad (7)$$

В координатах имеем

$$0 = \nabla_T(T)^j = \frac{dx^i}{dt}\nabla_i\left(\frac{dx^j}{dt}\right) = \frac{dx^i}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{dx^j}{dt}\right) + \Gamma^j_{ki}\frac{dx^k}{dt}\right] = \frac{d^2x^j}{dt^2} + \Gamma^j_{ki}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^i}{dt}.$$

Итак, мы получили уравнение геодезических

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} + \Gamma^j_{ki}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^i}{dt} = 0, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Если $\Gamma^j_{ki} = 0$, то решениями этого уравнения являются обычные прямые, как и должно быть в евклидовой геометрии.

Для произвольной связности уравнение (8) — это система дифференциальных уравнений второго порядка. В окрестности точки $(x^1_0, \ldots, x^n_0)$ существует единственное решение этого уравнения с начальными условиями

$$x^j\big|_{t=0} = x^j_0, \quad \left.\frac{dx^j}{dt}\right|_{t=0} = \dot{x}^j_0, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

для любых x^j_0 и $\dot{x}^j_0$ (по теореме существования и единственности решений). Поэтому справедлива следующая

Теорема 2. *В некоторой окрестности любой точки P и для любого вектора T^i_P в этой точке существует единственная геодезическая связности (Γ^i_{jk}), начинающаяся в точке P с начальным вектором скорости T^i_P.*

Замечание. Из уравнения (8) видно, что геодезические данной связности зависят только от «симметричной части» связности $\Gamma^i_{(jk)} = \Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj}$.

3. Связности, согласованные с метрикой. В этом курсе мы имели два определения евклидовых координат:

1) координаты $x^1, \ldots, x^n$ евклидовы, если метрика g_{ij} имеет в них евклидов вид:

$$g_{ij} = \delta_{ij}; \tag{10}$$

2) координаты $x^1, \ldots, x^n$ евклидовы, если компоненты Γ^k_{ij} связности в этих координатах нулевые:

$$\Gamma^k_{ij} \equiv 0, \qquad i, j, k = 1, \ldots, n \tag{11}$$

(более общо, $\Gamma^k_{ij} = -\Gamma^k_{ji}$ для несимметричных связностей).

Каково взаимоотношение между этими двумя определениями евклидовых координат?

Следует сразу отметить, что понятие связности и понятие римановой метрики не связаны между собой. Это две независимые структуры в рассматриваемой области пространства, так что определения (10) и (11) — это определения разных понятий.

Однако существует способ сопоставить метрике связность, при котором определения 1) и 2) дают одно и то же с точностью до аффинного преобразования.

Определение 4. Связность Γ^k_{ij} называется *согласованной с метрикой* g_{ij}, если ковариантная производная метрического тензора тождественно равна нулю:

$$\nabla_k g_{ij} \equiv 0, \quad k,\ i,\ j = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Укажем два свойства связности, согласованной с метрикой.

1. *Если связность согласована с метрикой, то операция опускания любого тензорного индекса коммутирует с ковариантным дифференцированием.*

Доказательство. Из свойств операции ∇_k (формула Лейбница) и формулы (12) вытекает формула

$$\nabla_k \left(g_{lm} T^{(i)}_{(j)}\right) = g_{lm} \left(\nabla_k T^{(i)}_{(j)}\right)$$

для любого тензора $T^{(i)}_{(j)}$ типа (p, q). Так как операция ковариантного дифференцирования линейна, то отсюда и вытекает требуемое утверждение.

2. *Если векторные поля $T^i(t)$ и $S^i(t)$ параллельны вдоль кривой $x^i = x^i(t)$, то их скалярное произведение постоянно вдоль этой кривой.*

Доказательство. Докажем, что $\frac{d}{dt}\langle T, S\rangle = \frac{d}{dt}\left(g_{ij} T^i S^j\right) = 0$. Имеем

$$\frac{d}{dt}\left(g_{ij} T^i S^j\right) = \frac{dx^k}{dt} \nabla_k \left(g_{ij} T^i S^j\right) = \frac{dx^k}{dt} g_{ij} \nabla_k \left(T^i S^j\right) =$$

$$= g_{ij} \left(\frac{dx^k}{dt} \nabla_k T^i\right) S^j + g_{ij} T^i \left(\frac{dx^k}{dt} \nabla_k S^j\right) = 0.$$

Другими словами, параллельный перенос векторов из точки P в точку Q вдоль данной кривой является ортогональным преобразованием касательного пространства в точке P в касательное пространство в точке Q, если связность согласована с метрикой.

Как описать связности, согласованные с данной метрикой? Имеет место важная

Теорема 3. *Если метрика g_{ij} невырождена (т. е. $g = \det(g_{ij}) \neq 0$), то существует и единственна связность, симметричная и согласованная с этой метрикой g_{ij}. Эта связность в любой системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ задается формулами*

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right) \tag{13}$$

(формулы Кристоффеля).

Доказательство. По определению имеем

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji},$$

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} g_{lj} - \Gamma^l_{jk} g_{il} = 0. \tag{14}$$

Попытаемся решить последнее уравнение относительно Γ^k_{ij}. По определению опускания индекса имеем

$$\Gamma_{k,ij} = g_{kl}\Gamma^l_{ij}.$$

Уравнения (14) примут вид

$$\Gamma_{i,jk} + \Gamma_{j,ik} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}.$$

При этом $\Gamma_{i,jk} = \Gamma_{i,kj}$, $\Gamma_{j,ik} = \Gamma_{j,ki}$. Переставляя циклически индексы i, j, k, получим

$$\Gamma_{i,jk} + \Gamma_{j,ik} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k},$$

$$\Gamma_{j,ki} + \Gamma_{k,ji} = \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i},$$

$$\Gamma_{i,kj} + \Gamma_{k,ij} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}.$$

Если (a), (b), (c) — левые части этих формул, то в силу симметричности связности имеет место равенство $(b)+(c)-(a) = 2\Gamma_{k,ij}$. Поэтому

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}\right) = g_{kl}\Gamma^l_{ij}.$$

Поднимая индекс k, получаем требуемую формулу. Теорема доказана.

Следствие. *Если координаты выбраны так, что в данной точке все первые производные от g_{ij} равны нулю, то в этой точке символы Кристоффеля Γ^k_{ij} равны нулю (для симметричной связности, согласованной с метрикой).*

Пример 1. Рассмотрим случай поверхности, расположенной в трехмерном евклидовом пространстве, с координатами $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ (евклидовыми):

$$x^1 = x^1(z^1, z^2), \quad x^2 = x^2(z^1, z^2), \quad x^3 = x^3(z^1, z^2).$$

Предположим, как мы это уже делали в § 8, что ось x^3 перпендикулярна касательной плоскости к поверхности в точке P, а оси x^1, x^2 ей параллельны. Около точки P мы выберем в качестве параметров x^1 и x^2; тогда поверхность задается уравнением

$$x^3 = f(z^1, z^2), \quad z^1 = u = x^1, \quad z^2 = v = x^2,$$

причем $z^1 = x^1$, $z^2 = x^2$; более того, так как ось x^3 ортогональна к поверхности в точке $P = (0, 0)$, получаем

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z^1}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{\partial f}{\partial z^2}\right|_{(0,0)} = 0 \text{ или } \operatorname{grad} f|_{(0,0)} = 0 \text{ в точке } P = (0, 0).$$

Для метрики g_{ij} имеем (§ 7, п. 3)

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial z^i}\frac{\partial f}{\partial z^j}.$$

В точке P, где $\frac{\partial f}{\partial z^i} = 0$, имеем $g_{ij} = \delta_{ij}$ и

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial z^k} = \frac{\partial}{\partial z^k}\left(\frac{\partial f}{\partial z^i}\frac{\partial f}{\partial z^j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^i \partial z^k}\frac{\partial f}{\partial z^j} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^j \partial z^k}\frac{\partial f}{\partial z^i} = 0.$$

Поэтому в этих координатах в точке P все символы Γ^q_{ik} равны нулю ($q, i, k = 1, 2$).

Пример 2. Для векторного поля (T^i) определялась дивергенция

$$\operatorname{div} T^i = \nabla_i T^i = T^i_{;i}. \tag{15}$$

Для симметричной связности, согласованной с римановой (псевдоримановой) метрикой, имеем $\nabla_i T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ki} T^k$ и

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{il}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^l}\right) = \frac{1}{2} g^{il}\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\ln\left(\sqrt{|g|}\right),$$

где $g = \det(g_{ij})$. Итак,

$$\nabla_i T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^k} T^k = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}\, T^i\right). \tag{16}$$

Вывод. *Дивергенция векторного поля $\nabla_i T^i$ имеет обычную форму $\nabla_i T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^i}$ в том и только в том случае, если элемент объема $\sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ совпадает с евклидовым: $\sqrt{|g|} = 1$, где $g = \det(g_{ij})$.*

Теперь уже мы имеем определенную связь между связностью (способом ковариантного дифференцирования) и римановой метрикой g_{ij}: любая риманова геометрия порождает определенный симметричный способ дифференцирования тензоров, при котором она сама считается постоянной.

4. Связности, согласованные с комплексной структурой. Рассмотрим область D в комплексном пространстве с комплексными координатами $z^1, \ldots, z^n$, $z^k = x^k + iy^k$, где $x^1, \ldots, x^n$, $y^1, \ldots, y^n$ — вещественные координаты в овеществленной области $D^{\mathbb{R}}$. Пусть в области D задана эрмитова метрика

$$ds^2 = h_{i\bar{k}} dz^i d\bar{z}^k, \quad h_{k\bar{i}} = \overline{h}_{i\bar{k}} \tag{17}$$

(напомним (см. § 27), что мы надчеркиваем индекс k, соответствующий $d\bar{z}^k$). Она определяет нам риманову метрику в области

$D^{\mathbb{R}}$ по формуле

$$ds^2_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re}\left(h_{i\bar{k}}\right)[dx^i\, dx^k + dy^i\, dy^k]. \tag{18}$$

В силу сказанного в предыдущем пункте в области $D^{\mathbb{R}}$ существует единственная симметричная связность, согласованная с метрикой $ds^2_{\mathbb{R}}$. Эта связность, вообще говоря, не будет согласована с комплексной структурой в D в том смысле, что параллельный перенос вектора вдоль пути не будет являться унитарным преобразованием. Имеет место

Теорема 4. *Симметричная связность, согласованная с метрикой ds^2, будет согласована с комплексной структурой в области D тогда и только тогда, когда метрика ds^2 кэлерова.*

Доказательство. Напомним (см. § 27), что эрмитова метрика ds^2 называется кэлеровой, если форма Ω, определяемая формулой

$$\Omega = \frac{i}{2} h_{j\bar{k}} dz^j \wedge d\bar{z}^k, \tag{19}$$

замкнута:

$$d\Omega = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial h_{j\bar{k}}}{\partial z^i} - \frac{\partial h_{i\bar{k}}}{\partial z^j} = 0, \quad \frac{\partial h_{j\bar{k}}}{\partial \bar{z}^i} - \frac{\partial h_{j\bar{i}}}{\partial \bar{z}^k} = 0. \tag{20}$$

Введем в пространстве касательных векторов комплексный базис

$$\frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - i\frac{\partial}{\partial y^k}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} + i\frac{\partial}{\partial y^k}\right), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Любой вектор ξ имеет вид $\xi = (\xi^k, \xi^{\bar{k}})$:

$$\xi = \xi^k \frac{\partial}{\partial z^k} + \xi^{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k},$$

причем $\xi^{\bar{k}} = \overline{\xi^k}$, если ξ — вещественный вектор. В таком базисе скалярное произведение $ds^2_{\mathbb{R}}$ задается матрицей $g_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, \ldots$ $\ldots, n, \bar{1}, \ldots, \bar{n}$:

$$g_{ij} = g_{\bar{i}\bar{j}} = 0; \quad g_{i\bar{j}} = h_{i\bar{j}}, \quad g_{\bar{i}j} = \overline{h_{i\bar{j}}}, \tag{21}$$

т. е. матрица $G = (g_{\alpha\beta})$ имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 0 & H \\ \overline{H} & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \left(h_{i\bar{j}}\right). \tag{22}$$

Тогда обратная матрица G^{-1} будет иметь вид

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & H^{-1} \\ \overline{H}^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Вычислим компоненты $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ связности, согласованной с метрикой

$g_{\alpha\beta}$, используя формулы Кристоффеля. Из вида метрики $g_{\alpha\beta}$ будем иметь

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{i\bar{m}} \left(\frac{\partial g_{j\bar{m}}}{\partial z^k} + \frac{\partial g_{\bar{m}k}}{\partial z^j} \right),$$

$$\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}} = \frac{1}{2} g^{m\bar{i}} \left(\frac{\partial g_{\bar{k}m}}{\partial \bar{z}^j} + \frac{\partial g_{m\bar{j}}}{\partial \bar{z}^k} \right) = \overline{\Gamma^i_{jk}}.$$

Далее,

$$\Gamma^i_{\bar{j}\bar{k}} = \frac{1}{2} g^{i\bar{m}} \left(\frac{\partial g_{\bar{m}\bar{k}}}{\partial \bar{z}^j} + \frac{\partial g_{\bar{j}\bar{m}}}{\partial \bar{z}^k} - \frac{\partial g_{\bar{j}\bar{k}}}{\partial \bar{z}^m} \right) = 0;$$

по аналогичной причине $\Gamma^{\bar{i}}_{jk} = 0$. Наконец,

$$\Gamma^i_{j\bar{k}} = \frac{1}{2} g^{i\bar{m}} \left(\frac{\partial g_{j\bar{m}}}{\partial \bar{z}^k} - \frac{\partial g_{j\bar{k}}}{\partial \bar{z}^m} \right) = \frac{1}{2} g^{i\bar{m}} \left(\frac{\partial h_{jm}}{\partial \bar{z}^k} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial \bar{z}^m} \right) = 0$$

— это выражение равно нулю в силу условия кэлеровости. Аналогичным образом проверяется, что условие кэлеровости обеспечивает обращение в нуль компонент $\Gamma^i_{\bar{j}k}$, $\Gamma^{\bar{i}}_{j\bar{k}}$, $\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}k}$.

Итак, мы показали, что среди величин $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ отличны от нуля только Γ^i_{jk} и $\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}}$, причем

$$\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}} = \overline{\Gamma^i_{jk}}.$$

Рассмотрим изменение вектора $\xi = (\xi^i, \xi^{\bar{i}})$ при бесконечно малом параллельном переносе вдоль $(\delta z^j, \delta \bar{z}^j)$, где $\delta \bar{z}^j = \overline{\delta z^j}$. В силу доказанного выше будем иметь

$$\begin{aligned} \xi^i &\to \xi^i - \xi^k \Gamma^i_{kj} \delta z^j, \\ \xi^{\bar{i}} &\to \xi^{\bar{i}} - \xi^{\bar{k}} \Gamma^{\bar{i}}_{\bar{k}\bar{j}} \delta \bar{z}^j. \end{aligned} \tag{24}$$

Поэтому, если $A = (a^i_k)$ — матрица, имеющая вид

$$a^i_k = \Gamma^i_{kj} \delta z^j,$$

то для вещественных перемещений $(\delta z^j, \delta \bar{z}^j)$ (с $\delta \bar{z}^j = \overline{\delta z^j}$) матрица соответствующего параллельного переноса будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 - A & 0 \\ 0 & 1 - \bar{A} \end{pmatrix}, \tag{25}$$

что и означает комплексную линейность параллельного переноса (см. § 12).

Задачи. 1. Доказать, что связность согласована с метрикой тогда и только тогда, когда для любых векторных полей η, ξ_1, ξ_2

$$\partial_\eta \langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \langle \nabla_\eta \xi_1, \xi_2 \rangle + \langle \xi_1, \nabla_\eta \xi_2 \rangle.$$

2. Доказать, что при бесконечно малом параллельном переносе вектора ξ^i на δx^k его компоненты изменяются следующим образом (с точностью до малых более высокого порядка):

$$\xi^i \to \xi^i - \xi^j \Gamma^i_{jk} \delta x^k + o(|\delta x|).$$

3. Выразить тензор деформации из § 22 через ковариантные производные.

4. Пусть в области U задана связность; P — фиксированная точка этой области, $T = T_P$ — касательное пространство к U в этой точке. Определим отображение E: $T \to U$. Пусть ξ — вектор из T. Выпустим из точки P геодезическую $\gamma(t)$ с начальным вектором скорости ξ. Положим $E(\xi) = \gamma_\xi(1)$. а) Показать, что отображение E определено в некоторой окрестности начала координат в T и является в ней локальным диффеоморфизмом. б) Показать, что в координатах, определяемых отображением E, все символы Γ^k_{ij} обращаются в нуль в точке P.

5. Уравнение движения точечного электрического заряда в поле магнитного полюса имеет вид

$$\ddot{r} = a\frac{[r, \dot{r}]}{|r|^3}, \quad a = \text{const}.$$

Доказать, что траектория заряда является геодезической линией кругового конуса.

6. Найти все геодезические на плоскости Лобачевского.

7. Доказать, что геодезическими на сфере являются большие круги и только они.

8. Используя геодезические, доказать, что движение, оставляющее на месте точку и репер в этой точке, является тождественным.

9. Доказать, что линии уровня функций

$$z(u, v) = \int \frac{du}{\sqrt{f(u) - a}} \pm \int \frac{du}{\sqrt{g(v) + a}}$$

являются геодезическими в метрике

$$dl^2 = (f(u) + g(v))(du^2 + dv^2), \quad f > 0, \quad g > 0.$$

10. Доказать, что внутренние автоморфизмы $X \mapsto AXA^{-1}$, где $A \in SO(3, \mathbb{R})$, — это все движения метрики Киллинга на $SO(3, \mathbb{R})$, оставляющие неподвижной единицу группы.

11. Для симметричной связности Γ^i_{jk}, согласованной с метрикой g_{ij}, доказать справедливость следующих тождеств:

а) $g^{kl}\Gamma^i_{kl} = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{|g|}\, g^{ik}\right)$;

б) $\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^k}$.

12. Доказать, что две близкие точки в римановом пространстве можно связать геодезической, которая локально единственна.

13. Метрика имеет вид $dl^2 = g_{rr}\,dr^2 + r^2\,d\varphi^2$. Показать, что линия $\varphi = \varphi_0$ из центра — геодезическая.

14. В n-мерном пространстве с метрикой (g_{ij}) получить следующую формулу:

$$\oint_{\partial V} X^i dS_i = \int_V \nabla_i X^i \sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

где

$$dS_i = \frac{1}{(n-1)!} \sqrt{|g|}\, \varepsilon_{i_1 \ldots i_{n-1} i}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{n-1}}$$

(ср. задачу 3 к § 26).

15. Пусть M — поверхность в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, π — линейный оператор, ортогонально проектирующий $\mathbb{R}^n$ на касательное пространство к поверхности M; X, Y — векторные поля в $\mathbb{R}^n$, касающиеся поверхности M. Показать, что связность, согласованная с метрикой, индуцированной на поверхности M, имеет вид

$$\nabla_X Y = \pi\left(X^k \frac{\partial Y}{\partial x^k}\right).$$

§ 30. Тензор кривизны

1. Общий тензор кривизны. В предыдущем параграфе объяснялось, что в неевклидовом пространстве параллельный перенос вектора зависит от пути. Вместе с тем результат параллельного переноса вектора T вдоль пути $x(t)$ определяется уравнением переноса

$$\frac{dT^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} T^k \frac{dx^j}{dt} = 0, \tag{1}$$

которое нужно уметь решать.

Гораздо удобнее, не решая этого уравнения, определить локальную характеристику отклонения связности (Γ^i_{jk}) от евклидовой. Что это за характеристика? Как узнать, существуют ли координаты $x^1, \ldots, x^n$, в которых $\Gamma^i_{jk} = 0$? Конечно, если связность несимметрична, то $T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$ есть ненулевой тензор; поэтому нельзя ввести координат таких, что $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$. В этом случае можно под евклидовыми понимать координаты, в которых $\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} T^i_{jk}$, т. е. связность Γ^i_{jk} кососимметрична по нижним индексам (симметрическая часть $\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj} \equiv 0$).

Как выяснить вопрос о существовании евклидовых координат? Нас этот вопрос будет интересовать для симметричных связно-