12. Доказать, что две близкие точки в римановом пространстве можно связать геодезической, которая локально единственна.

13. Метрика имеет вид $dl^2 = g_{rr}\,dr^2 + r^2\,d\varphi^2$. Показать, что линия $\varphi = \varphi_0$ из центра — геодезическая.

14. В n-мерном пространстве с метрикой (g_{ij}) получить следующую формулу:

$$\oint\limits_{\partial V} X^i dS_i = \int\limits_V \nabla_i X^i \sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

где

$$dS_i = \frac{1}{(n-1)!} \sqrt{|g|}\, \varepsilon_{i_1 \ldots i_{n-1} i}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{n-1}}$$

(ср. задачу 3 к § 26).

15. Пусть M — поверхность в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, π — линейный оператор, ортогонально проектирующий $\mathbb{R}^n$ на касательное пространство к поверхности M; X, Y — векторные поля в $\mathbb{R}^n$, касающиеся поверхности M. Показать, что связность, согласованная с метрикой, индуцированной на поверхности M, имеет вид

$$\nabla_X Y = \pi\left(X^k \frac{\partial Y}{\partial x^k}\right).$$

§ 30. Тензор кривизны

1. Общий тензор кривизны. В предыдущем параграфе объяснялось, что в неевклидовом пространстве параллельный перенос вектора зависит от пути. Вместе с тем результат параллельного переноса вектора T вдоль пути $x(t)$ определяется уравнением переноса

$$\frac{dT^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} T^k \frac{dx^j}{dt} = 0, \qquad (1)$$

которое нужно уметь решать.

Гораздо удобнее, не решая этого уравнения, определить локальную характеристику отклонения связности (Γ^i_{jk}) от евклидовой. Что это за характеристика? Как узнать, существуют ли координаты $x^1, \ldots, x^n$, в которых $\Gamma^i_{jk} = 0$? Конечно, если связность несимметрична, то $T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$ есть ненулевой тензор; поэтому нельзя ввести координат таких, что $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$. В этом случае можно под евклидовыми понимать координаты, в которых $\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} T^i_{jk}$, т. е. связность Γ^i_{jk} кососимметрична по нижним индексам (симметрическая часть $\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj} \equiv 0$).

Как выяснить вопрос о существовании евклидовых координат? Нас этот вопрос будет интересовать для симметричных связностей. Мы знаем такое важное свойство частных производных в обычном анализе:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}.$$

Если связность допускает евклидовы координаты $x^1, \ldots, x^n$, то в этих координатах тензоры дифференцируются по обычным формулам:

$$\nabla_k T^{(i)}_{(j)}=\frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^k}.$$

Поэтому

$$(\nabla_k\nabla_l-\nabla_l\nabla_k)\,T^{(i)}_{(j)}=0$$

или

$$T^{(i)}_{(j);k;l}=T^{(i)}_{(j);l;k}.$$

Это — свойство, верное в любых координатах, так как $T^{(i)}_{(j);k;l}$ — тензор. Посмотрим общие связности.

Для векторных полей в любых координатах $x^1, \ldots, x^n$ имеем

$$\nabla_k\nabla_l T^i=\nabla_k\left(\frac{\partial T^i}{\partial x^l}+\Gamma^i_{ql}T^q\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial T^i}{\partial x^l}+\Gamma^i_{ql}T^q\right)+\Gamma^i_{pk}\left(\frac{\partial T^p}{\partial x^l}+\Gamma^p_{ql}T^q\right)-\Gamma^p_{lk}\left(\frac{\partial T^i}{\partial x^p}+\Gamma^i_{qp}T^q\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 T^i}{\partial x^k\partial x^l}+\frac{\partial T^q}{\partial x^k}\Gamma^i_{ql}+\Gamma^i_{pk}\frac{\partial T^p}{\partial x^l}-\Gamma^p_{lk}\frac{\partial T^i}{\partial x^p}+$$

$$+T^q\frac{\partial\Gamma^i_{ql}}{\partial x^k}+\Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{ql}T^q-\Gamma^p_{lk}\Gamma^i_{qp}T^q.$$

Составим выражение $(\nabla_k\nabla_l-\nabla_l\nabla_k)T^i$. После сокращений получим в координатах

$$(\nabla_k\nabla_l-\nabla_l\nabla_k)\,T^i=$$

$$=\left(\frac{\partial\Gamma^i_{ql}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^i_{qk}}{\partial x^l}\right)T^q+\left(\Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{ql}-\Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{qk}\right)T^q-\left(\Gamma^p_{lk}-\Gamma^p_{kl}\right)\frac{\partial T^i}{\partial x^p}.$$

Введем обозначение

$$-R^i{}_{qkl}=\frac{\partial\Gamma^i_{ql}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^i_{qk}}{\partial x^l}+\Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{ql}-\Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{qk}. \qquad (2)$$

Тогда получим формулу

$$(\nabla_k\nabla_l-\nabla_l\nabla_k)\,T^i=-R^i{}_{qkl}T^q+T^p_{kl}\frac{\partial T^i}{\partial x^p}, \qquad (3)$$

где T^p_{kl} — тензор кручения (см. § 28). Оказывается, $R^i{}_{qkl}$ — это тензор; этот тензор называется *тензором Римана* или *римановой* *кривизной.* Для симметричных связностей $T^p_{kl} \equiv 0$. Таким образом, в симметричном случае имеет место следующая

Теорема 1. *Для симметричных связностей и для любого векторного поля T выражение $(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)T^i$ имеет вид $-R^i{}_{qkl}T^q$, где $R^i{}_{qkl}$— тензор Римана, определяемый формулой*

$$-R^i{}_{qkl} = \frac{\partial\Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^i_{qk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{ql} - \Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{qk}.$$

Если связность евклидова, то $R^i{}_{qkl} = 0$. *В точках, где* $\Gamma^i_{pq} = 0$, *верно равенство*

$$-R^i{}_{qkl} = \frac{\partial\Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^i_{qk}}{\partial x^l}.$$

Выведем формулы для кривизны и кручения в инвариантных обозначениях. Если ξ, η, ζ — векторные поля, то положим

$$[T(\xi, \eta)]^i = T^i_{kl}\xi^k\eta^l, \tag{4}$$

$$[R(\xi, \eta)\zeta]^i = R^i{}_{jkl}\xi^k\eta^l\zeta^j. \tag{5}$$

Дадим явное выражение векторных полей $T(\xi, \eta)$ и $R(\xi, \eta)\zeta$ через поля ξ, η, ζ.

Лемма 1. *Для произвольных полей ξ, η, ζ верны равенства*

$$T(\xi, \eta) = \nabla_\xi\eta - \nabla_\eta\xi - [\xi, \eta], \tag{6}$$

$$R(\xi, \eta)\zeta = \nabla_\eta\nabla_\xi\zeta - \nabla_\xi\nabla_\eta\zeta + \nabla_{[\xi, \eta]}\zeta, \tag{7}$$

где $[\xi, \eta]$ — коммутатор векторных полей.

Доказательство. Проверим сначала, что в формулах (6), (7) $T(\xi, \eta)$ и $R(\xi, \eta)\zeta$ линейно зависят от координат полей ξ, η, ζ. Для $T(\xi, \eta)$ имеем: если $\xi \to f\xi$, где f — гладкая функция, то

$$T(f\xi, \eta) = \nabla_{f\xi}\eta - \nabla_\eta(f\xi) - [f\xi, \eta] =$$
$$= f[\nabla_\xi\eta - \nabla_\eta\xi - [\xi, \eta]] - (\partial_\eta f)\xi + (\partial_\eta f)\xi = fT(\xi, \eta),$$

где $\partial_\eta f$ — производная функции f вдоль поля η. Для $R(\xi, \eta)$

$$R(f\xi, \eta) = \nabla_\eta\nabla_{f\xi} - \nabla_{f\xi}\nabla_\eta + \nabla_{[f\xi, \eta]} =$$
$$= f\nabla_\eta\nabla_\xi + (\partial_\eta f)\cdot\nabla_\xi - f\nabla_\xi\nabla_\eta + \nabla_{f[\xi,\eta]-(\partial_\eta f)\xi} = fR(\xi, \eta).$$

Аналогично проверяется, что $R(\xi, f\eta) = fR(\xi, \eta)$. Наконец,

$$R(\xi, \eta)(f\zeta) = \nabla_\eta[(\partial_\xi f)\zeta + f\nabla_\xi\zeta] -$$
$$- \nabla_\xi[(\partial_\eta f)\zeta + f\nabla_\eta\zeta] + (\partial_{[\xi, \eta]}f)\zeta + f\nabla_{[\xi, \eta]}\zeta =$$
$$= (\partial_\eta\partial_\xi f)\zeta + (\partial_\xi f)\nabla_\eta\zeta + (\partial_\eta f)\nabla_\xi\zeta + f\nabla_\eta\nabla_\xi\zeta -$$
$$- (\partial_\xi\partial_\eta f)\zeta - (\partial_\eta f)\nabla_\xi\zeta - (\partial_\xi f)\nabla_\eta\zeta - f\nabla_\xi\nabla_\eta\zeta +$$
$$+ (\partial_\xi\partial_\eta f - \partial_\eta\partial_\xi f)\zeta + f\nabla_{[\xi, \eta]}\zeta = fR(\xi, \eta)\zeta.$$

Теперь в силу доказанной линейности достаточно проверить равенства (6), (7) для базисных векторных полей $\xi = e_k$, $\eta = e_l$, $\zeta = e_j$, где $\xi^i = \delta^i_k$, $\eta^i = \delta^i_l$, $\zeta^i = \delta^i_j$. Но для таких полей требуемые равенства следуют из определения тензоров T^i_{kl} и R^i_{jkl}. Лемма доказана.

Приложение (тетрадный формализм). Пусть в области n-мерного пространства задана метрика g_{ij}. Квадратичную форму $g_{ij}\xi^i\xi^j$ на касательных векторах в каждой точке можно привести к постоянному виду. Такое приведение можно сделать гладко зависящим от точки. Это означает, что (локально) можно выбрать n линейно независимых гладких векторных полей $\xi_1, \ldots, \xi_n$ таких, что их попарные скалярные произведения не зависят от точки:

$$\langle \xi_i, \xi_j \rangle = h_{ij}, \qquad h_{ij} = \text{const}. \tag{8}$$

Например, в общей теории относительности бывает технически удобно выбрать четверку векторов ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 (тетраду), где векторы ξ_0 и ξ_1 изотропны, $\langle \xi_0, \xi_1 \rangle = 1$, а векторы ξ_2, ξ_3 пространственноподобны, $(\xi_2)^2 = (\xi_3)^2 = -1$, $\langle \xi_2, \xi_3 \rangle = 0$.

Рассмотрим попарные коммутаторы $[\xi_i, \xi_j]$ этих векторных полей. Их можно разложить по тому же базису $\xi_1, \ldots, \xi_n$:

$$[\xi_i, \xi_j] = c^k_{ij}\xi_k, \tag{9}$$

где c^k_{ij} — коэффициенты разложения (переменные). Имеет место

Теорема 2. *Для симметричной связности, согласованной с метрикой g_{ij}, справедливы формулы*

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} h^{iq} (c_{jqk} + c_{kqj} - c_{qjk}), \tag{10}$$

где $c_{ijk} \equiv h_{is}c^s_{jk}$, а компоненты связности Γ^i_{jk} определены равенством

$$\nabla_{\xi_k}\xi_j = \Gamma^i_{jk}\xi_i. \tag{11}$$

Доказательство. Из условия симметричности связности $T(\xi_i, \xi_j) = 0$ и формулы (6) имеем

$$\Gamma^k_{ji} - \Gamma^k_{ij} = c^k_{ij}. \tag{12}$$

Далее, обозначим через $\Gamma_{k,ij}$ величину $h_{ks}\Gamma^s_{ij}$. Из условия (11) и согласованности с метрикой получаем

$$0 = \nabla_{\xi_k} \langle \xi_i, \xi_j \rangle = \Gamma_{j,ik} + \Gamma_{i,jk}.$$

Циклически переставив индексы i, j, k, получим систему трех уравнений

$$\Gamma_{i,kj} + \Gamma_{k,ij} = 0,$$
$$\Gamma_{k,ji} + \Gamma_{j,ki} = 0,$$
$$\Gamma_{j,ik} + \Gamma_{i,jk} = 0.$$

Решая эту систему совместно с уравнениями (12), получаем искомые формулы для коэффициентов связности. Теорема доказана.

Используя формулу (7), можно выразить тензор кривизны $\langle R(\xi_i, \xi_j)\xi_k, \xi_l\rangle$ через функции c_{ij}^k и их производные.

2. Симметрии тензора кривизны. Тензор кривизны, порожденный метрикой. Какими свойствами обладает тензор кривизны?

Теорема 3. 1. $R^i_{qkl} = -R^i_{qlk}$ *всегда.*

2. *Для симметричной связности имеет место тождество*

$$R^i_{qkl} + R^i_{klq} + R^i_{lqk} = 0. \tag{13}$$

3. *Для связности, согласованной с метрикой* g_{ik}, *введем тензор* $R_{iqkl} = g_{ip}R^p_{qkl}$. *Тензор* R_{iqkl} *кососимметричен по индексам* i, q:

$$R_{iqkl} = -R_{qikl}. \tag{14}$$

4. *Для тензора кривизны симметричной связности, согласованной с метрикой* g_{ik}, *имеется симметрия вида*

$$R_{iqkl} = R_{kliq}. \tag{15}$$

Доказательство. Равенство 1 очевидно. Для доказательства формулы (13) вычислим выражение $[\nabla_k, \nabla_l]e_q + [\nabla_l, \nabla_q]e_k + [\nabla_q, \nabla_k]e_l$, где e_q — базисные векторы, и воспользуемся равенством $-R^i_{qkl}e_i = [\nabla_k, \nabla_l]e_q$. Будем иметь $[\nabla_k, \nabla_l]e_q + [\nabla_l, \nabla_q]e_k + [\nabla_q, \nabla_k]e_l = \nabla_k(\nabla_l e_q - \nabla_q e_l) + \nabla_l(\nabla_q e_k - \nabla_k e_q) + \nabla_q(\nabla_k e_l - \nabla_l e_k) = 0$ (каждая скобка равна нулю в силу симметричности связности).

Для доказательства третьей симметрии достаточно проверить, что $\langle[\nabla_k, \nabla_l]\xi, \xi\rangle = 0$ для любого векторного поля ξ. Имеем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l}\langle\xi, \xi\rangle = \langle\nabla_k\nabla_l\xi, \xi\rangle + \langle\nabla_l\xi, \nabla_k\xi\rangle,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^k}\langle\xi, \xi\rangle = \langle\nabla_l\nabla_k\xi, \xi\rangle + \langle\nabla_k\xi, \nabla_l\xi\rangle,$$

так как связность согласована с метрикой. Вычитая второе равенство из первого, получим (14), поскольку $\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} = \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^k}$.

Наконец, для тензора кривизны, порожденного метрикой, выведем тождество (15). На рис. 33 сумма выражений, стоящих в вершинах каждой заштрихованной грани, равна нулю в силу симметрий (13) и (14). Сложим эти выражения для граней q и i и вычтем их для граней l и k, получим (15). Теорема доказана.

Из теорем 1 и 3 вытекает

Следствие. *Если тензор Римана не обращается в нуль, то нельзя ввести евклидовы координаты, в которых* $g_{ij} = \delta_{ij}$ *и* $\Gamma^k_{ij} = 0$.

Замечание. Этот результат можно получить иначе. Рассмотрим закон преобразования компонент Γ^k_{ij}: если $x = x(x')$, то

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\left(\Gamma^k_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\right).$$

Пусть связность симметрична, $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$. Мы ищем такие координаты x', что $\Gamma^{k'}_{i'j'} \equiv 0$. Для $x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ получаем уравнения

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}} = -\Gamma^k_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}},$$

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}(x).$$

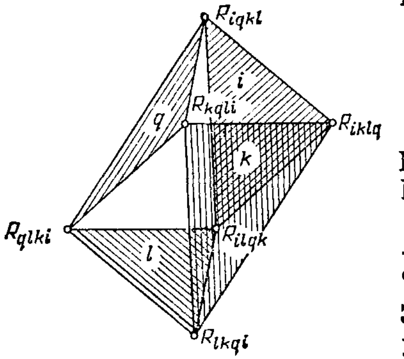

Рис. 33

Можно ли решить эти уравнения? Если они решаются, то

$$\frac{\partial}{\partial x^{k'}}\left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^{i'}}\left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{k'}\partial x^{j'}}\right) = 0.$$

Это — условие на правую часть уравнений, эквивалентное равенству

$$R^i_{\ qkl} \equiv 0.$$

3. Примеры: тензор кривизны двух- и трехмерных пространств, метрики Киллинга. Тензор кривизны — это тензор 4-го ранга. Естественным образом он получался как оператор на векторных полях, зависящий от пары (k, l) кососимметрическим образом:

$$-R^i_{\ qkl}T^q = R^i_{\ qlk}T^q = (\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)T^i - T^p_{kl}\frac{\partial T^i}{\partial x^p},$$

где $T^p_{kl} = \Gamma^p_{kl} - \Gamma^p_{lk}$ — тензор кручения.

В симметрическом случае $T^p_{kl} \equiv 0$. Если связность симметрична и согласована с метрикой g_{ij}, то компоненты Γ^k_{ij} и R^i_{qhl} выражаются через g_{ij} и их производные, причем имеют место симметрии:

1. $R^i_{\ qkl} = -R^i_{\ qlk}$,
2. $R_{iqkl} = g_{im}R^m_{\ qkl} = -R_{qikl}$,
3. $R_{iqkl} = R_{kliq}$,
4. $R^i_{\ qkl} + R^i_{\ lqk} + R^i_{\ klq} = 0$.

Сколько может быть компонент у тензора Римана?

I. Двумерный случай. Из симметрий $R_{iqkl} = -R_{iqlk} = -R_{qikl} = R_{kliq}$ вытекает, что имеется всего одна ненулевая компонента тензора Римана — это R_{1212}. Все остальные либо получаются из нее перестановками, либо равны нулю.

Определение 1. *Тензором Риччи* называется выражение $R_{ql} = R^i{}_{qil}$ — след тензора Римана.

Определение 2. *Скалярной кривизной* называется след тензора Риччи:

$$R = g^{lq}R_{ql} = g^{lq}R^i{}_{qil}. \tag{16}$$

Имеет место важная

Теорема 4. *Для двумерных поверхностей в трехмерном пространстве скалярная кривизна R совпадает с удвоенной гауссовой кривизной. Поэтому гауссова кривизна, в отличие от средней кривизны поверхности, выражается через риманову метрику самой поверхности (является внутренним инвариантом).*

Доказательство. Пусть поверхность задается уравнениями $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, где x, y, z — евклидовы координаты пространства и $(u, v) = (z^1, z^2)$ — координаты на поверхности. Выберем в исследуемой точке $P = (0, 0)$, где ось z нормальна к поверхности, в качестве параметров $u = z^1 = x$, $v = z^2 = y$. Тогда поверхность около точки P запишется уравнением $z = f(x, y)$, где $\operatorname{grad} f|_P = 0$. Для компонент метрики на поверхности получим

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial z^i}\frac{\partial f}{\partial z^j}, \qquad z^1 = x, \quad z^2 = y.$$

В частности, в точке $P = (0, 0)$ все $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial z^k} = 0$. Поэтому в этой точке $\Gamma^k_{ij} = 0$. В такой точке имеем формулу (формула (2))

$$-R^i{}_{qkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial z^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial z^l},$$

$$R_{iqkl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial z^q \partial z^k} + \frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial z^i \partial z^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial z^q \partial z^l} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial z^i \partial z^k}\right).$$

Отсюда получаем ($z^1 = x$, $z^2 = y$)

$$R_{1212} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^2}\right).$$

При этом $g_{11} = f_x^2 + 1$; $g_{22} = f_y^2 + 1$; $g_{12} = f_x f_y$,

$$\left.\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial y^2}\right|_P = 2f_{xy}^2, \quad \left.\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^2}\right|_P = 2f_{xy}^2, \quad \left.\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x\,\partial y}\right|_P = f_{xx}f_{yy} + f_{xy}^2.$$

Окончательно имеем (в точке P)

$$R_{1212} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix} = K.$$

По определению $K=\det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}$ в точке P, где $\delta_{ij}=g_{ij}$ в выбранных координатах. Однако гауссова кривизна K — это скаляр, а R_{1212} — компонента тензора. Они равны лишь в данной, избранной, системе координат, где $g_{ij}=\delta_{ij}$, $\det g_{ij}=1=g$. Легко видеть из определения R, согласно которому $R=g^{ql}R^i_{qil}$, что

$$R=2\det(g^{ql})R_{1212}=\frac{2}{\det(g_{ij})}R_{1212}=\frac{2}{g}R_{1212}=R.$$

В нашей системе координат $g=1$ и $R_{1212}=K$. Поэтому в нашей системе координат верно равенство $R=2K$; так как R и K — оба скаляры, то это равенство верно всегда. Теорема доказана.

Замечание. Как это видно из доказательства, для компонент тензора Римана имеем формулу

$$\frac{R}{2}\left(g_{11}g_{22}-g_{12}^2\right)=R_{1212}=\frac{Rg}{2}=Kg,\quad g=\det\left(g_{ij}\right). \tag{17}$$

Итак, гауссова кривизна K — это инвариант, для $n=2$ равный $R/2$, где $R=g^{ql}R^i_{qil}$.

Рассмотрим примеры.

1) Евклидова метрика:

$$dl^2=dx^2+dy^2,\quad R^i_{qkl}=0,\quad K=\frac{R}{2}\equiv 0.$$

2) Сфера:

$$dl^2=dr^2+\sin^2\frac{r}{R_0}\,d\varphi^2;$$

здесь $K=\frac{R}{2}=\frac{1}{R_0^2}>0$ (кривизна положительна и постоянна).

3) Плоскость Лобачевского:

$$dl^2=dr^2+\operatorname{sh}^2\frac{r}{R_0}\,d\varphi^2;$$

здесь $K=\frac{R}{2}=-\frac{1}{R_0^2}<0$ (кривизна отрицательна и постоянна).

В § 8 объяснялся наглядный смысл кривизны — когда она бывает положительна или отрицательна.

II. Трехмерный случай. Здесь все сложнее. Тензор Римана

$$R_{iqkl}=-R_{qikl}=-R_{iqlk}=R_{kliq}$$

может здесь рассматриваться в каждой точке как квадратичная форма на трехмерном линейном пространстве кососимметрических тензоров 2-го ранга в силу его симметрий.

Если пару $[i, q] = -[q, i]$ обозначить через A, а пару $[k, l] = -[l, k]$ — через B, то

$$R_{[iq][kl]} = R_{AB} = R_{BA}.$$

Итак, здесь тензор Римана определяется шестью числами. Рассмотрим тензор Риччи $R^i_{qil} = R_{ql} = R_{lq}$. Это — симметрический тензор 2-го ранга. Он тоже определяется шестью числами R_{ql}, $q \geqslant l$. Скалярная кривизна R — это одно число

$$R = g^{ql} R_{ql} = g^{ql} R^i_{qil}.$$

В отличие от двумерного случая, скаляр R не определяет весь тензор R^i_{qkl}. Однако в трехмерном случае достаточно знать тензор Риччи, так как верна формула (проверьте)

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - R_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} + R_{\beta\delta} g_{\alpha\gamma} - R_{\beta\gamma} g_{\alpha\delta} + \frac{R}{2}\left(g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta}\right). \tag{18}$$

Скалярная кривизна — это след тензора Риччи $\mathrm{Sp}(R_{ql}) = g^{ql} R_{ql}$. Имеются еще инварианты — собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, определяемые из уравнения

$$\det(R_{ql} - \lambda g_{ql}) = 0, \tag{19}$$

причем $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = R$.

(Когда произносят слово «пространство положительной кривизны», имеется в виду, что тензор Римана R_{AB} есть положительно определенная квадратичная форма на кососимметрических тензорах 2-го ранга.)

III. Четырехмерный случай. Здесь тензор Римана не определяется тензором Риччи. Тем не менее тензор Риччи очень важен. Например, в четырехмерном пространстве-времени считается, что гравитационное поле — это метрика (g_{ij}), $i, j = 0, 1, 2, 3$, а все другие свойства материи сосредоточены в «тензоре энергии-импульса» λT_{ij} (λ — это размерная константа).

Уравнения (Эйнштейна), определяющие метрику пространства-времени, имеют вид

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = \lambda T_{ij}, \quad \nabla_j T^j_i = 0. \tag{20}$$

В отсутствие материи имеем

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = 0 \quad (\text{или } R_{ij} = 0). \tag{21}$$

При этом $\det(g_{ij}) \neq 0$, но метрика индефинитна (она имеет в диагональном виде три минуса и один плюс; см. § 36).

IV. Тензор кривизны метрики Киллинга. Пусть G — матричная группа преобразований, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, причем на $\mathfrak{g}$ задана метрика Киллинга. Введем связность на группе G, полагая

$$\nabla_{L_X} L_Y = \frac{1}{2} L_{[X,Y]} = \frac{1}{2} [L_X, L_Y], \tag{22}$$

где $X, Y \in \mathfrak{g}$, L_X, L_Y — соответствующие левоинвариантные векторные поля.

Поля вида L_X, $X \in \mathfrak{g}$, образуют базис в касательном пространстве к G в каждой точке, поэтому формула (22) полностью определяет связность (при условии выполнимости формулы Лейбница; см. § 28).

Лемма 2. *Связность* (22) *симметрична и согласована с метрикой Киллинга.*

Доказательство. Проверим, что $T(L_X, L_Y) = 0$ для любых элементов X, Y алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Действительно (формула (6)),

$$T(L_X, L_Y) = \nabla_{L_X} L_Y - \nabla_{L_Y} L_X - [L_X, L_Y] =$$
$$= \frac{1}{2} L_{[X,Y]} - \frac{1}{2} L_{[Y,X]} - L_{[X,Y]} = 0.$$

Докажем теперь согласованность с метрикой Киллинга $\langle , \rangle$. Достаточно показать, что для любых векторных полей ξ, η, ζ имеет место следующее правило дифференцирования скалярного произведения:

$$\partial_\xi \langle \eta, \zeta \rangle = \langle \nabla_\xi \eta, \zeta \rangle + \langle \eta, \nabla_\xi \zeta \rangle.$$

Достаточно проверить это равенство, когда ξ, η, ζ — левоинвариантные поля. В этом случае будем иметь

$$\langle L_Y, L_Z \rangle = \langle Y, Z \rangle_0 = \mathrm{const}, \quad \partial_{L_X} \langle L_Y, L_Z \rangle \equiv 0.$$

Здесь $\langle , \rangle$ — соответствующая метрика Киллинга на алгебре $\mathfrak{g}$. С другой стороны,

$$\langle \nabla_{L_X} L_Y, L_Z \rangle + \langle L_Y, \nabla_{L_X} L_Z \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle L_{[X,Y]}, L_Z \rangle + \langle L_Y, L_{[X,Z]} \rangle \} =$$
$$= \frac{1}{2} \{ \langle [X, Y], Z \rangle_0 + \langle Y, [X, Z] \rangle_0 \} = 0,$$

так как $\operatorname{ad} X$ есть кососимметрический относительно метрики Киллинга линейный оператор (см. § 24). Лемма доказана.

Отсюда уже легко вытекает

Следствие. *Кривизна симметричной связности, согласованной с метрикой Киллинга, дается формулой* (ср. формулу (7))

$$\begin{gathered} R(L_X, L_Y) L_Z = -\frac{1}{4} L_{[[X,Y]Z]}, \\ \langle R(L_X, L_Y) L_Z, L_W \rangle = -\frac{1}{4} \langle [X, Y], [Z, W] \rangle. \end{gathered} \tag{23}$$

Найдем еще геодезические для связности, согласованной с метрикой Киллинга. Так как сдвиги на группе G являются движениями, достаточно определить геодезические, проходящие через единицу группы. Имеет место

Теорема 5. *Геодезическими метрики Киллинга, проходящими через единицу группы, являются однопараметрические подгруппы и только они.*

Доказательство. Вектором скорости однопараметрической подгруппы вида $A(t) = \exp(tX)$, где $X \in \mathfrak{g}$, t — вещественный параметр, является левоинвариантное поле L_X (точнее, его ограничение на кривую $A(t)$). Поэтому

$$\nabla_{\dot{A}} \dot{A} = \nabla_{L_X} L_X = \frac{1}{2} L_{[X,X]} \equiv 0. \tag{24}$$

Следовательно, однопараметрические подгруппы являются геодезическими. Поскольку из единицы можно выпустить однопараметрическую подгруппу с любым начальным вектором скорости, то мы так получим все геодезические по теореме единственности. Теорема доказана.

4. Уравнения Петерсона — Кодацци. Поверхности постоянной отрицательной кривизны и уравнение «sin-gordon». Пусть $r = r(x^1, x^2)$ — поверхность в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, g_{ij} — индуцированная на поверхности метрика. На поверхности возникает также вторая квадратичная форма $b_{ij}\, dx^i\, dx^j$, где

$$b_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial r}{\partial x^i} \right), n \right\rangle, \tag{25}$$

n — единичный вектор нормали к поверхности, $\langle , \rangle$ — евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Как вычислить компоненты симметричной связности, согласованной с метрикой g_{ij}?

Утверждение. *Компоненты симметричной связности, согласованной с метрикой g_{ij} на поверхности $r(x^1, x^2)$, вычисляются по формулам*

$$\Gamma^k_{ij} = \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j}, \frac{\partial r}{\partial x^l} \right\rangle g^{lk} \qquad (i, j, k = 1, 2), \tag{26}$$

или

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^j} = b_{ij} n + \Gamma^k_{ij} e_k, \qquad e_i = \frac{\partial r}{\partial x^i}. \tag{27}$$

Доказательство. Симметричность этой связности очевидна. Достаточно проверить следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \langle e_j, e_m \rangle = \langle \nabla_i e_j, e_m \rangle + \langle e_j, \nabla_i e_m \rangle,$$

где можно считать, что скалярное произведение берется в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Но векторы $\nabla_i e_j$ и $\dfrac{\partial e_j}{\partial x^i}$ отличаются на $b_{ij} n$, а $\langle n, e_m\rangle = 0$; поэтому $\langle \nabla_i e_j, e_m\rangle = \left\langle \frac{\partial e_j}{\partial x^i}, e_m \right\rangle$. Требуемое равенство запишется так:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\langle e_j, e_m\rangle = \left\langle \frac{\partial e_j}{\partial x^i}, e_m \right\rangle + \left\langle e_j, \frac{\partial e_m}{\partial x^i} \right\rangle,$$

а в таком виде оно очевидно. Утверждение доказано.

Векторы (e_1, e_2, n) образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$, гладко зависящий от точки поверхности. Вычислим еще производные $\frac{\partial n}{\partial x^i}$, $i = 1, 2$. Вектор n единичный, поэтому производная $\frac{\partial n}{\partial x^i}$ ему ортогональна (см. § 5). Из равенства $\langle n, e_j\rangle = 0$ вытекает

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^i}\langle n, e_j\rangle = \left\langle \frac{\partial n}{\partial x^i}, e_j \right\rangle + \left\langle n, \frac{\partial e_j}{\partial x^i} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial n}{\partial x^i}, e_j \right\rangle + b_{ij},$$

откуда

$$\frac{\partial n}{\partial x^i} = -b_i^j e_j, \quad b_i^j = g^{jl} b_{il}. \tag{28}$$

Из равенств (27) и (28) вытекают следующие условия совместности:

$$\frac{\partial^2 e_i}{\partial x^k \partial x^j} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial x^k} n - b_{ij} b_k^l e_l + \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x^k} e_l + \Gamma_{ij}^s \left[b_{ks} n + \Gamma_{ks}^l e_l\right] =$$

$$= \frac{\partial b_{ik}}{\partial x^j} n - b_{ik} b_j^l e_l + \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} e_l + \Gamma_{ik}^s \left[b_{js} n + \Gamma_{js}^l e_l\right] = \frac{\partial^2 e_i}{\partial x^j \partial x^k},$$

или

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^s \Gamma_{ks}^l - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l = b_{ij} b_k^l - b_{ik} b_j^l, \tag{29}$$

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial x^j} = \Gamma_{ik}^s b_{js} - \Gamma_{ij}^s b_{ks}. \tag{30}$$

Уравнения (29) называются соотношениями Гаусса. Левая часть формул (29) совпадает с тензором кривизны R_{ijk}^l, и это равенство эквивалентно доказанной выше теореме о связи гауссовой и скалярной кривизны (проверьте!).

Формулы (30) называются соотношениями Петерсона — Кодацци.

Замечание. Уравнения Петерсона — Кодацци дают необходимое условие для того, чтобы форма $b_{ij}(x^1, x^2)$ могла быть второй квадратичной формой поверхности в $\mathbb{R}^3$ с метрикой $g_{ij}(x^1, x^2)$, где величины Γ_{ij}^{h} вычисляются по метрике g_{ij}, исходя из формул Кристоффеля. Можно показать, что это условие является также и достаточным.

Пусть поверхность имеет отрицательную кривизну $K<0$. Тогда можно ввести (локально) такие координаты (p, q) на поверхности, в которых вторая квадратичная форма примет вид

$$b_{ij}\,dx^i\,dx^j = 2b_{pq}\,dp\,dq \tag{31}$$

(отсутствуют члены с dp^2 и dq^2). Если к тому же $K=\mathrm{const}$ (например, $K=-1$), то из соотношений Петерсона — Кодацци следует

$$\frac{\partial g_{pp}}{\partial q}=0, \quad \frac{\partial g_{qq}}{\partial p}=0 \tag{32}$$

(проверьте!). Выберем новые координаты (x, y) на поверхности, полагая

$$x=\int\limits_{p_0}^{p}\sqrt{g_{pp}}\,dp, \quad y=\int\limits_{q_0}^{q}\sqrt{g_{qq}}\,dq. \tag{33}$$

В координатах (x, y) первая и вторая квадратичные формы примут вид

$$ds^2=dx^2+2g_{xy}\,dx\,dy+dy^2, \quad b_{ij}\,dx^i\,dx^j=2b_{xy}\,dx\,dy. \tag{34}$$

Положим $g_{xy}=\cos\omega$, где ω — угол между координатными линиями (x, y) (асимптотические линии). Тогда уравнения Гаусса при $K\equiv-1$ дадут

$$\omega_{xy}=\sin\omega. \tag{35}$$

Это уравнение в физической литературе часто называют уравнением «sin-gordon». Полагая $x=\frac{\tau+\xi}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{\tau-\xi}{\sqrt{2}}$, приведем это уравнение к виду

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}=\sin\omega. \tag{36}$$

Задачи. 1. Докажите, что решения уравнения (36), не зависящие от ξ и убывающие при $\tau\to+\infty$, соответствуют поверхности вращения кривизны $K=-1$ вида $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}+ \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ («псевдосфера Бельтрами»).

2. Доказать формулу (18).

3. Пусть задана кусочно гладкая кривая $x^i(t)$, $i=1, 2$, ограничивающая область U. Доказать, что $\Delta\varphi=\iint\limits_{U}K\sqrt{g}\,dx^1\wedge dx^2$

есть угол поворота вектора при параллельном обносе вдоль кривой $x^i(t)$ (K — гауссова кривизна).

4. Если эта кривая состоит из трех дуг геодезических и кривизна постоянна, то сумма углов такого геодезического треугольника равна $\pi + K\sigma$, где σ — площадь этого треугольника (доказать!). Рассмотреть случай сферы и плоскости Лобачевского.

5. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — векторные поля в римановом (или псевдоримановом) n-мерном пространстве; $g_{ij} = \langle \xi_i, \xi_j \rangle$, $[\xi_i, \xi_j] = c_{ij}^k \xi_k$. Вычислить компоненты симметричной связности Γ_{ij}^k (где $\nabla_{\xi_j} \xi_i = \Gamma_{ij}^k \xi_k$), согласованной с этой метрикой.

6. Обнесем параллельно вектор $\xi = (\xi^k)$ вдоль контура квадрата со стороной ε, натянутого на координатные оси x^i, x^j (против часовой стрелки). Пусть $\tilde{\xi}(\varepsilon)$ — результат такого обноса. Доказать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\tilde{\xi}^k(\varepsilon) - \xi^k}{\varepsilon^2} = -R_{lij}^k \xi^l.$$

7. Доказать справедливость тождества Бьянки для тензора кривизны симметричной связности, согласованной с метрикой:

$$\nabla_m R_{ikl}^n + \nabla_l R_{imk}^n + \nabla_k R_{ilm}^n = 0.$$

8. Вывести из формулы предыдущей задачи следующее тождество для дивергенции тензора Риччи:

$$\nabla_l R_m^l = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x^m}.$$

9. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — ортонормированные векторные поля в n-мерном римановом пространстве и $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — дуальный базис 1-форм: $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$ (все индексы можно считать нижними). Определим 1-формы ω_{ij} и 2-формы Ω_{ij}, полагая

$$\omega_{ij} = \Gamma_{jk}^i \omega_k; \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l.$$

Здесь $\nabla_{X_k} X_j = \Gamma_{jk}^i X_i$, $\langle R(X_k, X_l) X_j, X_i \rangle = R_{ijkl}$; суммирование по дважды повторяющимся индексам.

а) Доказать, что $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$.

б) Вывести следующие соотношения (структурные уравнения Картана):

$$d\omega_i = -\omega_j \wedge \omega_{ij},$$
$$d\omega_{ij} = \omega_{il} \wedge \omega_{lj} - \Omega_{ij},$$
$$d\Omega_{ij} = -\Omega_{il} \wedge \omega_{lj} + \omega_{il} \wedge \Omega_{lj}.$$

10. В обозначениях предыдущей задачи определим формы $\Omega_{(k)}$ и форму Ω в случае четной размерности n, полагая

$$\Omega_{(k)} = \Omega_{i_1 i_2} \wedge \Omega_{i_2 i_3} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_{k-1} i_k} \wedge \Omega_{i_k i_1};$$

$$\Omega = \varepsilon^{i_1 \ldots i_n} \Omega_{i_1 i_2} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_{n-1} i_n} \quad (n = 2m).$$

а) Доказать, что определение форм $\Omega_{(k)}$, Ω не зависит от выбора ортонормированного репера $X_1, \ldots, X_n$.

б) Формы $\Omega_{(k)}$, Ω замкнуты.

в) Получить выражения для этих форм в координатах.

г) Для $n = 2$ форма Ω имеет вид $\Omega = K\sqrt{g}\,dx^1 \wedge dx^2$, K — гауссова кривизна.

д) Вывести формулы, аналогичные формулам задач 9, 10, для псевдоримановых пространств.