Глава 5

ЭЛЕМЕНТЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 31. Одномерные вариационные задачи

1. Уравнения Эйлера — Лагранжа. Мы определили в § 29 геодезические линии $x^i = x^i(t)$ уравнением $\nabla_T(T) = 0$, где $T^i = \frac{dx^i}{dt}$ — вектор скорости кривой, или

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0. \tag{1}$$

Если связность Γ^i_{jk} симметрична и согласована с метрикой g_{ij}, то компоненты Γ^i_{jk} выражаются через g_{ij}, и поэтому геодезические определяются метрикой. Какими геометрическими свойствами они обладают кроме того, что параллельный перенос вектора скорости геодезической вдоль нее самой дает опять ее вектор скорости? Мы привыкли к тому, что геодезические линии (хотя бы локально) кратчайшие — их длина не больше длины любой другой кривой, соединяющей те же точки, достаточно близкие друг к другу. Выясним здесь этот вопрос.

Полезно подойти к нему с более общей точки зрения. Пусть $L(x, \xi, t)$ — какая-то функция точки $x = (x^1, \ldots, x^n)$ и касательного вектора $\xi = (\xi^i)$ в этой точке. Рассмотрим фиксированную пару точек $P = (x_1^1, \ldots, x_1^n)$ и $Q = (x_2^1, \ldots, x_2^n)$, всевозможные гладкие кривые γ: $x^i = x^i(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ (с фиксированными a и b), соединяющие эти две точки: $x^i(a) = x_1^i$, $x^i(b) = x_2^i$.

Рассмотрим величину

$$S[\gamma] = \int_P^Q L(x(t), \dot{x}(t), t)\,dt. \tag{2}$$

На какой кривой γ величина $S[\gamma]$ будет минимальна? Величина (функционал) $S[\gamma]$ будет называться *действием*.

Пример 1. Пусть $L(x, \xi) = g_{ij}\xi^i\xi^j$. Тогда $S[\gamma] = \int_P^Q L(x, \dot{x})\,dt = \int_P^Q g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j dt = \int_P^Q |\dot{x}|^2\,dt$. На какой кривой $\gamma = \{x(t)\}$ функция $S[\gamma]$ минимальна?

Пример 2. Пусть $L(x, \xi) = \sqrt{g_{ij}\xi^i\xi^j} = \sqrt{\langle\xi, \xi\rangle} = |\xi|$ (длина вектора). Тогда $S[\gamma] = \int\limits_P^Q \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}\,dt$ есть длина кривой γ. У какой кривой γ между точками P и Q длина минимальна?

Пример 3. Пусть метрика евклидова; положим $L = \frac{m}{2}\delta_{ij}\xi^i\xi^j - U(x)$, где U — некоторая функция точки. Тогда $S[\gamma] = \int\limits_P^Q \left[\sum\limits_i \frac{m}{2}(\dot{x}^i)^2 - U(x)\right]dt$. Кривые γ, вдоль которых $S[\gamma]$ минимально,— это траектории движения точки массы m в поле силы $f_i = -\frac{\partial U}{\partial x^i}$.

Имеет место простая

Теорема 1. *Если величина* $S[\gamma] = \int\limits_P^Q L(x, \dot{x}, t)\,dt$ *достигает минимума на некоторой кривой* γ: $x^i = x^i(t)$ *среди всех гладких кривых, идущих из* P в Q, *то вдоль кривой* γ *выполнены уравнения*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

где

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L(x, \xi, t)}{\partial \xi^i}\bigg|_{\xi=\dot{x}}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\xi^i\partial\xi^j}\ddot{x}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial\xi^i\partial x^j}\dot{x}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial\xi^i\partial t}\right)\bigg|_{\xi=\dot{x}}$$

(считается, что $L = L(x^1, \ldots, x^n, \xi^1, \ldots, \xi^n, t)$, *где* x *и* ξ *— независимые переменные, но затем подставляется* $\xi^i = \frac{dx^i}{dt}$ *вдоль кривой* γ*).*

Доказательство. Пусть $\eta^i = \eta^i(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$,— любая гладкая функция такая, что $\eta^i(a) = 0$ и $\eta^i(b) = 0$. Рассмотрим выражение

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{S[\gamma + \varepsilon\eta] - S[\gamma]}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} S[\gamma + \varepsilon\eta]\,|_{\varepsilon=0}.$$

Здесь $\gamma + \varepsilon\eta$ — это кривая $x^i = x^i(t) + \varepsilon\eta^i(t)$, также идущая из P в Q, близкая к кривой $\gamma(t)$ при малом ε.

Лемма 1. *Если* $S[\gamma]$ *минимально, то для любой гладкой вектор-функции* $\eta(t)$, *обращающейся в нуль на концах временно́го интервала,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{S[\gamma + \varepsilon\eta] - S[\gamma]}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} S[\gamma + \varepsilon\eta]\,|_{\varepsilon=0} \equiv 0.$$

Доказательство леммы очевидно.

Перейдем к теореме. Развернем выражение $\frac{d}{d\varepsilon} S[\gamma + \varepsilon\eta]|_{\varepsilon=0}$. Имеем

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[\gamma + \varepsilon\eta]|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left\{ \frac{\partial L}{\partial x^i} \eta^i(t) + \frac{\partial L}{\partial \xi^i} \dot{\eta}^i(t) \right\} dt = 0, \tag{4}$$

где интеграл по определению вычислен вдоль кривой γ

$$x^i = x^i(t), \quad \xi^i = \dot{x}^i(t).$$

Это равенство верно для любой гладкой вектор-функции $\eta(t)$, обращающейся в нуль на концах временнóго интервала.

Заметим следующее тождество:

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial \xi^i} \dot{\eta}^i dt = \frac{\partial L}{\partial \xi^i} \eta^i|_{t=b} - \frac{\partial L}{\partial \xi^i} \eta^i|_{t=a} - \int_a^b \eta^i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \xi^i} \right) dt$$

(интегрирование по частям). Так как $\eta^i(a) = \eta^i(b) = 0$, получаем: $\int_a^b \frac{\partial L}{\partial \xi^i} \dot{\eta}^i dt = -\int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \xi^i} \right) \eta^i dt$. Подставляя это выражение в формулу (4), мы видим, что для любой гладкой вектор-функции $\eta^i(t)$, обращающейся в нуль на концах временнóго интервала, верно равенство

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[\gamma + \varepsilon\eta]|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right] \eta^i dt = 0, \tag{5}$$

если, напомним, на кривой γ: $x^i = x^i(t)$ достигается минимум функции $S[\gamma]$ на множестве всех гладких кривых, соединяющих точки P и Q.

Отсюда следует равенство

$$\psi^i(t) = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Действительно, если $\psi^i(t) \neq 0$ для какого-либо i и какого-либо $t = t_0$ между a и b, то легко подобрать такую функцию $\eta^i(t)$, что интеграл (5) не будет равен нулю (например, полагая $\eta^i = \psi^i f(t)$, будем иметь под интегралом положительное число, если $f(t) \geqslant 0$ и обращается в нуль на концах). Итак, теорема доказана.

Определение 1. Решения уравнений $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right)^{\cdot} = \frac{\partial L}{\partial x^i}$ называют *экстремалями* функционала S.

Дадим еще несколько определений.

1. Подынтегральная функция

$$L = L(x, \xi, t) = L(x, \dot{x}, t) \tag{6}$$

называется *лагранжианом.*

2. *Энергией* называется выражение

$$E = E(x, \dot{x}, t) = E(x, \xi, t) = \xi^i \frac{\partial L}{\partial \xi^i} - L = \dot{x}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - L. \tag{7}$$

3. *Импульсом* называется выражение

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial \xi^i} \quad \text{(ковектор)}. \tag{8}$$

4. *Силой* называется выражение

$$f_i = \frac{\partial L}{\partial x^i} \quad \text{(также ковектор)}. \tag{9}$$

5. *Уравнение Эйлера — Лагранжа* — это уравнение из теоремы 1 (уравнение экстремалей)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^i} \quad \text{или} \quad \dot{p}_i = f_i.$$

6. Выражение

$$\frac{\delta S}{\delta x^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \tag{10}$$

называется *вариационной производной* функционала $S[\gamma]$. Из доказательства теоремы 1 вытекает другое определение вариационной производной: это величина $\frac{\delta S}{\delta x^i}$, определяемая равенством

$$\frac{d}{d\varepsilon} T[\gamma + \varepsilon\eta]\Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \frac{\delta S}{\delta x^i}\eta^i dt. \tag{11}$$

Следует сказать, что лагранжиан, энергия и импульс определены неоднозначно, с точностью до преобразований вида

$$L' = L + \frac{df(x, t)}{dt}, \quad E' = E - \frac{\partial f}{\partial t}, \quad p' = p + \frac{\partial f}{\partial x}.$$

2. Основные примеры функционалов. Пример 0. Если $L = \frac{m}{2}\sum_i (\xi^i)^2 - U(x)$, где U — функция точки, то $f_i = -\frac{\partial U}{\partial x^i}$ и $p_i = m\dot{x}^i$. Имеем

$$\dot{p}_i = f_i \quad \text{или} \quad m\ddot{x}^i = -\frac{\partial U}{\partial x^i}. \tag{12}$$

Это уравнение (Ньютона) движения частицы массы m в потенциальном силовом поле $f = -\operatorname{grad} U$, известные из классической механики. Мы получим, что траектории движения такой частицы совпадают с экстремалями функционала

$$S = \int \left[\frac{m}{2} \sum (\dot{x}^i)^2 - U(x)\right] dx$$

(*принцип наименьшего действия*).

Пример 1. Если $L = \frac{1}{2} g_{ij}\xi^i\xi^j$, то $p_i = g_{ij}\xi^j$, $f_k = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\xi^i\xi^j$. Получаем уравнение экстремалей $\frac{dp_k}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j$, где $p_k = g_{kj}\dot{x}^j$, т. е. $\frac{dp_k}{dt} = \ddot{x}^j g_{jk} + \dot{x}^j \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}_i = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j$. Так как $g^{km}g_{jk} = \delta^m_j$, получаем $\ddot{x}^m + g^{km}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j = 0$. Заметим теперь следующее тождество: $g^{km}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j = \frac{1}{2}\dot{x}^i\dot{x}^j g^{km}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)$. Подставляя его в предыдущее уравнение, получим

$$\ddot{x}^m + \Gamma^m_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0, \tag{13}$$

где

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2} g^{km}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \tag{14}$$

— симметрическая связность, согласованная с метрикой g_{ij}.

Итак, доказана

Теорема 2. *Если* $L = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = \langle\dot{x}, \dot{x}\rangle = |\dot{x}|^2$, $S[\gamma] = \int_P^Q |\dot{x}|^2\, dt$, *то уравнение Эйлера — Лагранжа для экстремалей (в частности, минимумов) совпадает с уравнением геодезических.*

Пример 2. Если $L = \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j} = |\dot{x}|$, то выражение $S = \int_P^Q |\dot{x}|\, dt$ (длина) не зависит от параметра t. Уравнения Эйлера — Лагранжа в этом случае имеют вид $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right)^{\cdot} = \frac{\partial L}{\partial x^k}$, или

$$\left(\frac{g_{kj}\dot{x}^j}{\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}}\right)^{\cdot} = \frac{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j}{2\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}}.$$

Если отнести кривую к параметру, пропорциональному натуральному, $t = \mathrm{const}\cdot l$, для которого $\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j} = |\dot{x}| = \mathrm{const}$, то получим

$$(g_{kj}\dot{x}^j)^{\boldsymbol{\cdot}} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j.$$

Это — то же самое уравнение, что и в примере 1, но оно получено нами лишь для кривых, отнесенных к параметру, пропорциональному натуральному.

Условимся в этой главе трактовать термин «натуральный параметр» расширительно: *параметр, пропорциональный натуральному, мы также будем называть натуральным.*

Заметим, что в примере 2 можно ограничиться рассмотрением кривых с натуральным параметром, поскольку значение длины кривой не зависит от параметра на кривой.

Итак, нами доказана

Теорема 3. *Уравнения Эйлера — Лагранжа для экстремалей (в частности, минимумов) функционала длины $L = \sqrt{g_{ij}\xi^i\xi^j}$ совпадают с уравнением геодезических, если на кривой выбирается натуральный параметр. Таким образом, гладкая кривая, являющаяся кратчайшей среди кривых, соединяющих точки P и Q, удовлетворяет уравнению геодезических по отношению к натуральному параметру.*

Отметим некоторые свойства энергии и импульса произвольного лагранжиана.

Первое свойство («сохранение энергии»). *Если лагранжиан $L = L(x, \xi)$ не зависит явно от t, то полная производная энергии E вдоль экстремали равна нулю:*

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}^i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - L\right) = \ddot{x}^i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} + \dot{x}^i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \\ - \frac{\partial L}{\partial x^i}\dot{x}^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\ddot{x}^i = \dot{x}^i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i}\right) \equiv 0.$$

Второе свойство («сохранение импульса»). *Если координаты $x^1, \ldots, x^n$ выбраны так, что $\frac{\partial L}{\partial x^i} \equiv 0$, то вдоль любой экстремали имеет место равенство $\dot{p}_i = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} \equiv 0$.* Это следует из уравнений Эйлера — Лагранжа. Координата x^i называется в этом случае *циклической.*

Примеры. а) Если $L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$, то $E = L = \frac{1}{2}|\dot{x}|^2$. Из закона сохранения энергии имеем $\frac{dE}{dt} = 0$ вдоль экстремалей функционала $S = \int L\,dt$. Итак, экстремали — это всегда геодезические, а скорость их пробегания постоянна (натуральный параметр).

Замечание. Если лагранжиан $L(x, \dot{x})$ является однородной функцией от $\xi = \dot{x}$ первой степени однородности, т. е. $L(x, \lambda\xi) = \lambda L(x, \xi)$ (например, $L = \sqrt{\langle\xi, \xi\rangle}$), то энергия E тождественно равна нулю и параметр на экстремали может быть взят любым.

б) Если поверхность в трехмерном евклидовом пространстве задана в цилиндрических координатах уравнением $f(z, r) = 0$ (поверхность вращения), то за одну из координат на поверхности мы можем взять угол φ, а за другую — r или z (локально). Метрика имеет вид

$$dl^2 = dz^2 + dr^2 + r^2\, d\varphi^2.$$

Если локально имеем $r = r(z)$, то

$$dl^2 = g_{zz}dz^2 + r^2(z)\, d\varphi^2, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{zz} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Лагранжиан для геодезических имеет вид

$$L = \frac{1}{2}(g_{zz}\dot{z}^2 + r^2(z)\,\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}(g_{rr}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2),$$

причем энергия $E = L$ и импульс $p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = r^2\dot{\varphi}$ сохраняются.

Локальные координаты на поверхности — это z и φ. Рассмотрим их орты e_z и e_φ. Скалярные произведения этих ортов таковы:

$$\langle e_z, e_z\rangle = g_{zz}, \quad \langle e_z, e_\varphi\rangle = 0, \quad \langle e_\varphi, e_\varphi\rangle = r^2(z).$$

Рассмотрим вектор скорости геодезической $v = (\dot{z}, \dot{\varphi})$ и вычислим угол ψ между v и e_φ:

$$\cos\psi = \frac{\langle v, e_\varphi\rangle}{\sqrt{\langle v, v\rangle\langle e_\varphi, e_\varphi\rangle}} = \frac{r^2\dot{\varphi}}{\sqrt{E}r} = \frac{p_\varphi}{\sqrt{E}r}.$$

Поэтому $r\cos\psi = \dfrac{p_\varphi}{\sqrt{E}} = \mathrm{const}$. Окончательно получается

Теорема 4 (Клеро). *Величина $r\cos\psi$ сохраняется вдоль геодезической на поверхности вращения в $\mathbb{R}^3$.*

Так как $p_\varphi = r^2\dot{\varphi} = \mathrm{const}$ и $2E = g_{zz}\dot{z}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \mathrm{const}$, получаем $r\dot{\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{r}$, $2E = g_{zz}(z)\,\dot{z}^2 + \dfrac{p_\varphi^2}{r^2}$, где $r = r(z)$. Это позволяет полностью проинтегрировать уравнение геодезических на поверхности вращения:

$$d\varphi = \frac{p_\varphi}{r^2}\,dt, \quad dt = \frac{dr}{\sqrt{\dfrac{2E}{g_{rr}} - \dfrac{p_\varphi^2}{g_{rr}r^2}}}. \tag{15}$$

Задача. Пусть в лагранжиан L входят высшие производные:

$$L = L(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(k)});$$
$$S[\gamma] = \int_\gamma L(t, x, \ldots, x^{(k)})\, dt.$$

Доказать, что для экстремалей функционала $S[\gamma]$ имеем уравнение Эйлера — Лагранжа вида

$$\frac{\delta S}{\delta x} = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} - \ldots + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k}\frac{\partial L}{\partial x^{(k)}} = 0.$$

§ 32. Законы сохранения

1. Группы преобразований, сохраняющих вариационную задачу. Полученному в предыдущем параграфе закону сохранения импульса можно придать более удобную инвариантную форму, используя однопараметрические группы преобразований (см. § 23).

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задана (локальная) однопараметрическая группа локальных преобразований S_τ, $-\infty < \tau < \infty$, обладающая следующими свойствами:

1. Для любой точки P найдется число $\tau_0 > 0$ и окрестность U точки P в $\mathbb{R}^n$, где преобразование S_τ определено (и гладко) при $|\tau| < \tau_0$:

$$S_\tau : U \to \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

2. $S_0 = 1$ (тождественное преобразование),

$$S_{\tau_1+\tau_2} = S_{\tau_1} \circ S_{\tau_2}, \quad S_{-\tau} = S_\tau^{-1} \tag{2}$$

(всюду, где все эти отображения определены).

Напомним, что с каждой локальной однопараметрической группой связывается векторное поле, касающееся траекторий $S_\tau(x)$:

$$(X^i) = X(x) = \frac{d}{d\tau} S_\tau(x)\Big|_{\tau=0}. \tag{3}$$

Векторное поле (X^i) определяет группу S_τ согласно теореме существования и единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$, где (X^i) отличен от нуля, найдется окрестность U этой точки и координаты $y^1, \ldots, y^n$ в области U такие, что преобразование S_τ при малых τ имеет вид

$$S_\tau(y^1, \ldots, y^n) = (y^1 + \tau, y^2, \ldots, y^n). \tag{4}$$

Именно такую форму теоремы существования решений мы будем использовать далее.